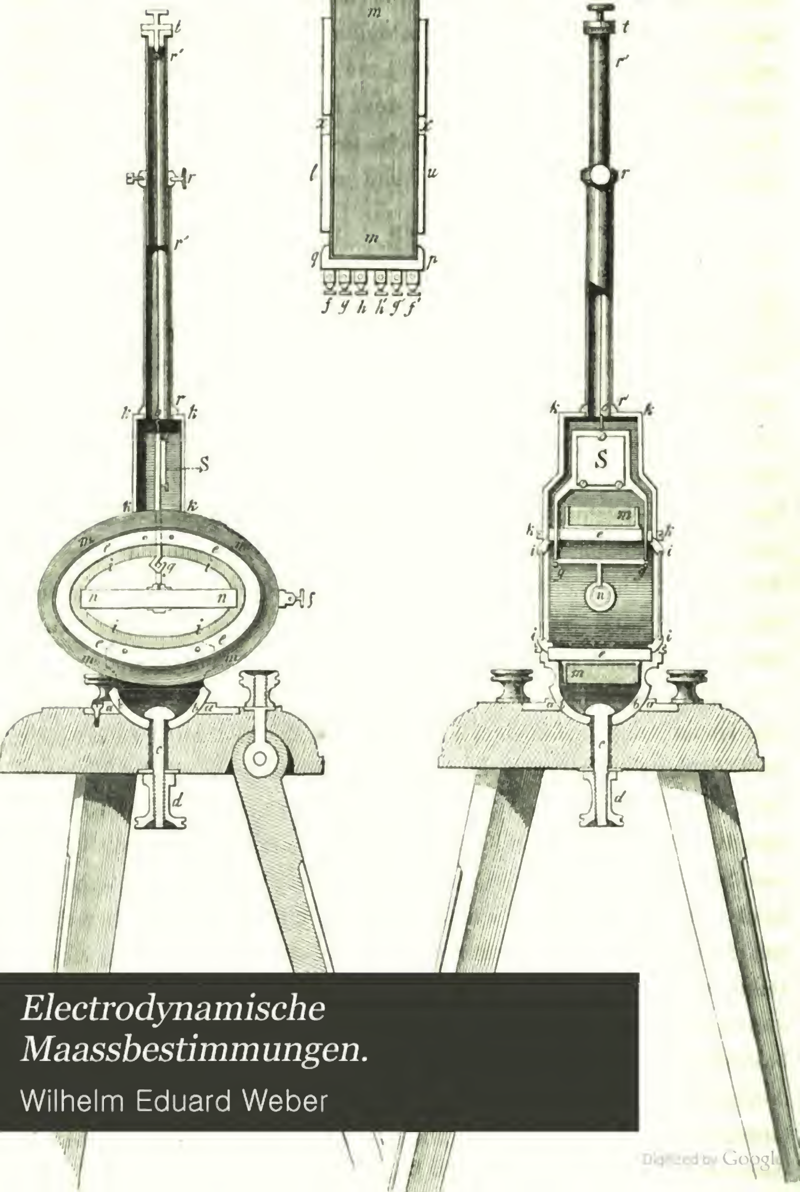
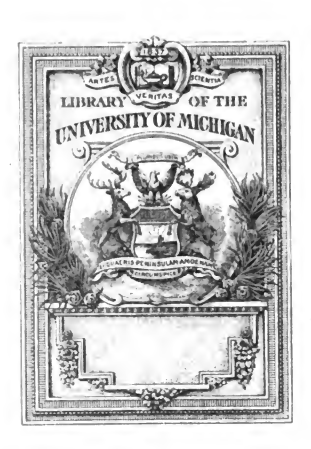


Electrodynamische Maassbestimmungen.

Wilhelm Eduard Weber




ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



Meinem lieben Zöll

zum freundlichen An

Wilhelm

ABHANDLUNGEN

ÜBER

ELEKTRODYNAMISCHE

MAASSBESTIMMUNGEN

VON

Eduard

WILHELM WEBER.

Mit einer Tafel.

Aus den Abhandlungen bei Begründung der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, und aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1871.

Inhalt.

Erste Abhandlung:

Ueber ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkung*).

*) Aus den Abhandlungen bei Begründung der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1846 (Hirzel). Damit man die Gesellschaftsschriften selbst citiren und die Citate aus denselben benutzen könne, ist die Paginirung derselben beibehalten worden.

Seite

Anwendungen des Elektrodynamometers.

Ueber den Zusammenhang der elektrostatischen und der elektrodynamischen Erscheinungen, nebst Anwendung auf die elektrodynamischen Maassbestimmungen.

Zweite Abhandlung:

Widerstandsmessungen *).

Seite

I. Widerstandsmessungen nach einem gegebenen Grundmaasse.

II. Zurückführung der Widerstandsmessungen auf absolutes Maass.

III. Beispiele der Anwendung des absoluten Wiederstandsmaasses.

*) Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Band I. Leipzig 1852 (Hirzel). Diese Abhandlung wurde einzeln zuerst im Jahre 1850 ausgegeben.

Seite

IV. Ueber die Principien verschiedener absoluter Maasssysteme in der Elektrodynamik.

V. Ueber den Zusammenhang der Theorie der galvanischen Kette mit den elektrischen Grundgesetzen.

VI. Vergleichung des allgemeinen Princips der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme von Neumann mit den aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Inductionsgesetzen.

Beilagen.

Dritte Abhandlung:

Ueber Diamagnetismus*).

(Mit 1 Kupfertafel.)

*) Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Band I. Leipzig 1852. (Hirzel.)

Ueber die Abhängigkeit des magnetischen und diamagnetischen Moments von der Grösse der Scheidungskraft.

Vierte Abhandlung:

Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass

von **R. Kohlrausch** und **W. Weber** *).

Zurückführung des magnetischen, elektrodynamischen und elektrolytischen Maasses der Stromintensität auf mechanisches Maass.

---

*) Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Band III. Leipzig 1857. (Hirzel.)

Anwendungen.

Anhang.

Fünfte Abhandlung:

Ueber elektrische Schwingungen*).

*) Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Band VI. Leipzig, 1864. (Hirzel.)

Sechste Abhandlung:

Ueber das Princip der Erhaltung der Energie.

Verbesserungen.

Fünfte Abhandlung:

Seite 601 am Ende der Zeile 10 v. u. lies: $\cos\frac{n\sigma}{a}d\sigma$ statt: $\sin\frac{n\sigma}{a}d\sigma$.
» 603 Zeile 14 v. u. lies: Hälften statt: Hälfte.
» 609 » 12 » » hat statt: haben.
» 614 » 2 v. o. » $2\alpha\alpha M''(1+\lambda)$ statt: $2\alpha\alpha M''(1+\lambda)$.
» 641 » 1 » » $e^{-\frac{wt}{p}}.\int_0^t e^{\frac{wt}{p}}$ statt: $e^{-\frac{pt}{w}}.\int_0^t e^{\frac{pt}{w}}$.
» 656 » 10 » » $\sin\lambda^2$ statt: $\sin\lambda$.

Sechste Abhandlung:

Seite 10 Zeile 3 v. o. lies: $\frac{dV}{dr}$ statt: $\frac{V}{dr}$.
» 13 » 9 » » $V=$
» 51 » 17 v. u. » von statt: zwischen.
» 16 » » ihrer statt: von.

ELEKTRODYNAMISCHE

MAASSBESTIMMUNGEN

VON

WILHELM WEBER.

LEIPZIG,
WEIDMANN'SCHE BUCHHANDLUNG
1846.

ELEKTRODYNAMISCHE

MAASSBESTIMMUNGEN,

VON

WILHELM WEBER.

Die elektrischen Flüssigkeiten, wenn sie in den ponderabeln Körpern *bewegt* werden, verursachen Wechselwirkungen der *Molecüle dieser ponderabeln Körper,* von welchen alle galvanischen und elektrodynamischen Erscheinungen herrühren. Diese von den *Bewegungen* der elektrischen Flüssigkeiten abhängenden Wechselwirkungen *ponderabeler* Körper sind in *zwei* Klassen zu theilen, deren Unterscheidung für die genauere Erforschung der Gesetze wesentlich ist, nämlich: 1) in solche Wechselwirkungen, welche jene Molecüle auf einander ausüben, wenn ihr gegenseitiger Abstand unmessbar klein ist, und die man mit dem Namen der galvanischen oder elektrodynamischen *Molecularkräfte* bezeichnen kann, weil sie im Innern der Körper statt finden, durch welche der galvanische Strom hindurch geht, und 2) in solche Wechselwirkungen, welche jene Molecüle auf einander ausüben, wenn ihr gegenseitiger Abstand messbar ist, und die man mit dem Namen der *aus der Ferne* (im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Abstände) wirkenden galvanischen oder elektro-dynamischen Kräfte bezeichnen kann. Diese letztern Kräfte wirken auch zwischen den Molecülen, die zwei verschiedenen Körpern angehören, z. B. zwei Leitungsdrähten. Man sieht leicht ein, dass zur vollständigen Erforschung der Gesetze der *ersten* Klasse von Wechselwirkungen eine genauere Kenntniss der *Molecularverhältnisse* im Innern ponderabler Körper nöthig ist, als man gegenwärtig besitzt, und dass man ohnedem nicht hoffen könne, die Untersuchung dieser Klasse von Wechselwirkungen durch Aufstellung vollständiger und allgemeiner Gesetze zum völligen Abschluss zu bringen. Anders verhält es sich dagegen mit der *zweiten* Klasse von galvanischen oder elektrodynamischen Wechselwirkungen, deren Gesetze an den Kräften erforscht werden können, welche zwei ponderable Körper, durch welche die elektrischen Flüssigkeiten sich bewegen, bei *abgemessener gegenseitiger Lage und Entfernung* auf einander ausüben, ohne dass es dabei nothwendig wäre, die inneren *Molecularverhältnisse* dieser ponderabeln Körper als bekannt voraus zu setzen.

Von diesen beiden Klassen von Wechselwirkungen, welche von Galvani und Ampère entdeckt worden sind, muss vor der Hand noch eine *dritte* Klasse ganz geschieden werden, nämlich die von Oersted entdeckte, der *electromagnetischen* Wechselwirkungen, welche zwischen den Molecülen zweier *ponderabler* Körper in messbaren Abständen von einander statt finden, wenn in dem einen die elektrischen Flüssigkeiten bewegt, in dem andern dagegen

die magnetischen Flüssigkeiten geschieden sind. Diese Unterscheidung der *elektromagnetischen* und *elektrodynamischen* Erscheinungen ist für die Aufstellung der Gesetze so lange nothwendig, als die von Ampère gegebene Vorstellung vom Wesen des Magnetismus die ältere und gewöhnlichere Vorstellung von der wirklichen Existenz magnetischer Flüssigkeiten nicht vollständig verdrängt hat. Ampère selbst drückt sich über den wesentlichen Unterschied, welcher zwischen diesen beiden Klassen von Wechselwirkungen zu machen sei, auf folgende Weise aus:

«Als Hr. Oersted,» sagt er S. 285 seiner Abhandlung*) «die Wirkung entdeckt hatte, welche der Leitungsdraht auf einen Magnet ausübt, konnte man in der That zu der Vermuthung sich bewogen finden, dass auch eine Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte unter einander existiren möge; aber es war dies keine nothwendige Folge der Entdeckung jenes berühmten Physikers: denn ein weicher Eisenstab wirkt auch auf eine Magnetnadel, ohne dass jedoch irgend eine Wechselwirkung zwischen zwei weichen Eisenstäben statt fände. Konnte man nicht, so lange man blos die Thatsache der Ablenkung der Magnetnadel durch den Leitungsdraht kannte, annehmen, dass der elektrische Strom diesem Leitungsdrahte blos die Eigenschaft ertheilte, von der Magnetnadel auf ähnliche Art influencirt zu werden, wie das weiche Eisen von selbiger Nadel, was dazu hinreichte, dass er auf sie wirkte, ohne dass dadurch irgend eine Wirkung zwischen zwei Leitungsdrähten, wenn sie dem Einflusse magnetischer Körper entzogen wären, resultirte? Blos die Erfahrung konnte die Frage entscheiden: ich machte sie im Monat September 1820, und die Wechselwirkung Voltaischer Leiter war bewiesen.»

Ampère führt diese Unterscheidung in seiner Abhandlung consequent durch, indem er für nothwendig erklärt, dass die Gesetze der von ihm und von Oersted entdeckten Wechselwirkungen jede für sich besonders und vollständig aus der Erfahrung abgeleitet werden. Nachdem er von den Schwierigkeiten gesprochen, die Wechselwirkung der Leitungsdrähte genau zu beobachten, sagt er a. a. O. S. 183: «Es ist wahr, dass man auf keine solchen Hindernisse trifft, wenn man die Wirkung eines Leitungsdrathes auf einen Magnet misst; aber dieses Mittel lässt sich nicht anwenden, wenn es sich um Bestimmung der Kräfte handelt, welche zwei Voltaische Leiter auf einander ausüben. In der That leuchtet ein, dass, wenn die Wirkung eines Leitungsdrathes auf einen Magnet von einer andern Ursache herrührte, als der, welche bei zwei Leitungsdrähten statt findet, die über die erstere gemachten Erfahrungen in Beziehung auf die letztere gar nichts beweisen würden.»

Es leuchtet hieraus ein, dass, wenn auch in neuerer Zeit sehr viele schöne Untersuchungen in weiterer Verfolgung von Oersted's Entdeckung gemacht worden sind, doch hiermit noch nichts unmittelbar zur weitern Verfolgung von Ampère's Entdeckung geschehen sei, und dass es hierzu eigener und besonderer Untersuchungen bedarf, an denen es bis jetzt noch sehr gemangelt hat.

---

*) Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience. Mémoires de l'académie royale des sciences de l'institut de France. Année 1823.

Ampère's klassische Arbeit bezieht sich selbst nur zum kleineren Theile auf die Erscheinungen und Gesetze der Wechselwirkung der Leitungsdrähte unter einander, während der grössere Theil derselben der Entwickelung und Anwendung seiner darauf begründeten Vorstellung vom Magnetismus gewidmet ist. Auch hat er selbst durch seine Arbeit die Untersuchung der Erscheinungen und Gesetze der Wechselwirkung der Leitungsdrähte unter einander keineswegs als vollendet und abgeschlossen betrachtet, weder in experimenteller, noch in theoretischer Hinsicht, sondern hat auf dasjenige, was in beiden Beziehungen noch zu thun übrig bleibe, mehrfach aufmerksam gemacht.

Er giebt S. 181 der angeführten Abhandlung an, dass man auf zwei verschiedenen Wegen zu Werke gehen könne, um die Gesetze der Wechselwirkung der Leitungsdrähte unter einander *aus der Erfahrung* abzuleiten, von denen er nur den einen verfolgen könne, und giebt die Gründe an, die ihn abgehalten haben, auch den andern Weg einzuschlagen, wovon der wesentlichste im Mangel genauer *Messinstrumente* besteht, die frei seien, von unbestimmbaren fremdartigen Einflüssen.

«Es giebt» sagt er a. a. O. S. 182 f., «ausserdem noch einen weit entscheidenderen Grund, nämlich die grenzenlosen Schwierigkeiten der Versuche, wenn man sich z. B. vorsetzen wollte, diese Kräfte durch die Zahl der Schwingungen eines ihrem Einflusse unterworfenen Körpers zu *messen*. Diese Schwierigkeiten rühren daher, dass, wenn man einen festen Leiter auf einen beweglichen Theil der Voltaischen Kette wirken lässt, diejenigen Theile des Apparates, welche nothwendig sind, um ihn mit der Säule in Verbindung zu setzen, auf diesen beweglichen Theil zugleich mit dem festen Leiter wirken und so die Resultate der Versuche stören.»

Eben so hat Ampère auch mehrfach darauf aufmerksam gemacht, was in *theoretischer* Hinsicht noch zu thun übrig bleibe. Z. B. sagt er, nachdem er gezeigt hat, dass es unmöglich sei, die Wechselwirkung der Leitungsdrähte unter einander aus einer bestimmten Vertheilung ruhender Elektricität in den Leitungsdrähten zu erklären, S. 299:

«Wenn man dagegen annimmt, dass die elektrischen Theilchen in den Leitungsdrähten, durch Einfluss der Säule in Bewegung gesetzt, fortwährend ihre Stelle wechseln, indem sie sich in jedem Augenblicke zu neutraler Flüssigkeit vereinigen, sich wieder trennen und sogleich wieder mit andern Theilchen der Flüssigkeit der entgegengesetzten Art vereinigen, so liegt *kein Widerspruch* darin, anzunehmen, dass aus den Wirkungen im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen, welche jedes Theilchen ausübt, eine Kraft zwischen zwei Elementen der Leitungsdrähte sich ergeben könne, welche nicht allein von ihrem Abstande abhänge, sondern auch von den Richtungen der beiden Elemente, nach welchen die elektrischen Theilchen sich bewegen, sich mit Molecülen der entgegengesetzten Art vereinigen und sich im folgenden Augenblicke trennen, um sich wieder mit andern zu vereinigen. Gerade von diesem Abstande und von diesen Richtungen, und zwar ausschliesslich von denselben, hängt aber die Kraft ab, welche sich dann entwickelt und von der die in dieser Abhandlung auseinander gesetzten Versuche und Rechnungen mir den Werth gegeben haben.»

«Wenn es *möglich* wäre,» fährt Ampère S. 301. fort, «indem man von dieser Betrachtung ausginge, nachzuweisen, dass die Wechselwirkung zweier Elemente in der That der Formel proportional wäre, durch die ich sie dargestellt habe, so würde diese Erklärung des Fundamentalfactums der ganzen Theorie der elektrodynamischen Erscheinungen offenbar jeder andern vorgezogen werden müssen; sie würde aber Untersuchungen fordern, mit denen ich mich zu beschäftigen keine Zeit gehabt habe, eben so wenig, wie mit den noch schwierigeren Untersuchungen, denen man sich unterziehen müsste, um zu erkennen, ob die entgegengesetzte Erklärung, wonach man die elektrodynamischen Erscheinungen den von den elektrischen Strömen dem Aether mitgetheilten Bewegungen zuschreibt, zu der nämlichen Formel führen könne.»

Weder Ampère hat nun aber diese Untersuchungen weiter fortgesetzt, noch sind bisher von Andern darüber weitere Untersuchungen, weder von experimenteller, noch theoretischer Seite veröffentlicht worden, und die Wissenschaft hat auf diesem Gebiete seit Ampère stille gestanden, mit Ausnahme der durch Faraday's Entdeckung hinzugekommenen Inductionserscheinungen galvanischer Ströme in einem Leitungsdrahte, in dessen Nähe ein galvanischer Strom verstärkt, geschwächt, oder versetzt wird. Diese Vernachlässigung der Elektrodynamik seit Ampère ist nicht als Folge davon zu betrachten, dass man der von Ampère entdeckten Fundamentalerscheinung weniger Wichtigkeit, als den von Galvani und Oersted entdeckten, beigelegt hätte, sondern sie ist die Folge von der Scheu vor den grossen Schwierigkeiten der Versuche, welche mit den bisherigen Mitteln und Wegen sehr schwer auszuführen und keiner so mannichfaltigen und scharfen Bestimmungen fähig waren, wie die elektromagnetischen. Diese Schwierigkeiten für die Zukunft zu beseitigen, ist der Zweck der hier vorzulegenden Arbeit, in der ich mich hauptsächlich auf die Betrachtung der rein galvanischen und elektrodynamischen Wechselwirkungen *in die Ferne* beschränken werde.

Ampère hat seine mathematische Theorie der elektrodynamischen Erscheinungen in der Ueberschrift seiner Abhandlung als *einzig aus der Erfahrung abgeleitet* bezeichnet, und man findet in der Abhandlung selbst die sinnreiche einfache Methode ausführlich entwickelt, welche er zu diesem Zwecke angewandt hat. Man findet darin die von ihm gewählten Versuche und ihre Bedeutung für die Theorie ausführlich erörtert und die Instrumente zu ihrer Ausführung genau und vollständig beschrieben; doch fehlt es an einer genauen Beschreibung der Versuche selbst. Bei solchen Fundamentalversuchen genügt es aber nicht, den Zweck derselben anzugeben und die Instrumente zu beschreiben, womit sie gemacht werden, und im Allgemeinen blos die Versicherung beizufügen, dass sie von dem erwarteten Erfolge begleitet gewesen seien, sondern es ist auch nöthig, in das Detail der Versuche selbst genauer einzugehen und anzugeben, wie oft jeder Versuch wiederholt, welche Abänderungen gemacht worden, und welchen Einfluss letztere gehabt haben, kurz, protocollmässig alle Data mitzutheilen, welche zur Begründung eines Urtheils über den Grad der Sicherheit oder Gewissheit des Resultates beitragen. Solche nähere Angaben über die Versuche hat Ampère nicht mitgetheilt, und es mangeln dieselben auch jetzt noch zur Vervollständigung eines directen thatsächlichen

Beweises der elektrodynamischen Fundamentalgesetze. Die Thatsache der Wechselwirkung der Leitungsdrähte im Allgemeinen ist zwar durch häufig wiederholte Versuche ausser Zweifel gesetzt; aber nur mit solchen Mitteln und unter solchen Umständen, wo an keine *quantitativen* Bestimmungen gedacht werden konnte, geschweige, dass diese Bestimmungen eine Schärfe erreicht hätten, welche nothwendig ist, um das Gesetz jener Erscheinungen als erfahrungsmässig bewiesen zu betrachten.

Nun hat zwar Ampère häufiger von dem *Ausbleiben* elektrodynamischer Wirkungen, welches er beobachtet hatte, eine ähnliche Anwendung gemacht, wie von Messungen, die das Resultat = 0 ergeben hätten, und hat durch diesen Kunstgriff mit grossem Scharfsinne und vieler Geschicklichkeit die nothwendigsten Grunddata und Prüfungsmittel für seine theoretischen Combinationen zu gewinnen gesucht, was in Ermangelung besserer Data nicht anders möglich war; solchen *negativen* Erfahrungen, wenn sie auch einstweilen die Stelle mangelnder *positiver* Messungsresultate vertreten müssen, kann aber keineswegs der ganze Werth und die volle Beweiskraft zugeschrieben werden, welche die letzteren besitzen, wenn sie nicht selbst mit solchen Hülfsmitteln und unter solchen Verhältnissen gewonnen worden sind, mit denen und unter welchen auch wahre Messungen sich ausführen lassen, was mit den von Ampère gebrauchten Instrumenten nicht möglich war.

Man betrachte z. B. den Versuch genauer, welchen Ampère als den dritten Fall des Gleichgewichts S. 194 ff. seiner Abhandlung beschreibt, wo ein metallischer Kreisbogen auf zwei metallischen mit Quecksilber gefüllten Rinnen liegt, wovon die eine den galvanischen Strom zuführt, die andere ihn ableitet, und wo ausserdem noch dieser Kreisbogen durch ein Charnier an einen Hebel befestigt ist, der ihn mit einer verticalen, zwischen Spitzen drehbaren Welle verbindet*). Ampère hat nun beobachtet, dass jener Kreisbogen,

---

*) Ampère giebt a. a. O. folgende Beschreibung seines Instruments: «Auf einem Gestell TT' (Fig. 1.) von der Form eines Tisches erheben sich zwei Säulen EF, $E'F'$, mit einander durch zwei Querstäbchen LL', FF' verbunden; eine Axe GH wird von diesen beiden Stäbchen in verticaler Lage gehalten. Ihre beiden Enden G und H sind zugespitzt und greifen in conische Vertiefungen ein, deren eine in dem unteren Querstäbchen LL', die andere am Ende einer Schraube KZ sich befindet, welche durch das obere Querstäbchen FF' hindurchgeht und zur Feststellung der Axe GH dient, ohne dieselbe zu klemmen. Mit dieser Axe ist bei C ein Arm QO fest verbunden, dessen Ende mit einem Charnier versehen ist, in welches die Mitte eines Kreisbogens AA' eingreift, welcher, aus einem Metalldrath gebildet, stets in horizontaler Lage bleibt und dessen Halbmesser dem Abstande des Punktes O von der Axe GH gleich ist. Dieser Kreisbogen wird durch ein Gegengewicht Q balancirt, um die Reibung der Axe GH in den conischen Vertiefungen, in welche sie eingreift, zu vermindern.

Unter dem Kreisbogen AA' befinden sich zwei mit Quecksilber gefüllte Rinnen M, M', so dass die über den Rändern hervorragende Quecksilberfläche den Bogen AA' in B und B' eben berührt. Diese beiden Rinnen communiciren durch metallische Leiter MN, $M'N'$ mit den mit Quecksilber gefüllten Schälchen P, P'. Das Schälchen P und der Leiter MN, der es mit der Rinne M verbindet, sind an einer verticalen Axe befestigt, welche so in dem Tische eingelassen ist, dass sie sich frei drehen kann. Durch das Schälchen P', womit der Leiter $M'N'$ verbunden ist, geht die nämliche Axe hindurch, um welche es sich unabhängig von dem anderen Schälchen drehen kann. Sie ist davon durch eine Glasröhre V isolirt, welche jene Axe umgiebt, und wird durch eine kleine Glasscheibe U von dem Leiter der Rinne M geschieden erhalten, so dass man mit den Leitern MN, $M'N'$ beliebige Winkel bilden kann.

Zwei andere Leiter JR, $J'R'$, am Tische befestigt, tauchen respective in die Schälchen P, P' und verbinden dieselben mit den im Tische angebrachten und mit Quecksilber

während ein galvanischer Strom durch ihn hindurchgeht, auf seinen Unterlagen nicht verschoben werde, wenn man einen geschlossenen Strom darauf wirken lasse, vorausgesetzt, dass der Mittelpunkt des Kreisbogens in die Axe der verticalen Welle falle, an welche der Kreisbogen befestigt ist. Man sieht aber leicht ein, dass, um den Kreisbogen zu bewegen, eine 4fache Reibung überwunden werden müsse, nämlich die Reibung an den beiden Unterlagen, auf welchen der Kreisbogen Fig. 1. AA' bei B und B' aufliegt, und die Reibung in den beiden Spitzen G und H, in welchen die verticale Welle sich dreht. Man weiss ferner, dass die mit den stärksten galvanischen Strömen, die man darstellen kann, hervorgebrachten elektrodynamischen Kräfte auf einen einfachen Draht, wie der durchströmte Theil des Bogens BB' ist, so schwach sind, dass der Draht höchst beweglich sein müsse, um überhaupt eine wahrnehmbare Wirkung zu zeigen. Man würde hiernach zu erwarten geneigt sein,

---

gefüllten Vertiefungen R, R'. Dazwischen endlich befindet sich noch eine dritte ebenfalls mit Quecksilber gefüllte Vertiefung S.

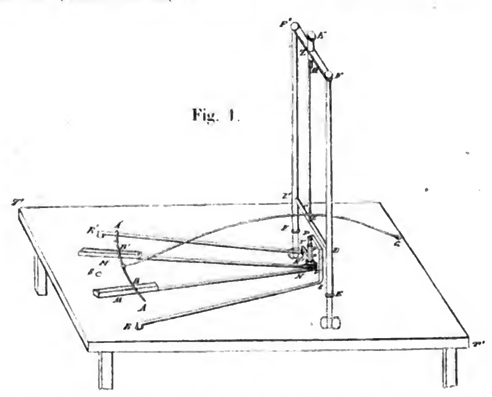


Fig. 1.

Die Art der Anwendung dieses Apparats ist folgende: Man taucht den einen Rheophor, z. B. den positiven, in die Vertiefung R, und den negativen in die Vertiefung S und verbindet letztere mit der Vertiefung R' durch einen beliebig gekrümmten Leiter. Der Strom geht durch den Leiter RJ zum Schälchen P, von da durch den Leiter NM zur Rinne M, durch den Leiter $M'N'$ zum Schälchen P', durch den Leiter $J'R'$ und endlich von der Vertiefung R' durch den krummlinigen Leiter zur Vertiefung S, in welche der negative Rheophor taucht.

Hiernach wird der Voltaische Kreislauf gebildet: 1) vom Kreisbogen BB' nebst den Leitern MN, $M'N'$; 2) von einem Kreislaufe, welcher aus den Theilen RJP, $P'J'R'$ des Apparats, aus dem krummlinigen Conductor, welcher von R' nach S geht, und aus der Säule selbst besteht. Der letztere Kreislauf wirkt wie ein geschlossener, weil er blos durch die Dicke der Glasplatte unterbrochen ist, welche die beiden Schälchen P und P' isolirt: es reicht daher hin, seine Wirkung auf den Kreisbogen BB' zu beobachten, um die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf einen Kreisbogen bei den verschiedenen Stellungen, die man ihnen gegen einander geben kann, erfahrungsmässig zu constatiren.

dass jener Kreisbogen sich zwar in dem Falle nicht verschiebe, wo sein Mittelpunkt in der Drehungsaxe liege, dass aber auch im entgegengesetzten Falle, wo sein Mittelpunkt mit der Drehungsaxe nicht zusammenfällt, keine Verschiebung eintreten werde, weil nämlich die eben erwähnte 4 fache Reibung einen viel zu grossen Widerstand entgegensetze. Ampère sagt nun jedoch a. a. O. S. 196: Lorsqu'au moyen de la charnière O on met l'arc dans une position telle que son centre soit hors de l'axe GH, cet arc prend un mouvement et glisse sur le mercure des augets M, M' en vertu de l'action du courant curviligne fermé qui va de R' en S. Si au contraire son centre est dans l'axe, il reste immobile. Man vermisst hierbei, dass Ampère das offenbare Hinderniss jener vierfachen Reibung nicht erwähnt und nicht einmal ausdrücklich sagt, dass er die Bewegung des excentrischen Kreisbogens selbst gesehen und beobachtet habe. Abgesehen aber von dem Zweifel, der hieraus gegen die wirkliche Beobachtung des Factums etwa erhoben werden könnte, und vorausgesetzt, Ampère habe unter den beschriebenen Verhältnissen die Verschiebung des Kreisbogens selbst gesehen und sich auch versichert, dass dieselbe wirklich die Wirkung *elektrodynamischer* Kräfte gewesen, welche stark genug waren, um alle entgegenstehenden Hindernisse zu besiegen; so ist damit noch keineswegs gesagt, bei welcher Excentricität des Kreisbogens diese Bewegung eingetreten sei und innerhalb welcher *Grenzen* sie *nicht* statt gefunden habe. Ohne Bestimmung solcher Grenzen kann aber diesem Versuche keine volle Beweiskraft zugeschrieben werden. Mir ist nicht bekannt geworden, ob dieser Versuch von andern Physikern seit jener Zeit mit Erfolg wiederholt und genauer beschrieben worden sei; doch lässt sich so viel wohl mit Sicherheit übersehen, dass auch im günstigsten Falle nur bei grossen Excentricitäten die Verschiebung statt gefunden, woraus sich aber nicht mit Sicherheit abnehmen lässt, dass die elektrodynamische Kraft genau senkrecht auf die Elemente des Kreisbogens wirke.

Ich habe durch diese Bemerkungen über Ampère's Versuche nur darthun wollen, dass die elektrodynamischen Gesetze in diesen ohne nähere Details mitgetheilten Versuchen keinen genügenden Beweis gefunden haben, und warum ich glaube, dass ein solcher Beweis auch durch Beobachtungen mit Ampère's Instrumenten nicht gegeben werden könne, sondern dass es dazu Beobachtungen mit genauen Messinstrumenten bedarf, an denen es bisher noch gebricht. Wenn man sich, trotz des Mangels eines directen thatsächlichen Beweises von der Richtigkeit der von Ampère aufgestellten Gesetze überzeugt hält, so beruht diese Ueberzeugung auf Gründen, die jenen directen Beweis keineswegs überflüssig machen. Elektrodynamische Messungen bleiben daher schon darum wünschenswerth, um diesen mangelnden directen Beweis zu liefern.

In der That erscheint es bei dem allgemeinen Bestreben, alle Naturerscheinungen nach Zahl und Maass zu bestimmen, und dadurch eine von der sinnlichen Anschauung oder blossen Schätzung unabhängige Grundlage für die Theorie zu gewinnen, wunderbar, dass in der Elektrodynamik gar kein Versuch dieser Art gemacht worden sei; mir ist aber weder von feinen, noch von groben Messungen der Wechselwirkung zweier Leitungsdräthe unter einander

irgend etwas bekannt geworden. Ich glaube um so mehr den ersten Versuch, den ich zu solchen Messungen gemacht habe, hier vorlegen zu dürfen. Dabei hoffe ich zu beweisen, dass diese elektrodynamischen Messungen noch in ganz andern Beziehungen Wichtigkeit und Bedeutung besitzen, als zum Beweise der elektrodynamischen Fundamentalgesetze, dadurch nämlich, dass sie die Quelle zu ganz neuen Untersuchungen werden, zu denen sie allein nur geeignet sind und die ohnedem gar nicht ausgeführt werden könnten.

1.

Beschreibung eines Instruments zur Messung der Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte.

Die Instrumente, deren sich Ampère zu seinen elektrodynamischen Versuchen bedient hat, sind nicht von der Art, dass den damit gemachten Versuchen die Beweiskraft scharfer Messungen zugeschrieben werden kann. Der Grund davon liegt in der *Reibung*, die oft die ganze oder einen grossen Theil der zu beobachtenden elektrodynamischen Kraft annullirt und der Beobachtung entzieht. Es lässt sich mit jenen Instrumenten selbst unter günstigen Verhältnissen nicht mehr erreichen, als jene feindliche Reibung durch die schwachen elektrodynamischen Kräfte eben zu besiegen, während bei jeder schärferen Messung muss vorausgesetzt werden können, dass die Reibung im Vergleiche mit der zu messenden Kraft ein unmerklicher Bruchtheil sei.

Schon vor 12 Jahren habe ich zum Zweck der Ausschliessung der Reibung und der Ausführung wirklicher Messungen einen auf einem dünnen Holzrahmen aufgewundenen Draht, durch welchen ein galvanischer Strom geführt und welcher dann durch die elektrodynamische Anziehung und Abstossung eines Multiplicators in Bewegung gesetzt werden sollte, mit *bifilarer* Aufhängung an zwei feinen Metalldrähten versehen (ich werde diese bifilar aufgehangene Drathspirale künftig die *Bifilarrolle* nennen) und habe den einen dieser Aufhängungsdrähte zur Zuleitung und den andern zur Ableitung des galvanischen Stroms benutzt. Die ganze Bedeutung dieser Einrichtung zum Zweck der Messung habe ich aber erst später aus dem Bifilarmagnetometer von Gauss kennen gelernt, von dem ich sodann auch die Anwendung eines an der Bifilarrolle befestigten Spiegels entlehnt habe. Im Sommer 1837 habe ich darauf ein solches Instrument hergestellt und eine Reihe Versuche damit ausgeführt, die alle bewiesen, dass man die grösste Feinheit in der Beobachtung der elektrodynamischen Erscheinungen mit so schwachen Strömen erreichen könne, mit denen es vorher nie gelungen war, diese Erscheinungen hervorzubringen.

Das hier zunächst zu beschreibende Instrument ist von Herrn Inspector Meyerstein in Göttingen im Jahre 1841 verfertigt, doch habe ich erst in

Leipzig Gelegenheit gefunden, ihm eine für eine grössere Messungsreihe angemessene Aufstellung zu geben.

Es besteht dieses Instrument wesentlich aus 2 Theilen: aus der *Bifilarrolle* mit Spiegel und aus dem *Multiplicator.*

Die *Bifilarrolle,* welche Fig. 2. in verticalem Durchschnitte dargestellt ist, besteht aus zwei dünnen Messingscheiben *a a* und *a′ a′* von 66,8 Millimeter

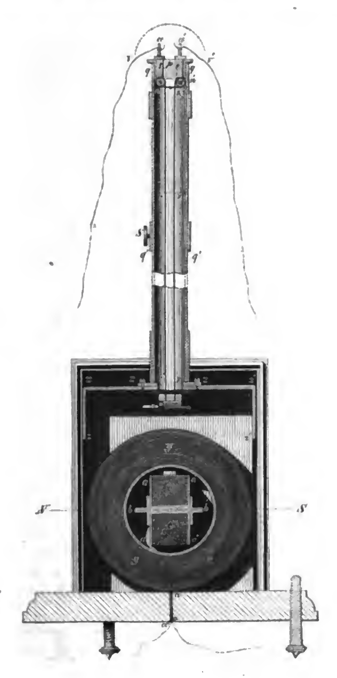


Fig. 2.

Durchmesser, welche von einer 3 Millimeter dicken messingenen Axe *bb′* in einem gegenseitigen Abstande von 30 Millimeter festgehalten werden. Auf jene Axe zwischen diesen Scheiben ist ein Kupferdraht *cc* von $\frac{4}{10}$ Millimeter Durchmesser, der mit Seide übersponnen ist, ungefähr 5000 Mal herumgewunden, und füllt den Zwischenraum zwischen beiden Scheiben ganz aus. Fig 3.

stellt die nämliche Rolle in verticalem Durchschnitte senkrecht auf den vorigen dar. Das eine Drahtende ist dicht neben der messingenen Axe durch eine kleine mit Elfenbein gefütterte Oeffnung in der einen Scheibe bei *e* Fig. 3. nach aussen von *e* nach *e'* geführt; das andere Ende ist an der Peripherie des von den Drahtwindungen gebildeten Cylinders mit seidenen Fäden bei *d* festgebunden. An dieser Drahtrolle ist nun ein Planspiegel Fig. 3. *ff'* befestigt, welcher durch drei Schrauben auf einer kleinen Messingplatte festgehalten wird;

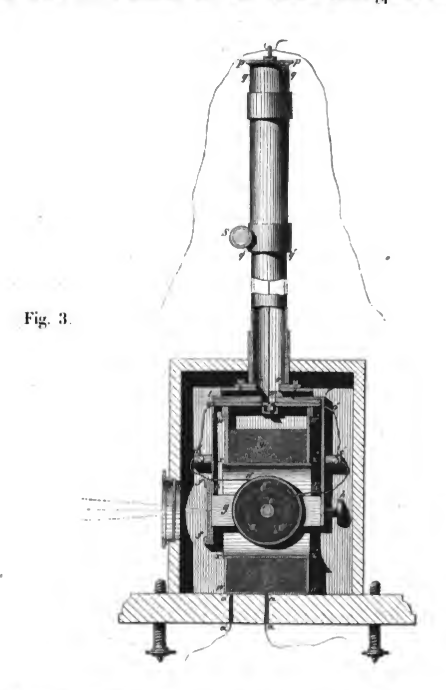
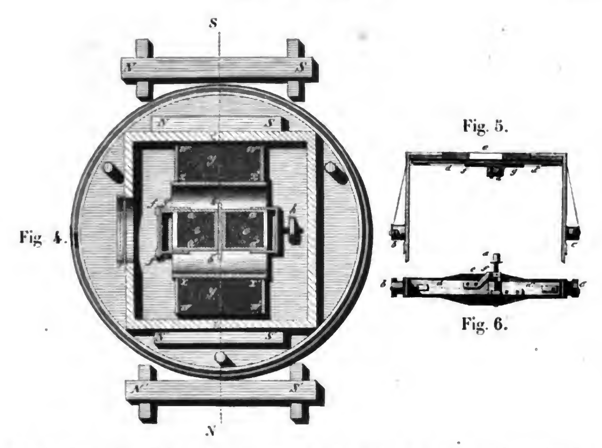


Fig. 3.

die Messingplatte ist mit zwei rechtwinklichten Fortsätzen *g*, *g'* versehen, von denen in Fig. 3. nur die hintere *g* sichtbar ist. Fig. 4., welche den horizontalen Durchschnitt giebt, zeigt beide Fortsätze in Verbindung mit der den Spiegel *ff'* tragenden Messingplatte. Diese beiden Fortsätze sind an ihren Enden auf den Aussenseiten der beiden Messingscheiben *aa* und *a'a'* angeschraubt



Der Spiegel ff befindet sich in einer der Axe bb' der Drahtrolle parallelen Ebene nahe an der Peripherie der Rolle; ihm diametral gegenüber ist ein Gegengewicht h angebracht. Ich gebrauche jetzt einen von Oertling in Berlin geschliffenen quadratischen Planspiegel von 40 Millimeter Seitenlänge.

Die *bifilare Suspension* dieser Drahtrolle besteht aus drei Theilen: aus dem an der Rolle befestigten Halter, aus den beiden Aufhängungsdrähten und endlich aus dem unbeweglichen Träger, woran die Drähte hängen. Der *Halter* besteht aus einer messingenen Gabel oder einem Bügel Fig. 3. ll' mit zwei 100 Millimeter langen parallelen verticalen Armen lk und $l'k'$ in 100 Millimeter Abstand. Die Enden der beiden Arme sind an der Messingplatte, welche den Spiegel trägt und diametral gegenüber an dem Halter des Gegengewichts bei k und k' festgeschraubt. Fig. 5. stellt diesen Halter besonders dar; bei d und d' gehen die beiden von b und c kommenden Drähte unter zwei durch die Schraube a stellbaren Elfenbeinplatten weg, und gehen durch zwei Kerben an den in der Mitte sich berührenden Elfenbeinplatten, durch die Oeffnung e senkrecht in die Höhe. Fig 6. giebt die Ansicht des Halters von unten; bei f und g ist die Verbindung der Schraube a mit den beiden Elfenbeinplatten d und d' dargestellt. Die durch den Schwerpunkt der Rolle gehende Verticale geht mitten zwischen beiden Kerben durch. An jedem Arme des Bügels befindet sich endlich bei d' und e' Fig. 3. eine durch Elfenbein isolirte Klemme zur Befestigung und Verbindung eines von den beiden Enden des mit Seide umsponnenen Drahtes der Rolle mit dem untern Ende eines der beiden nicht umsponnenen Aufhängungsdrähte. Der Aufhängungsdraht wird von dieser Klemme d' oder e' durch eine kleine mit Elfenbein gefütterte Oeffnung o oder o' auf der unteren Seite des Bügels hin zu einer der beiden schon

erwähnten Kerben an den in der Mitte zusammen stossenden Elfenbeinplatten geleitet, von wo derselbe aufwärts zu den Messingröllchen bei *n* und *n'* Fig. 2. geht. Die beiden Aufhängungsdrähte sind von Kupfer, 1 Meter lang und $\frac{1}{6}$ Millimeter dick; ihr durch die Schraube *a* Fig. 6. zu regulirender Abstand beträgt gewöhnlich etwa 3 bis 4 Millimeter.

Der *Träger*, an welchem die beiden obern Enden der beiden Aufhängungsdrähte befestigt sind, besteht in einem starken Stück Elfenbein *p* (Fig. 2.), welches wie ein Deckel auf das obere Ende einer 30 Millimeter weiten Messingröhre *qq'* fest aufgepasst ist. Diese Messingröhre ist 150 Millimeter lang und lässt sich auf einer zweiten Messingröhre *rr'* auf- und abschieben, drehen und durch eine Klemmschraube *s* (Fig. 3.) feststellen. Diese beiden Röhren umgeben die beiden Aufhängungsdrähte ihrer ganzen Länge nach und schützen sie vor dem Einflusse der Luft. Auf der untern Seite des Elfenbeinstücks sind zwei schiebbare und mit Klemmschrauben *u*, *u'* am Elfenbein befestigte messingene Röllchen *t*, *t'* (Fig. 2.) von 10 Millimeter Durchmesser angebracht, über jedes dieser Röllchen ist ein Aufhängungsdraht geführt und endigt mit einem Oes. Die beiden Oese der beiden Drahtenden sind mit einem starken seidenen Faden zwischen *t* und *t'* zusammengebunden, ohne einander zu berühren. Durch diese beiden Röllchen und durch die Verbindung der beiden Drähte wird bewirkt, dass die beiden Aufhängungsdrähte stets gleiche Spannung haben. An jede der beiden Klemmen *u*, *u'*, welche die beiden Röllchen an das Elfenbein befestigen, ist endlich ein übersponnener Kupferdraht befestigt, von denen der eine *uv* Fig. 2. zur Zuleitung, der andere *u'v'* zur Ableitung des galvanischen Stroms dient.

Der *Multiplicator* endlich besteht aus zwei quadratischen Messingplatten *ww* und *w'w'* (Fig 3. 4.) von 140 Millimeter Seite mit einem kreisrunden Loche von 76 Millimeter Durchmesser. Diese beiden Messingplatten stehen parallel und vertical und werden durch eine messingene horizontale Röhre *xx'* von 76 Millimeter Durchmesser verbunden, durch welche sie in 70 Millimeter Abstand von einander erhalten werden. In dem Raume *yy* über dieser Röhre zwischen jenen beiden parallelen Platten ist der $\frac{7}{10}$ Millimeter dicke Multiplicatordrath ungefähr 3500 Mal aufgewunden. Die obere Seite des Multiplicators ist mit einem Messingdeckel *zzz'z'* (Fig. 2.) verschlossen, welcher darauf festgeschraubt ist und in der Mitte der oberen Seite eine kreisförmige Oeffnung hat, über welcher die Messingröhre steht, von welcher die Aufhängungsdrähte umschlossen sind. An beiden Seiten dieses Deckels sind Ausschnitte angebracht, durch welche der Bügel der Bifilarrolle frei hindurch gehen und schwingen kann. Auch ist der Raum zwischen den obersten Windungen des Multiplicatordrahtes und dem Deckel weit genug, dass jener Bügel hinreichenden Raum für seine Bewegungen findet. Der Bügel wird zuerst ohne die Bifilarrolle durchgesteckt und an den Aufhängungsdrähten befestigt und dann erst wird er an die Bifilarrolle angeschraubt. Die vorstehenden untern Ränder der beiden Messingplatten am Multiplicator stehen auf einer hölzernen Platte auf, welche durch 3 Schrauben nivellirt werden kann. In dieser hölzernen Platte sind zwei Löcher *αα* und *α'α'* (Fig. 3.), durch welche die beiden Enden des Multiplicatordrahts nach aussen geleitet werden. Das ganze

Instrument, mit Ausnahme der Messingröhre, in welcher die Aufhängungsdrähte sich befinden, ist in einem Mahagonikästchen eingeschlossen, zum Schutz gegen den Einfluss der Luft. Dieses Mahagonikästchen hat keinen Boden, sondern wird mit den ebenen Rändern der Seitenwände auf die ebene Holzplatte gestellt, durch die es von unten verschlossen wird. Auf der oberen Seite ist eine runde Oeffnung angebracht, durch welche die schon erwähnte Messingröhre hindurchgeht. Eine zweite Oeffnung ist an der vorderen Seite des Kästchens angebracht und kann mit einem Planglase verschlossen werden. Durch sie fällt das Licht der Skale auf den Spiegel der *Bifilarrolle* und wird von dort nach dem Fernrohre zurück geworfen. Das ganze Kästchen ist vertical in zwei Hälften getheilt, welche einzeln weggenommen werden können. Von der Aufstellung des Fernrohres und der Skale gilt ganz dasselbe wie beim Magnetometer. Ich werde das hier beschriebene Instrument künftig mit dem Namen *Elektrodynamometer* oder kurz *Dynamometer* bezeichnen, weil seine nächste Bestimmung ist, die von Ampère entdeckten elektrodynamischen Kräfte zu messen.

Die elektrodynamische Kraft zweier Theile einer Kette ist dem Quadrat der Stromintensität proportional.

2.

Die *Intensität* eines constanten Stroms ist durch die *Menge* Elektricität bestimmt, welche während des *Zeitmaasses* (während einer Secunde) durch einen *Querschnitt* der Kette geht. Diese Bestimmung der Intensität des Stromes ist aber nicht geeignet, um darauf eine praktische Methode zur *Messung der Stromintensitäten* zu begründen; denn dazu wären zwei Messungen erforderlich, deren eine gar nicht, die andere nicht genau ausgeführt werden kann: eine bestimmte Elektricitätsmenge lässt sich nämlich unter den obwaltenden Verhältnissen nicht genau, und die Zeit, in welcher sie durch den Querschnitt des Leitungsdrahts fliesst, gar nicht abmessen. Für die wirkliche Anwendung ist es daher nothwendig, eine andere Methode zur Messung der Stromintensitäten zu Hülfe zu nehmen. Eine solche dem Bedürfnisse ganz entsprechende Methode bietet sich in den *magnetischen Wirkungen* der Ströme dar und soll hier immer zum Grunde gelegt werden. Zwei Ströme, welche successive durch denselben Multiplicator geleitet auf den nämlichen unveränderlichen Magnet in gleicher Entfernung und Lage dieselbe Kraft ausüben, besitzen hiernach gleiche Intensität; üben sie verschiedene Kräfte aus, so verhalten sich ihre Intensitäten wie diese Kräfte, welche mit Hülfe der gewöhnlichen *Galvanometer* gemessen werden können.

Lässt man nun durch die nämliche Kette successive verschiedene Ströme gehen, deren Intensitäten dieser Messung gemäss sich verhalten wie 1 : 2 : 3 u. s. w., so sollen die elektrodynamischen Wechselwirkungen zweier Theile der Kette, durch welche diese verschiedenen Ströme gehen, sich der Reihe

nach wie die Quadrate jener Intensitäten, d. h. wie 1 : 4 : 9 u. s. w., verhalten. Die Richtigkeit dieses Satzes soll nun durch die folgenden elektrodynamischen Messungen bewiesen werden, die auch dann noch, wenn obiger Satz keines Beweises bedürfte, einiges Interesse insofern haben würden, als sie ein erstes Beispiel von der Schärfe gäben, welche man bei elektrodynamischen Messungen überhaupt zu erreichen vermag.

Das im vorigen Artikel beschriebene *Dynamometer* wurde auf einer steinernen Fensterbank, in deren nächster Umgebung kein Eisen und kein Magnet sich befand, so aufgestellt, dass die Ebene der festen Rolle oder des Multiplicators dem magnetischen Meridiane parallel, und die Ebene der Bifilarrolle ebenfalls vertical war, aber einen rechten Winkel mit der Ebene des Multiplicators bildete. Die Stellung des Multiplicators liess sich leicht berichtigen, indem man mit hinreichender Schärfe die verticale Stellung durch eine Dosenlibelle prüfen konnte, die auf den Deckel des Multiplicators gesetzt wurde, und darauf die Orientirung durch eine ebenfalls auf den Deckel des Multiplicators gestellte Boussole bewerkstelligte. Die Bifilarrolle stellte sich von selbst durch ihre Aufhängung vertical ein, dass aber die Ebene der Bifilarrolle einen rechten Winkel mit dem magnetischen Meridian bildete, musste durch besondere Versuche geprüft werden.

Es ist nämlich ein Beweis von dem richtigen Stande der letzteren, wenn derselbe unverändert bleibt, auch wenn man einen beliebig starken positiven oder negativen Strom durch die Bifilarrolle allein gehen lässt, weil bei irgend einer merklichen Abweichung von jenem Stande der Erdmagnetismus diese Abweichung entweder vergrössern oder verkleinern müsste. Es lässt sich auf diesem Wege auch die Grösse der Abweichung bestimmen. Eine solche Prüfung ergab nun, dass der westliche Radius der Bifilarrolle um 14 Minuten nach Norden zu drehen gewesen wäre, um die Ebene der Bifilarrolle genau senkrecht gegen den magnetischen Meridian zu stellen. Das Instrument bot keine geeigneten Mittel dar, diese kleine Correction mit Genauigkeit auszuführen, und abgesehen davon, dass eine so kleine Abweichung auf die Resultate nicht merklich einwirkt, würde die Beseitigung derselben von keinem bleibenden Nutzen gewesen sein, weil fortgesetzte Beobachtungen ergeben haben, dass die Aufhängung der Bifilarrolle am oberen Ende einer 1 Meter hohen frei stehenden Messingröhre keine Sicherheit gegen allmählig eintretende, auf einige Minuten steigende Drehungen der Bifilarrolle darbot. Nur die Aufhängung an einem isolirten festen steinernen Pfeiler würde vor solchen kleinen Abweichungen völlige Sicherheit gewähren können.

Der am westlichen Radius der Bifilarrolle befestigte Spiegel stand vertical und in der Verticalebene seiner horizontalen Normale war in ungefähr 6 Meter Entfernung ein mit Fadenkreuz versehenes Fernrohr aufgestellt. Eine Skale, wie sie zu den Magnetometern gebraucht wird, war an dem festen Statife des Fernrohrs eben so, wie bei Magnetometern angebracht. Die Messung ergab den Horizontalabstand des Spiegels von der Skale:

$$= 6018{,}6 \text{ Skalentheile},$$

woraus sich der Bogenwerth eines Skalentheils ergiebt:

$$= 17''136$$

Nach dieser Aufstellung des Dynamometers zur Messung der elektrodynamischen Wechselwirkung des Multiplicators und der Bifilarrolle, wenn durch dieselben ein galvanischer Strom geleitet wurde, bedurfte es nun noch zur vorliegenden Untersuchung einer *elektromagnetischen* Vorrichtung für die Intensitätsmessung des Stroms.

3.

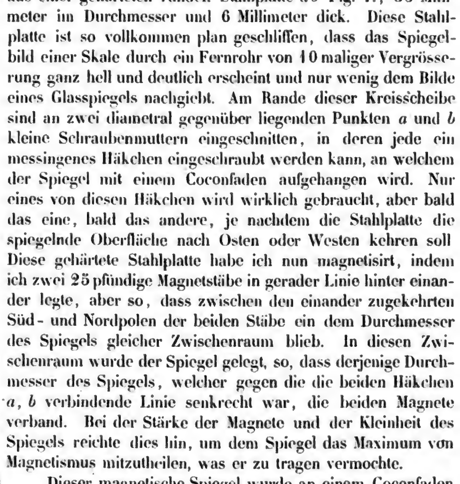
Beschreibung einer elektromagnetischen Vorrichtung zur Intensitätsmessung galvanischer Ströme, welche durch das Dynamometer geleitet werden.

Die Intensitätsmessung der galvanischen Ströme, welche durch das Dynamometer geleitet wurden, hätte leicht durch eine zu feinen Messungen eingerichtete sogenannte Sinus- oder Tangenten-Boussole bewerkstelligt werden können, wenn dieselbe in grösserer Entfernung von dem Dynamometer aufgestellt, und derselbe Strom, der durch letzteres ging, auch durch den Multiplicator jener Boussole geleitet worden wäre. Diese Ableitung des galvanischen Stroms kann entbehrt werden, wenn man ein kleines (transportables) Magnetometer im magnetischen Meridiane des Dynamometers in solcher Entfernung von dem letztern aufstellt, dass die feste Rolle des Dynamometers selbst eine noch auf feine Bruchtheile messbare Ablenkung des Magnetometers hervorbringt. Es wurde hierzu eine Entfernung von 583,5 Millimeter als angemessen ermittelt. Es leuchtet von selbst ein, dass bei einer so mässigen Entfernung die Anwendung eines grossen Magnetometers (mit 600 Millimeter langer Nadel) unangemessen gewesen wäre, da es im vorliegenden Falle von wesentlichem Nutzen war, die Vertheilung des Magnetismus im Magnetometer auf einen möglichst kleinen Raum zu beschränken. Dies findet bei dem kleinen oder transportabeln Magnetometer statt, welches ich in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838» beschrieben habe.

Ich habe jedoch dazu ein anderes Instrument eingerichtet, welches diesem Zwecke noch vollkommner entsprochen hat, und werde dasselbe hier beschreiben, weil es nicht allein oft mit Vortheil die Stelle des transportabeln Magnetometers ersetzen kann, sondern auch zu anderen Zwecken, insbesondere zu thermomagnetischen Messungen, ein oft genaueres Hülfsmittel, als die bisher angewendeten, darbietet. Es ist bekannt, welche Vortheile es gewährt, zu solchen Messungen statt der Boussole mit Zeiger und Gradbogen, eine mit Spiegel versehene Nadel mit Fernrohr und Skale zu gebrauchen. Nur findet die Anwendung des Spiegels bei kleinen Nadeln Bedenken, weil er eine träge Masse ist, welche von der Nadel mit fortgezogen werden muss, woraus folgt, dass, wenn eine kleine Nadel einen grössern Spiegel mit fortziehen muss, die beschleunigende Kraft sehr geschwächt wird, was der Schärfe der damit zu machenden Messungen eben so nachtheilig ist, wie wenn man eine schwach magnetisirte Nadel gebrauchte. Dieser Nachtheil lässt sich aber von Grund

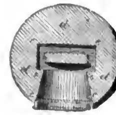
aus heben, wenn man einen *magnetischen Spiegel* anwendet, und diesen Spiegel selbst als Magnetnadel an einem Coconfaden aufhängt. Einen solchen Spiegel habe ich von Herrn Mechanikus Oertling in Berlin erhalten. Er besteht aus einer gehärteten runden Stahlplatte *ab* Fig. 7., 35 Millimeter im Durchmesser und 6 Millimeter dick. Diese Stahlplatte ist so vollkommen plan geschliffen, dass das Spiegelbild einer Skale durch ein Fernrohr von 10 maliger Vergrösserung ganz hell und deutlich erscheint und nur wenig dem Bilde eines Glasspiegels nachgiebt. Am Rande dieser Kreisscheibe sind an zwei diametral gegenüber liegenden Punkten *a* und *b* kleine Schraubenmuttern eingeschnitten, in deren jede ein messingenes Häkchen eingeschraubt werden kann, an welchem der Spiegel mit einem Coconfaden aufgehangen wird. Nur eines von diesen Häkchen wird wirklich gebraucht, aber bald das eine, bald das andere, je nachdem die Stahlplatte die spiegelnde Oberfläche nach Osten oder Westen kehren soll. Diese gehärtete Stahlplatte habe ich nun magnetisirt, indem ich zwei 25 pfündige Magnetstäbe in gerader Linie hinter einander legte, aber so, dass zwischen den einander zugekehrten Süd- und Nordpolen der beiden Stäbe ein dem Durchmesser des Spiegels gleicher Zwischenraum blieb. In diesen Zwischenraum wurde der Spiegel gelegt, so, dass derjenige Durchmesser des Spiegels, welcher gegen die die beiden Häkchen *a*, *b* verbindende Linie senkrecht war, die beiden Magnete verband. Bei der Stärke der Magnete und der Kleinheit des Spiegels reichte dies hin, um dem Spiegel das Maximum von Magnetismus mitzutheilen, was er zu tragen vermochte.

Fig. 7.



Dieser magnetische Spiegel wurde an einem Coconfaden *ac* Fig. 7. aufgehangen und in Schwingung gesetzt. Der Schwingungsbogen nahm dabei nur sehr langsam ab, so, dass die Schwingungen noch nach $\frac{1}{4}$ Stunde beobachtet werden konnten, ohne dass er einen neuen Anstoss in der Zwischenzeit erhalten hätte. Seine Schwingungsdauer war aber zu klein, als dass man die Standbeobachtungen hierbei nach den für grössere Magnetometer gegebenen Regeln ausführen konnte, indem man Maximum und Minimum des Schwingungsbogens mehrmals hinter einander beobachtete. Zur genauen Beobachtung des mittleren Standes des Spiegels war es daher ein wesentliches Bedürfniss, die Schwingungen des Spiegels kräftig zu dämpfen und den Spiegel in möglichst kurzer Zeit in vollkommene Ruhe zu bringen, ohne dadurch auf den Stand selbst irgend einen Einfluss zu üben. Diesem wesentlichen Bedürfnisse beim Gebrauche eines solchen magnetischen Spiegels habe ich auf das vollkommenste dadurch Genüge geleistet, dass ich eine solide Kupferkugel *ddd* Fig. 8. von 90 Millimeter Durchmesser anfertigen liess. Von der einen Seite wurde in diese Kugel ein Loch *eeee* von 40 Millimeter Durchmesser, 70 Millimeter tief eingedreht, und die-

Fig. 8.



ses Loch konnte mit einem Planglase verschlossen werden. Dieses Loch war an seinem hinteren Ende für den magnetischen Spiegel etwas erweitert, und erweiterte sich auch nach aussen trichterförmig um dem Lichte zum Spiegel mehr Zugang zu geben. In dem hinteren erweiterten Raume *eeee* schwebt der magnetische Spiegel, den man Fig. 8. *ns* im horizontalen rectangulären Durchschnitte sieht. Zu diesem erweiterten Raume führte von oben herab eine 8 Millimeter breite, 40 Millimeter lange Spalte *ffff* Fig. 7., durch welche der an einem Coconfaden aufgehangene Spiegel zur Mitte der Kugel herunter gelassen werden konnte. Der Coconfaden war durch eine Messingröhre *gggg* geführt, deren unteres Ende mit Hülfe einer Messingplatte *hh*, welche die Mündung der Spalte *ff* an der Kugel bedeckte, auf der Kugel aufgeschraubt wurde. In dieser Messingröhre befand sich noch eine zweite Auszugsröhre *kkkk*, und letztere trug am oberen Ende einen drehbaren Torsionskreis *ll* mit einem Häkchen bei *c*, an welchem der Coconfaden angeknüpft wurde. Durch die Auszugsröhre konnte der Faden gehoben werden, bis der Spiegel im Centro der Kupferkugel frei schwebte. Alsdann wurde die Auszugsröhre durch eine Druckschraube *m* festgestellt Zur Aufstellung dieser Kupferkugel diente ein einfacher Messingring *nnnn* von 20 Millimeter Höhe, 70 Millimeter Durchmesser und 2 Millimeter Dicke, welcher auf das Postament gesetzt und in welchen die Kupferkugel hineingestellt wurde. Zur Nivellirung des Instrumentes wurde eine kleine Dosenlibelle auf den Torsionskreis gesetzt und darauf die Kupferkugel im Ringe so lange gedreht, bis die Libelle richtig einstand, was mit grosser Leichtigkeit und Genauigkeit sich ausführen liess. Durch ihr grosses Gewicht lag die Kupferkugel in dem Ringe so fest, dass nie eine Verrückung bemerkt worden ist.

Die Wirkung dieser starken Kupferkugel auf den schwingenden Spiegel besteht nun in einer *magnetoelektrischen* Dämpfung, vermöge welcher der vorhergehende Schwingungsbogen zum nachfolgenden wie 11 : 7 sich verhält (das *decrementum logarithmicum* war = 0,19697), so, dass nach 16 Schwingungen oder etwa 1 Minute (die Schwingungsdauer betrug nämlich bei dieser Dämpfung 3,78 Secunden), der Schwingungsbogen etwa nur $\frac{1}{1400}$ seiner ursprünglichen Grösse beträgt, also unmerklich geworden ist. Bei constanten Strömen reicht es daher in der Regel hin, 1 Minute nach Eintritt des Stromes verlaufen zu lassen, ehe man den abgelenkten Stand des Spiegels beobachtet.

Sollen solche Ablenkungsversuche nicht blos einen relativen, sondern absoluten Werth erhalten, so darf nach der von Gauss in der *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata* gegebenen Vorschrift der ablenkende Magnet oder Strom höchstens auf einen Abstand genähert werden, welcher das 3- oder 4fache der Nadellänge beträgt, wofür in unserm Falle das 3- oder 4fache des Spiegeldurchmessers zu setzen ist, d. i. 105 bis 140 Millimeter, in welcher geringen Entfernung selbst sehr schwache Ströme eines Multiplicators hinreichen, um scharf messbare Ablenkungen des Spiegels hervorzubringen. Wenn nun schon 105 oder 140 Millimeter eine genügende Entfernung des Multiplicators sein würde, um den Messungen der Ablenkung einen absoluten Werth zu geben, so findet dies noch weit mehr bei einer Entfernung von 583,5 Millimeter statt, in welcher der Multiplicator vom Spiegel

bei unsern Versuchen sich befand. Die gegenseitige Stellung der beiden Instrumente, des Dynamometers und des Spiegelmagnetometers, ist Fig. 9. dargestellt, wo die punktirte Linie *NS* der magnetische Meridian ist, welcher durch beide Instrumente geht; *A* ist der horizontale Durchschnitt des Dynamometers, gleichwie Fig. 4.; *B* ist der horizontale Durchschnitt des Spiegelmagnetome-

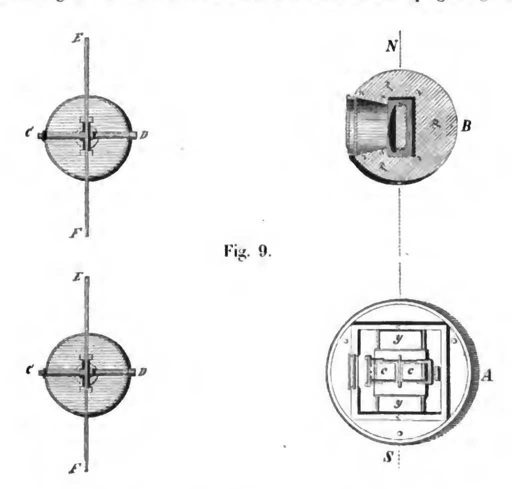


Fig. 9.

ters, ebenso wie Fig. 8., *CD* sind die auf die Spiegel beider Instrumente gerichteten Ablesungsfernröhre; *EF* sind die zugehörigen Skalen, deren Spiegelbild beobachtet wird. Ueber die Anwendung des Spiegelmagnetometers zu thermomagnetischen Beobachtungen, wozu noch einige besondere Vorrichtungen zu treffen sind, soll bei einer andern Gelegenheit gehandelt werden.

4.

Nach dieser Beschreibung der wesentlichen Einrichtungen, welche zur *elektromagnetischen* Messung der Intensität der Ströme und zur *elektrodynamischen* Messung der Wechselwirkung zweier Theile der Kette getroffen waren, wollen wir, ehe wir zur Beschreibung der Versuche selbst übergehen, noch eine Bemerkung über die Hervorbringung und Regulirung der Ströme vorausschicken, welche dabei benutzt wurden.

Es wurden dazu benutzt drei kleine Grove'sche Becher von Hrn. Mechanikus K l e i n e r t in Berlin, die entweder alle 3, oder nur 2 säulenartig ver-

bunden, oder endlich einzeln in die Kette gebracht wurden. Trotz dem, dass diese Ströme durch eine sehr lange und dünne Drathkette geleitet wurden, welche die Bifilarrolle und den Multiplicator des Dynamometers bildeten, die sogar noch durch einen langen Hülfsdraht vergrössert wurde, so blieben doch diese Ströme selbst bei der grossen Schwächung, welche sie durch den grossen Widerstand einer solchen Kette erlitten, viel zu stark und lenkten das Dynamometer von seiner Gleichgewichtslage viel zu weit ab, als dass diese Ablenkung mit der 1 Meter langen Skale hätte gemessen werden können. Dagegen war die Intensität dieser Ströme im Multiplicator ganz geeignet, um eine scharf messbare Ablenkung des Spiegelmagnetometers hervorzubringen Es musste daher die Ablenkung der Bifilarrolle in einem constanten Verhältnisse verkleinert werden, ohne die Intensität des Stromes im Multiplicator des Dynamometers zu vermindern. Es konnte dies auf doppelte Weise geschehen, entweder dadurch, dass die Aufhängungsdrähte der Bifilarrolle von einander mehr entfernt wurden, wodurch die Empfindlichkeit des Dynamometers in einem constanten Verhältnisse vermindert worden wäre, oder es konnte durch eine Theilung des Stromes bewirkt werden, dass von dem ganzen Strome, welcher durch den Multiplicator des Dynamometers ging, nur ein kleiner Bruchtheil durch die Bifilarrolle geführt wurde. Ich habe der letzteren Methode den Vorzug gegeben, um dem Dynamometer seine Empfindlichkeit zu erhalten, welche für andere Versuche nothwendig war. Durch einen kurzen und dicken Kupferdraht, welcher vv' Fig. 2. punktirt angedeutet ist, wurde dem Strome, ehe er in die Bifilarrolle eintrat, ein Steg oder eine Brücke gebauet, auf welcher er ausserhalb der Bifilarrolle direct zu dem aus der Bifilarrolle wieder zurückkehrenden Drahte geführt wurde. Eine genaue Vergleichung des Widerstandes dieses Verbindungsdrahtes mit dem der Bifilarrolle, hatte das Verhältniss

$$1 : 245{,}26$$

ergeben, woraus nach den Ohmschen Gesetzen folgt, dass die Stromintensität in der Bifilarrolle nach dieser Theilung zu der Stromintensität im Multiplicator des Dynamometers in dem constanten Verhältnisse von

$$1 : 246{,}26\ ^{*})$$

stand, wodurch also, ohne die Ablenkung des Spiegelmagnetometers durch den Multiplicator des Dynamometers zu vermindern, die Ablenkung des Dynamometers selbst 246,26 Mal verkleinert wurde. Diese 246,26 Mal verkleinerte Ablenkung des Dynamometers konnte dann an der Skale scharf gemessen werden, der Strom mochte von 3, 2 oder nur von 1 Grove'schen Becher ausgehen.

---

*) Denn bezeichet a die Intensität des ganzen ungetheilten Stroms, wie er durch den Multiplicator geht, b und c die Intensität der beiden Ströme, in welche jener sich theilt, von denen b durch die Bifilarrolle, c durch den Hülfsdrath vv' Fig. 2. geht, welcher Anfang und Ende der Bifilarrolle verknüpft; so ist $a = b + c$, und dem Ohmschen Gesetze gemäss verhalten sich die Intensitäten $b:c$ umgekehrt wie die gemessenen Widerstände, d. i.

$$b : c = 1 : 245{,}26;$$

folglich

$$b : a = b : b + c = 1 : 246{,}26.$$

Es sind auf solche Weise nun die in folgender Tafel enthaltenen Messungen gemacht worden.

Tafel correspondirender Stände des Spiegelmagnetometers und Dynamometers unter Einwirkung von Strömen von verschiedener Intensität.

Nr.	Zahl der Grove-schen Becher.	Beobachteter Stand des Magnetometers.	Beobachteter Stand des Dynamometers.
1.	3	388,17	650,88
2.	0	279,74	209,79
3.	3	388,30	650,66
4.	0	279,68	209,47
5.	3	388,37	650,07
6.	0	280,05	209,70
7.	3	388,73	649,84
8.	0	279,95	209,55
9.	3	388,35	649,78
10.	0	279,78	209,53
11.	3	388,30	649,71
Mittlere Ablenkung.	3 — 0	108,566	440,508
12.	0	279,54	209,25
13.	2	352,15	407,52
14.	0	280,00	208,99
15.	2	352,35	407,35
16.	0	280,00	208,82
17.	2	352,50	407,18
18.	0	280,15	208,87
19.	2	352,60	407,15
20.	0	280,17	208,92
21.	2	352,95	406,89
22.	0	280,40	208,80
Mittlere Ablenkung.	2 — 0	72,438	198,305
23	0	280,40	208,80
24.	1	316,77	259,68
25.	0	280,50	208,72
26.	1	216,93	259,53
27.	0	280,60	208,68
28.	1	316,90	259,50
29.	0	280,50	208,45
30.	1	316,85	259,38
31.	0	280,60	208,43
32.	1	316,90	259,35
33.	0	280,55	208,33
Mittlere Ablenkung.	1 — 0	36,332	50,915

Dieser Tafel sind folgende Erläuterungen beizufügen: 1) Während aller dieser Versuche sind die Leitungsverhältnisse immer die nämlichen geblieben, so dass die Verhältnisse der Stromintensitäten in allen Theilen der Kette immer die nämlichen waren. 2) Die correspondirenden Beobachtungen am Magnetometer und Dynamometer sind immer von zwei verschiedenen Beobachtern an beiden Instrumenten gleichzeitig angestellt worden. Die Beobachter waren ausser mir Hr. Dr. Stähelin aus Basel, und mein Assistent Hr. Dietzel. 3) Jede einzelne in der Tafel verzeichnete Beobachtung des Dynamometers ist nicht eine einfache Ablesung, sondern es liegen jeder solchen Beobachtung 7 Ablesungen zum Grunde: es wurde nämlich bei der stattfindenden Schwingung abwechselnd der höchste und niedrigste Stand abgelesen und die 6 Mittel aus je zwei zunächst auf einander folgenden Ablesungen genommen; die aus zwei solchen zunächst auf einander folgenden Mitteln wiederum gezogenen 5 zweiten Mittel wurden als partielle Resultate betrachtet und der Mittelwerth von diesen 5 partiellen Resultaten in die Tafel eingetragen. 4) Zwischen je zwei Beobachtungen des abgelenkten Standes wurde die Kette gelöst, um den natürlichen Stand zu beobachten, wie derselbe ohne galvanische Einwirkung war, weil dieser Stand, wenn auch sehr langsam, sich doch merklich mit der Zeit änderte. Diese Lösung der Kette ist in der Columne, welche die Becherzahl angiebt, durch 0 angedeutet. 5) Die von 11 zu 11 Beobachtungen in der Tafel angegebenen Mittelwerthe der Ablenkung sind aus den 11 vorausgehenden Beobachtungen abgeleitet worden, indem die 10 Unterschiede aus je zwei auf einander folgenden Beobachtungen bei geschlossener und gelöster Kette, und aus je zwei solchen zunächst auf einander folgenden Unterschieden die 9 Mittel genommen wurden, von welchen, als partiellen Resultaten, das Generalmittel in der Tafel angegeben ist. 6) Was endlich das Magnetometer betrifft, so ist der horizontale Abstand des Spiegels von der Skale während der in dieser Tafel enthaltenen Versuche zu bemerken, weil er später häufig geändert werden musste: er betrug 1251 Skalentheile. 7) Die 11 Beobachtungen, aus denen die mittleren Ablenkungen des Magnetometers und Dynamometers berechnet worden sind, geben einen Beweis von der Genauigkeit der Messung; denn man sieht, dass die 5 oder 6 Wiederholungen der bei geschlossener und bei gelöster Kette gemachten Versuche, welche sie enthalten, immer bis auf einen Bruch eines Skalentheiles übereinstimmen, wobei zu bemerken ist, dass auch diese kleinen Differenzen ihrem Hauptheile nach in wirklichen Veränderungen der Stromintensität, ferner beim Magnetometer in den während der Versuche eingetretenen Declinationsvariationen, und in einer beim Dynamometer merklichen, nicht vollkommen festen und unveränderlichen Aufstellung ihren Grund hatten.

Die Resultate aller dieser Versuche lassen sich kurz in den zusammengehörigen Mittelwerthen der Ablenkung des Magnetometers und Dynamometers durch den Strom von 3, 2 und 1 Grove'schen Becher übersehen, nämlich:

	Mittlere Ablenkung des Magnetometers	Mittlere Ablenkung des Dynamometers
für 3 Becher	108,566	440,508
- 2 -	72,438	198,305
- 1 -	36,332	50,915

Diese Zahlen sind den katoptrischen Gesetzen gemäss den Tangenten der doppelten Ablenkungswinkel proportional und sollen auf die Tangenten der einfachen Ablenkungswinkel reducirt werden, welche das Maass der ablenkenden Kräfte geben, wobei noch ein kleiner Einfluss der Excentricität der Spiegel zu berücksichtigen ist. Die hieraus hervorgehenden Correctionen sind:

0,14	0,47
0,04	0,05
0,00	0,00

woraus, wenn man diese Correctionen in Abrechnung bringt, nun folgende corrigirte Werthe sich ergeben, nämlich für die ablenkende Kraft

des Magnetometers	des Dynamometers
108,426	440,038
72,398	198,255
36,332	50,915

Nach dem oben zum Grunde gelegten *elektromagnetischen* Intensitätsmaasse der Ströme sind nun die Zahlen der *ersten* Columne den *Stromintensitäten* proportional, während die Zahlen der *zweiten* Columne die correspondirenden *elektrodynamischen Kräfte* geben, wonach also die Abhängigkeit der elektrodynamischen Kräfte von den Stromintensitäten sich bestimmen lässt, was der Hauptzweck dieser Versuche war. Ehe dieses geschieht, möge aber noch bemerkt werden, dass es scheinen könne, als müsse aus den Zahlen der ersten Columne noch ein geringer fremdartiger Einfluss entfernt werden, welcher nämlich von der Einwirkung der *Bifilarrolle* auf das Magnetometer herrühre. Jene Zahlen konnten nämlich nur dann als ein Maass der Stromintensität gelten, wenn das Magnetometer immer von dem nämlichen, unverrückt gebliebenen Theile der Kette abgelenkt wurde. Dieser Theil der Kette war der unverrückt stehen bleibende Multiplicator des Dynamometers. In der That befand sich dieser Multiplicator in einer solchen Lage gegen das Magnetometer, in welcher er die grösste ablenkende Kraft ausübte, während die im Multiplicator schwebende Bifilarrolle ursprünglich in eine solche Lage gebracht war, wo sie, auch wenn ein starker Strom durch sie geleitet wurde, gar keine ablenkende Kraft ausüben konnte. Nun wurde aber bei obigen Versuchen die Bifilarrolle merklich abgelenkt oder gedreht und nach dieser Drehung musste sie eine ablenkende Kraft auf das Magnetometer ausüben, weshalb obige Zahlenwerthe einer Correction bedürften, um sie der alleinigen Einwirkung des Multiplicators entsprechend zu machen. Diese Correction ist aber nur sehr gering, weil die Intensität des durch die Bifilarrolle gehenden Stroms in Folge der oben erwähnten Theilung nur den 246,26sten Theil von der Stromintensität im Multiplicator betrug. Ich habe mich versichert, dass diese Correction auch in dem Falle, wo sie am grössten war, noch unter $\frac{1}{500}$ Skalentheil blieb und daher vernachlässigt werden durfte.

Multiplicirt man nun die Quadratwurzeln aus den für die elektrodynamische Wechselwirkung beobachteten Werthen, nämlich: $\sqrt{440.038}$, $\sqrt{198,255}$, $\sqrt{50,915}$, mit dem constanten Factor

5,15534,

so erhält man nahe die für die elektromagnetische Wirkung beobachteten Werthe, man erhält nämlich der Reihe nach:

108,144
72,589
36,786,

deren Vergleichung mit den beobachteten Werthen folgende Unterschiede giebt:

— 0,282
+ 0,191
+ 0,454.

Der grösste Unterschied, welcher zwischen diesen berechneten und den direct beobachteten Werthen der elektromagnetischen Kraft vorkommt, beträgt also noch keinen halben Skalentheil, wodurch der der Rechnung zum Grunde gelegte Satz als bewiesen betrachtet werden darf, *dass die elektrodynamische Kraft zweier Theile einer Kette dem Quadrate der elektromagnetischen Kraft, mithin dem Quadrate der Stromintensität proportional sei.*

Zugleich leuchtet auch aus diesen Versuchen ein, dass die angewandte Methode elektrodynamischer Messung eine fast gleiche Schärfe und Genauigkeit gestattet, wie die Methode magnetischer Messungen mit dem Magnetometer.

Beweis des elektrodynamischen Fundamentalgesetzes aus Messungen.

5.

Nach diesen ersten Proben der mit dem beschriebenen elektrodynamischen Messinstrumente zu erreichenden Genauigkeit gehe ich sogleich zu einem System damit ausgeführter Messungen über, welches zu einer vollständigen Prüfung des elektrodynamischen Fundamentalgesetzes geeignet ist.

Ampère giebt in seiner früher genannten Abhandlung S. 181 f. zwei Methoden an, wie die Gesetze der Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte aus der Erfahrung abgeleitet werden könnten. «Die eine Weise,» sagt er, «besteht darin, zunächst mit der grössten Genauigkeit die Werthe der Wechselwirkung zweier Stücken von endlicher Grösse zu messen, indem man sie successive gegen einander in verschiedene Entfernungen und in verschiedene Lagen bringt; alsdann muss man eine Hypothese über den Werth der Wechselwirkung zweier unendlich kleiner Theile machen, daraus den Werth der Wirkung schliessen, der für die Conductoren von endlicher Grösse, mit welchen man operirt hat, daraus hervorgehe, und die Hypothese so lange modificiren, bis die Resultate der Rechnung mit denen der Beobachtung übereinstimmen.».... «Die andere besteht darin, erfahrungsmässig festzustellen, dass ein beweglicher Leiter vollkommen im Gleichgewichte bleibe zwischen gleichen Kräften oder gleichen Drehungsmomenten, wenn diese Kräfte oder diese Momente von Theilen fester Leiter herrühren, deren Gestalt und Grösse auf irgend eine Weise verändert werden können, unter Bedingungen, welche die Erfahrung bestimmt, ohne dass das Gleichgewicht gestört werde, und daraus direct durch Rechnung zu

schliessen, welches der Werth der Wechselwirkung zweier unendlich kleiner Theile sein müsse, damit das Gleichgewicht wirklich unabhängig von allen Aenderungen der Form oder der Grösse sei, welche mit jenen Bedingungen verträglich sind.»

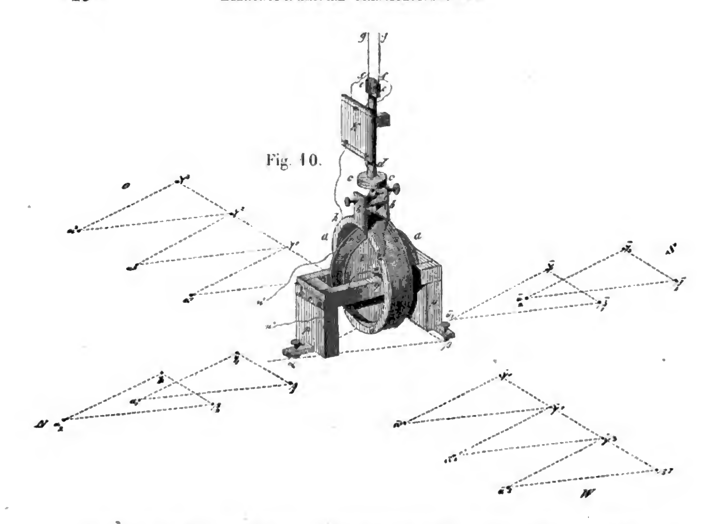
Ampère hat der letzteren Methode den Vorzug gegeben aus Gründen, unter denen der einzige schon genügt, dass er nämlich die nach der ersteren Methode unentbehrlichen Messinstrumente nicht besass. Allerdings musste unter solchen Verhältnissen die zweite Methode vorgezogen werden, welche die Ausführung wirklicher Messungen nicht nothwendig erforderte. Doch scheint die letztere Methode von Ampère überschätzt zu werden, indem er meint, dass ihr ein absoluter Vorzug vor der ersteren zukomme. Ein Instrument zu genauen Messungen setzt zweierlei voraus: 1) eine grosse Feinheit und Empfindlichkeit, welche die zu messenden Wirkungen deutlich und unabhängig von fremden, nicht zu controlirenden Einflüssen erkennen lässt; 2) eine für diese Wirkungen geeignete Messungsvorrichtung. Es leuchtet aber ein, dass die letzte Forderung sich stets leicht erfüllen lässt, wenn nur der ersteren Genüge geschehen ist, wonach also die erstere als die Hauptforderung betrachtet werden muss. Die Erfüllung dieser Hauptforderung ist aber für die zweite Methode eben so wesentlich wie für die erste, weil sie ohnedem ganz illusorisch sein würde. Der wesentliche Unterschied dieser Methoden in experimenteller Beziehung besteht also blos darin, dass man nach jener Methode den elektrodynamischen Kräften durch andere bekannte und messbare Naturkräfte das Gleichgewicht hält, während man nach der zweiten Methode solche Verhältnisse sucht, wo die elektrodynamischen Kräfte sich wechselseitig unter einander das Gleichgewicht halten. Es kann kein Zweifel sein, dass die letztere Methode, wenn sie zu sicheren und genauen Resultaten führen soll, in *experimenteller* Beziehung weniger direct und weniger einfach ist, als die erstere. Es kann daher zum Vortheil der zweiten Methode höchstens der Umstand geltend gemacht werden, dass in *theoretischer* Beziehung aus den nach dieser Methode gewonnenen Resultaten die Fundamentalgesetze leichter und directer abgeleitet werden können, was aber nicht mehr in Betracht kommt, wenn die zu prüfenden Fundamentalgesetze schon vollständig vorliegen, wie dies durch Ampère's Verdienst im vorliegenden Falle statt findet. Wir werden hierdurch in den Stand gesetzt, ein sehr einfaches System von Messungen auszuführen, welches den Forderungen Genüge leistet.

Die beiden Leitungsdrähte, welche wechselseitig auf einander wirken, sollen Kreise bilden oder Systeme paralleler Kreise, welche eine gemeinschaftliche Axe haben und *Leitungsrollen* heissen. Diese beiden Axen sollen eine horizontale und gegen einander rechtwinkelige Lage haben, und zwar so, dass die Verlängerung der einen Axe durch den Mittelpunkt der andern Rolle geht. Die eine dieser Rollen wird fixirt, die andere ist um ihren verticalen Durchmesser drehbar. Nun kann entweder die Axe der fixirten Rolle verlängert durch den Mittelpunkt der beweglichen Rolle gehen, oder umgekehrt kann die Axe der beweglichen Rolle verlängert durch den Mittelpunkt der festen Rolle gehen. In beiden Fällen kann man Messungen bei verschiedenen Entfernungen der Mittelpunkte von einander machen. Man ersieht leicht, dass diese beiden

Arten der Anordnung der elektrodynamischen Messungen ganz denen der magnetischen Messungen entsprechen, welche Gauss in der *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata* (Commentationes Soc. regiae Scient. Gottingensis recentiores. Vol. VIII. pag. 33) gegeben hat. Wir können für die elektrodynamischen Wechselwirkungen noch eine dritte Anordnung der Messungen hinzufügen, wo die Mittelpunkte der beiden Rollen zusammenfallen, wie dies bei dem oben beschriebenen Dynamometer statt findet. Auf alle diese Fälle lässt sich das Ampère'sche Fundamentalgesetz anwenden und die Resultate daraus berechnen, um die Resultate der Beobachtung damit zu vergleichen.

Wenn die feste Rolle auf die bewegliche aus der Entfernung wirkt, so können die beiden Rollen nach Belieben gleiche oder ungleiche Durchmesser haben; wenn aber die Mittelpunkte beider Rollen zusammenfallen sollen, wie es bei dem oben beschriebenen Messinstrumente der Fall war, so muss der innere Durchmesser der einen, ringförmigen, Rolle grösser sein, als der äussere der andern, damit die erstere die letztere umschliessen kann. Bei dem oben beschriebenen Dynamometer war die bewegliche Rolle die kleinere und wurde von der festen umschlossen. Sollen endlich die drei eben angedeuteten Versuchsreihen ausgeführt werden, indem man blos die feste Rolle successive an verschiedene Stellen versetzt, ohne dass die Aufhängung der beweglichen Rolle geändert werde, was zum Zweck der genaueren Vergleichung aller Messungsresultate unter einander vortheilhaft ist, so muss die bewegliche Rolle grösser sein, damit sie die feste Rolle umschliessen könne, weil nur dann die letztere, der Aufhängungsdrähte unbeschadet, durch die bewegliche Rolle hindurch geführt werden kann. Dies ist der Grund, warum für dieses System von Messungen ein besonderer Messapparat von Herrn Mechanikus Leyser in Leipzig vorgerichtet wurde, welcher hier beschrieben werden soll.

Die *Bifilarrolle aaa* Fig 10. besteht aus einem dünnen Messingringe von $100\frac{1}{2}$ Millimeter Durchmesser und 30 Millimeter Höhe, welcher zwei parallele Messingscheiben von $122\frac{7}{10}$ Millimeter äusserem und $100\frac{1}{2}$ Millimeter innerem Durchmesser verbindet und in 30 Millimeter Abstand von einander hält. Auf jenen Messingring zwischen diesen beiden Scheiben ist ein Kupferdraht von $\frac{1}{3}$ Millimeter Durchmesser, der mit Seide übersponnen ist, ungefähr 3000 Mal herumgewunden, so dass er den Zwischenraum zwischen beiden Scheiben ganz ausfüllt. Nach Aufwindung des Drahtes wurden die beiden Messingscheiben durch eine feste messingene Klammer *bb* verbunden, welche die aufgewundenen Drähte umschliesst und in ihrer Mitte den Tonsionskreis *cc* trägt. Der Torsionskreis besteht aus zwei (bei verticaler Stellung der Bifilarrolle) horizontalen Scheiben, von denen die untere durch die messingene Klammer mit der Bifilarrolle fest verbunden ist, die obere sich auf der untern um eine verticale Axe drehen lässt. Erstere ist mit einer Kreistheilung, letztere mit einem Index versehen. Die letztere trägt einen hölzernen Zapfen *d*, welcher am oberen Ende die Gabel *ee* einer sehr beweglichen Rolle von 20 Millimeter Durchmesser hält. Unter dieser Rolle ist ein seidener Faden *ff* weggeführt, welcher zu beiden Seiten der Rolle senkrecht nach oben geht, und auf beiden Seiten, einige Millimeter über der Rolle, an den beiden Suspensionsdrähten *fg*,


Fig. 10.

fg angeknüpft ist. Zu diesen Anknüpfungspunkten f, f sind auch die beiden Enden des um die Bifilarrolle gewundenen Drahtes hf, hf geleitet, so, dass der galvanische Strom durch den einen Suspensionsdraht zum einen Ende der Bifilarrolle, und durch das andere Ende aus der Bifilarrolle in den zweiten Suspensionsdraht geleitet werden kann. Die beiden Suspensionsdrähte gehen von diesen Anknüpfungspunkten senkrecht aufwärts zur Decke, wo sie an zwei von einander isolirten messingenen Haken befestigt sind. Von diesen beiden Haken sind zwei andere Drähte wieder herabgeführt, der eine zu einem Commutator, der andere zur galvanischen Säule.

Mit Hülfe des Torsionskreises kann man der horizontalen Axe der Bifilarrolle jede beliebige Lage geben, während die Suspensionsdrähte ihre natürliche parallele Lage beibehalten. Der Torsionskreis wurde so eingestellt, dass die Axe der Bifilarrolle mit dem magnetischen Meridiane NS zusammenfiel, so, dass der Erdmagnetismus den Stand der Bifilarrolle nicht änderte, wenn ein galvanischer Strom durch letztere hindurchging.

An dem hölzernen Zapfen am Torsionskreise wurde ein verticaler Planspiegel k befestigt, auf welchen aus etwa $3\frac{3}{10}$ Meter Entfernung ein Fernrohr mit Fadenkreuz gerichtet wurde, um damit das Bild einer nahe beim Fernrohr aufgestellten horizontalen Skale zu beobachten.

Die *feste Rolle lll* Fig. 10. besteht aus zwei dünnen parallelen Messingplatten von $88\frac{8}{10}$ Millimeter Durchmesser, welche von einer $5\frac{1}{2}$ Millimeter

dicken messingenen Axe m in 30 Millimeter Abstand von einander festgehalten werden. Diese messingene Axe geht durch die beiden Platten hindurch und ragt auf beiden Seiten 10 Millimeter hervor. Auf dieselbe Axe zwischen beiden Scheiben ist ein Kupferdraht von $\frac{1}{3}$ Millimeter Durchmesser, der mit Seite übersponnen ist, ungefähr 10000 Mal herumgewunden, so, dass er den Zwischenraum zwischen beiden Scheiben ganz ausfüllt. Das eine Ende dieses Drahtes ist dicht an der Axe durch eine kleine mit Elfenbein gefütterte Oeffnung bei m in der einen Scheibe, von m nach n, nach aussen geführt, das andere Ende ist an der Peripherie der Rolle bei m' mit seidenen Fäden festgebunden und geht von m' nach n' nach aussen. Das eine Drahtende $n'n'$ wurde zum Commutator A Fig. 11. geleitet, das andere nn zum Multiplicator B Fig. 11. eines Galvanometers.

Zur festen Aufstellung dieser Rolle dient ein kleines hölzernes Gestell pp Fig. 10. welches zwei Pfannen q darbietet, auf welche die vorragenden Theile der Axe aufgelegt werden. Dieses Gestell steht auf drei Füssen, welche mit Schraubenspitzen α, β, γ zum Nivelliren versehen sind. Der eine dieser Füsse ist mit einem Charnier r versehen und kann so zurückgeschlagen werden, dass man ihn sammt einem Theile des Gestelles und der festen Rolle durch die Bifilarrolle frei hindurchführen und dann wieder niederschlagen kann. Die feste Rolle kommt dann in dem Mittelpunkte der Bifilarrolle zu stehen, und das Gestell ruhet alsdann, mit zwei Füssen diesseits, mit dem dritten Fusse jenseits der Bifilarrolle, auf dem festen Tische, welcher dicht unter der Bifilarrolle sich befindet.

Auf der ebenen horizontalen Tischplatte sind die Stellen genau im voraus bezeichnet, wo die feste Rolle successive aufgestellt werden soll. Es werden nämlich die drei Schraubenspitzen, welche bei concentrischer Aufstellung der beiden Rollen auf den Punkten α, β, γ der Tischplatte stehen, so versetzt, dass sie entweder im *Norden* in den Punkten $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ oder $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ u. s. w., oder im *Süden* in den Punkten $\bar{\alpha}_1\ \bar{\beta}_1\ \bar{\gamma}_1$ oder $\bar{\alpha}_2\ \bar{\beta}_2\ \bar{\gamma}_2$ u. s. w., oder im *Osten* in den Punkten $\alpha^1\beta^1\gamma^1$ oder $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ oder $\alpha^3\beta^3\gamma^3$ u. s. w., oder im *Westen* in den Punkten $\bar{\alpha}^1\ \bar{\beta}^1\ \bar{\gamma}^1$ oder $\bar{\alpha}^2\ \bar{\beta}^2\ \bar{\gamma}^2$ oder $\bar{\alpha}^3\ \bar{\beta}^3\ \bar{\gamma}^3$ u. s. w. zu stehen kommen. Die Bifilarrolle ist zum Schutz gegen den Einfluss der Luft mit einem hölzernen Gehäuse umgeben, in welchem ein Planglas eingesetzt ist, durch welches das Licht von der Skale auf den Spiegel und von da zurück ins Fernrohr fallen kann. Das Gehäuse besteht aus zwei Theilen, die einzeln entfernt werden können, wenn die feste Rolle im Mittelpunkte der beweglichen aufgestellt werden soll.

Um nun ein mit diesem Instrumente ausgeführtes System elektrodynamischer Messungen unter einander vergleichbar zu machen, war es nothwendig, unabhängig hiervon die Intensität des Stromes zu messen, welcher bei jeder Messung durch die beiden Rollen geführt wurde. Hierzu liess sich aber nicht die oben Art. 3. beschriebene Einrichtung anwenden, wegen der von einer Messung zur andern vorzunehmenden Verstellung der festen Rolle. Es wurde daher das eine Ende nn des um die feste Rolle gewundenen Drahtes mit einer dritten Drahtrolle B Fig. 11. verbunden, welche aus 618 parallelen Umwindungen, welche zusammen eine Fläche von 8313440 Quadratmillimetern um-

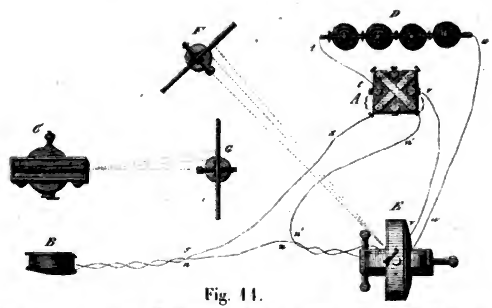


Fig. 11.

schlossen, bestand, und 217 Millimeter westlich von einem transportabelen, von dem Dynamometer 8 Meter weit entfernten Magnetometer *C* Fig. 11. aufgestellt war und mit demselben zusammen ein *Galvanometer* bildete. Diese dritte Drahtrolle wurde endlich mit ihrem anderen Ende *ss* mit dem Commutator *A* Fig. 11. in Verbindung gebracht, zu welchem auch der eine Leitungsdraht *tt* der galvanischen Säule *D* führte.

Fig. 11. giebt eine deutliche Darstellung von der Anordnung und Verbindung der verschiedenen Theile des Apparates unter einander. Es möge dabei bemerkt werden, dass die beiden Drahtenden der festen Rolle, so weit sie in der Nähe der Bifilarrolle sich befanden, um einander gewunden waren, so, dass die entgegengesetzten Ströme, von denen sie durchlaufen wurden, keinen Einfluss auf die Bifilarrolle hatten. *E* stellt hier das Dynamometer im Grundrisse dar, *F* das zugehörige Ablesungsfernrohr nebst Skale; *C* stellt das Magnetometer im Grundrisse dar und *G* das zugehörige Ablesungsfernrohr nebst Skale; *B* ist die Multiplicatorrolle, durch welche derselbe galvanische Strom wie durch das Dynamometer geleitet wird, und die aus der Ferne auf die Nadel des Magnetometers *C* wirkt, deren Ablenkung vom magnetischen Meridian gemessen wird, um dadurch die Intensität des angewendeten Stroms und deren Variationen während der Versuche zu bestimmen.

Die galvanische Säule, welche zu diesen Versuchen gebraucht wurde, bestand aus 8 Bunsenschen Kohlenbechern. Die Richtung dieses Stromes blieb im Drahte der Bifilarrolle des Dynamometers *E* immer die nämliche, und wurde, wie aus der Stellung des Commutators *A* einleuchtet, durch den Wechsel des Commutators blos in der festen Rolle des Dynamometers *E* und in der dritten Rolle *B*, welche die Stelle des Multiplicators beim *Galvanometer* vertrat, umgekehrt. Dass der Strom in der Bifilarrolle seine Richtung immer beibehielt, war nöthig, um den Einfluss des Erdmagnetismus zu eliminiren. Die Umkehrung des Stromes in der festen Rolle war dazu nöthig, um durch die Wirkung dieser festen Rolle auf die Bifilarrolle das nördliche Ende der Axe dieser Rolle abwechselnd östlich und westlich abzulenken und durch wiederholte Messung dieser positiven und negativen Ablenkungen diese Wirkung mit

grösserer Schärfe zu bestimmen. Denselben Zweck hatte die Umkehrung des Stromes in der dritten Rolle in Beziehung auf die Ablenkung des Magnetometers, welche zur Bestimmung der Stromintensität diente. Dieser Zweck wird durch die beschriebene Einrichtung, mit Hülfe des Commutators *A*, erreicht; denn die Richtung des Stroms bleibt in der Säule *D* und in allen denjenigen Theilen der Kette, welche die Säule *D* mit dem Commutator *A* verbinden, stets dieselbe, nämlich im Drahte *tt*, in der Säule *D*, im Drahte *uu*, in der *Bifilarrolle* des Dynamometers *E* und im Drahte *vv*; dagegen kann die Richtung des Stroms durch den Commutator *A* in allen denjenigen Theilen der Kette gewechselt werden, welche durch den Commutator *A* von der Säule *D* geschieden sind, nämlich in dem Drahte *n'n'*, in der *festen Rolle* des Dynamometers *E*, in dem Drahte *nn*, in der Multiplicatorrolle *B* und in dem Drahte *ss*.

Die Schwingungsdauer der Bifilarrolle ohne Strom war = 13″3259. Der horizontale Abstand des Spiegels der Bifilarrolle von der Skale betrug 3306,3 Skalentheile; der horizontale Abstand des Spiegels des Magnetometers von der Skale betrug 1103 Skalentheile. Die Resultate dieser Messungen sind in folgender Tafel enthalten, in derselben Ordnung, in welcher sie gemacht wurden.

A.	Dynamometer.			Galvanometer.		
600 westlich.	516,27	26,41		250,47	321,49	
	542,68	26,74		571,96	321,48	
	515,94	26,37	26,35	250,48	321,12	320,14
	542,31	26,24		571,60	319,41	
	516,07	26,00		252,19	317,22	
	542,07			569,41		
500 westlich.	506,37	44,47		254,05	314,65	
	550,84	44,87		568,70	314,22	
	505,97	43,89	44,31	254,48	314,77	314,32
	549,86	44,50		569,25	314,33	
	505,36	43,84		254,92	313,63	
	549,20			568,55		
500 nördlich.	517,27	20,34		566,80	312,08	
	537,61	20,43		254,72	312,98	
	517,18	20,19	20,30	567,70	312,82	312,48
	537,37	20,36		254,88	312,63	
	817,01	20,19		567,51	311,89	
	537,20			255,62		
500 östlich.	505,06	43,04		257,92	308,39	
	548,10	43,09		566,31	308,98	
	505,01	42,53	42,89	257,33	308,05	308,80
	547,54	42,32		565,38	309,09	
	505,22	43,46		256,29	309,50	
	548,68			565,79		

A.	Dynamometer.			Galvanometer.		
	517,96	19,51		564,05	306,09	
	537,47	19,80		257,96	306,07	
500	517,67	19,19	19,49	564,03	305,14	305,56
südlich.	536,86	19,79		258,89	305,47	
	517,07	19,17		564,36	305,03	
	536,24			259,33		
	514,31	24,19		260,23	304,46	
	538,50	23,65		564,69	305,02	
600	514,85	24,06	23,72	259,67	304,58	304,92
östlich.	538,91	23,72		564,25	305,36	
	515,19	23,85		258,89	305,17	
	539,04			564,06		
	568,21	81,67		562,50	303,54	
	486,54	81,85		258,96	304,67	
400	568,39	81,77	81,64	563,63	303,35	303,79
östlich.	486,62	81,57		260,28	303,32	
	568,19	81,35		563,60	304,08	
	486,84			259,52		
	546,32	36,27		261,44	300,95	
	510,05	36,25		562,39	302,42	
400	546,30	36,14	36,15	259,97	302,73	302,07
nördlich.	510,16	35,96		562,70	301,58	
	546,12	36,12		261,12	302,69	
	510,00			563,81		
	488,36	79,71		261,99	300,99	
	568,07	79,78		562,98	301,45	
400	488,29	79,60	79,60	261,53	300,97	300,80
westlich.	567,89	79,49		562,50	300,80	
	488,40	79,40		261,70	299,83	
	567,80			561,53		
	510,23	35,34		561,18	298,95	
	545,57	35,53		262,23	299,67	
400	510,04	35,45	35,43	561,90	299,40	299,30
südlich.	545,49	35,56		262,50	299,37	
	509,93	35,28		561,87	299,11	
	545,21			262,76		
	566,29	79,45		263,73	298,81	
	486,84	79,39		562,54	300,31	
300	566,23	78,13	78,85	262,23	300,30	299,89
südlich.	488,10	78,64		562,53	300,30	
	566,74	78,62		262,23	299,71	
	488,12			561,94		

A.	Dynamometer			Galvanometer.		
300 westlich.	431,18 623,75 431,35 623,37 431,41 623,32	192,57 192,40 192,02 191,96 191,91	192,17	263,96 562,01 263,76 561,75 264,45 561,90	298,05 298,25 297,99 297,30 297,45	297,81
300 nördlich.	566,96 488,66 567,03 489,10 567,08 489,28	78,30 78,37 77,93 77,98 77,80	78,08	265,93 563,05 263,92 563,04 264,89 563,03	297,12 299,13 299,12 298,15 298,14	298,33
300 östlich.	433,52 623,78 433,35 623,58 433,69 623,28	190,26 190,43 190,23 189,89 189,59	190,08	266,49 563,18 265,02 562,00 264,91 562,51	296,69 298,16 296,98 297,09 297,60	297,30

Dieser Tafel sind folgende Erläuterungen beizufügen. In der Columne *A* ist der Abstand der Mittelpunkte beider Rollen des Dynamometers in Millimetern angegeben, und dabei bemerkt, nach welcher Richtung, von der Bifilarrolle aus gerechnet, die feste Rolle aufgestellt war; unter nördlich und südlich ist die Richtung nach dem magnetischen Meridiane, unter östlich und westlich die Richtung senkrecht gegen den magnetischen Meridian zu verstehen. — In der «Dynamometer» überschriebenen zweiten Columne ist der Stand der Bifilarrolle nach Skalentheilen angegeben, abwechselnd bei directer und umgekehrter Richtung des Stromes in der festen Rolle. Jede dieser Zahlen beruht auf 7 Ablesungen, indem von Schwingung zu Schwingung abwechselnd das Maximum und das Minimum des Schwingungsbogens 7 Mal hinter einander abgelesen und hieraus nach bekannten Regeln der mittlere Ruhestand der schwingenden Rolle berechnet wurde. Bei der Umkehrung des Stromes in der festen Rolle wurde ein solches Verfahren angewendet, durch welches der Schwingungsbogen der Bifilarrolle nicht vergrössert wurde. In der Tafel sind neben den Standbeobachtungen, welche sich abwechselnd auf den directen und umgekehrten Strom in der festen Rolle beziehen, die Unterschiede je zweier unmittelbar auf einander folgender Beobachtungen bemerkt, welche die doppelte Ablenkung der Bifilarrolle durch Einwirkung der festen Rolle in Skalentheilen angeben. Endlich ist neben diesen einzelnen Werthen der doppelten Ablenkung ihr Mittelwerth für jede Stellung der festen Rolle bemerkt. — In der «Galvanometer» überschriebenen dritten Columne ist der Stand des Galvanometers angegeben, abwechselnd bei directer und umgekehrter Stromrichtung in der als Multiplicator dienenden Rolle *B*. Dieser Stand ist auf dieselbe Weise beobachtet und berechnet worden, wie beim Dynamometer, und daneben

sind die Unterschiede, und der Mittelwerth der doppelten Ablenkung des Galvanometers bemerkt. Die correspondirenden Beobachtungen am Dynamometer und am Galvanometer sind immer von zwei Beobachtern an beiden Instrumenten gleichzeitig gemacht worden.

Alle in der obigen Tafel zusammengestellten Beobachtungen sind in der angegebenen Ordnung an einem Tage unmittelbar nach einander gemacht worden, und, da alle äusseren Verhältnisse genau die nämlichen blieben, so sind alle Resultate unmittelbar unter einander vergleichbar. Es war an diesem Tage nicht möglich gewesen, auch noch diejenigen Beobachtungen auszuführen, wobei die feste Rolle ihre Stellung im Mittelpunkte der Bifilarrolle erhielt, weil diese Umstellung der festen Rolle mehrere zeitraubende Vorkehrungen erforderte. Diese letzte Versuchsreihe wurde daher auf einen andern Tag verschoben. Weil aber dann nicht mehr mit Sicherheit darauf zu bauen war, dass alle äusseren Verhältnisse genau dieselben geblieben, wie bei den früheren Versuchen, so wurden, zur Vergleichung, an diesem zweiten Tage zwei Versuchsreihen wiederholt, welche schon am ersten Tage gemacht worden waren, nämlich bei 300 Millimeter östlichem und westlichem Abstande der festen Rolle von der Bifilarrolle, welche benutzt werden konnten, die letzte Versuchsreihe so zu reduciren, dass die Resultate mit den Resultaten der früheren Beobachtungen vergleichbar wurden, unabhängig von den kleinen Aenderungen, welche in der Zwischenzeit in den äusseren Verhältnissen eingetreten sein mochten. Auch hatte es auf diese Vergleichung keinen Einfluss, dass am andern Tage eine andere galvanische Säule gebraucht wurde, nämlich von 2 Grove'schen (Platin-Zink-) Bechern statt von 8 Bunsen'schen Kohlenbechern. Es war dies nothwendig, weil sonst die Ablenkung des Dynamometers bei der Stellung der festen Rolle im Mittelpunkte der Bifilarrolle zu gross gewesen wäre, um an der Skale gemessen zu werden. Endlich werde bemerkt, dass die constante Richtung des Stromes in der Bifilarrolle am andern Tage die entgegengesetzte war, wie am ersten, was ebenfalls auf die reducirten Resultate keinen Einfluss hat. Die Resultate dieser zweiten Versuchsreihe sind in der folgenden Tafel enthalten.

A.	Dynamometer.			Galvanometer.		
	48,05			359,78		
		905,69			64,54	
	953,74			424,29		
		904,84			64,46	
	48,90			359,83		
0		904,00	903,97		64,47	64,45
	952,90			424,30		
		903,04			64,40	
	49,89			359,90		
		902,34			64,39	
	952,20			424,29		
	485,70			329,30		
		27,58			125,08	
	513,28			454,38		
		27,18			124,99	
	486,10			329,39		
300 östlich.		27,25	27,54		124,89	125,08
	513,35			454,28		
		28,26			125,10	
	485,09			329,48		
		27,43			125,35	
	512,52			454,53		

A.	Dynamometer.			Galvanometer.		
	512,37			454,50		
		25,65			125,18	
	486,72			329,32		
		27,77			125,29	
300	514,49			454,61		
westlich.		27,43	27,20		125,35	125,23
	487,06			329,26		
		27,60			125,30	
	514,66			454,56		
		27,55			125,05	
	487,11			329,51		

Es ist hierbei zu bemerken, dass auch der Strom von 2 Grove'schen Bechern eine grössere Ablenkung des Dynamometers hervorbrachte, als mit der 1000 Theile umfassenden Skale gemessen werden konnte, wenn die feste Rolle im Mittelpunkte der Bifilarrolle aufgestellt war, und dass daher in diesem Falle der Strom dadurch geschwächt wurde, dass der Widerstand der Kette durch Einschaltung eines langen und dünnen Leitungsdrahtes vermehrt wurde, der bei 300 Millimeter Abstand der beiden Rollen wieder entfernt wurde, weil sonst die Ablenkung des Dynamometers hier wieder für eine genaue Messung zu klein ausgefallen sein würde. Man erkennt dies aus der Verschiedenheit der Magnetometer-Ablenkung, welche die Stromintensität misst, und im letzteren Falle fast das Doppelte wie im ersteren beträgt.

Die Resultate dieser Versuchsreihe lassen sich leicht in folgender Zusammenstellung aller Mittelwerthe der gleichzeitigen Ablenkungen des Dynamometers und Galvanometers übersehen, nämlich:

Abstand in Millimetern.	Dynamometer	Galvanometer
0	903,97	64,45
300 östlich	27,54	125,08
300 westlich	27,20	125,23.

Diese Zahlen sind den katoptrischen Gesetzen gemäss den Tangenten der doppelten Ablenkungswinkel proportional und sollen auf die Tangenten der einfachen Ablenkungswinkel reducirt werden, weil diese das Maass der ablenkenden Kraft geben. Es ist dabei noch ein geringer Einfluss der Excentricität der Spiegel zu berücksichtigen. Man erhält hieraus folgende reducirte Werthe:

0	899,79	64,44
300 östlich	27,54	124,98
300 westlich	27,20	125,13.

Von den beiden letzten Zahlenreihen, welche von einander nur wenig verschieden sind, nehmen wir die Mittel, weil sie ganz gleich sein sollten, wenn die Stromintensität dieselbe, und die Stellung der festen Rolle östlich und westlich von der Bifilarrolle ganz symmetrisch gewesen wäre, wodurch wir folgende Werthe erhalten:

0	899,79	64,44
300	27,37	125,055.

Die Resultate der vorhergehenden Versuchsreihe lassen sich in der Zusammenstellung aller Mittelwerthe der Dynamometer- und Galvanometer-Ablenkungen in folgender Tafel übersehen, nämlich:

Abstand.	Oestlich.		Westlich.		Südlich.		Nördlich.	
Millimeter.	Dynamometer.	Galvanometer.	Dynamometer.	Galvanometer.	Dynamometer.	Galvanometer.	Dynamometer.	Galvanometer.
300	190,08	297,30	192,17	297,81	78,85	299,89	78,08	298,33
400	81,64	303,79	79,60	300,81	35,43	299.30	36,15	302,07
500	42,89	308,80	44,31	314,32	19,49	305,56	20,30	312,48
600	23,89	304,92	26,35	320,44	—	—	—	—

Ich habe mich überzeugt, dass der Einfluss der Reduction dieser Zahlen auf Tangenten der einfachen Ablenkungswinkel für das Dynamometer so gering ist, dass er ausser Betracht gelassen werden kann, er ist nämlich kleiner, als die unvermeidlichen Beobachtungsfehler. Auch bei den Galvanometer-Beobachtungen kommt diese Correction kaum in Betracht, weil in der Ablenkung des Galvanometers keine grossen Verschiedenheiten vorkommen.

6.

Die beobachteten elektrodynamischen Kräfte im vorigen Artikel können zu der beabsichtigten Prüfung der durch das Ampère'sche Gesetz bestimmten Abhängigkeit dieser Kräfte von der gegenseitigen Lage der auf einander wirkenden Leitungsdrähte nicht unmittelbar benutzt werden, weil sie auf verschiedene Stromintensitäten sich beziehen. Es sollen daher zunächst diese Beobachtungen *auf gleiche Stromintensität* reducirt werden, wozu das im 4. Artikel bewiesene Gesetz in Anwendung kommt, nach welchem die Dynamometer-Ablenkungen den Quadraten der Galvanometer-Ablenkungen proportional sind. Die Anwendung dieses Gesetzes auf die vorliegenden Beobachtungen setzt aber selbst wieder eine andere Reduction voraus, nämlich die *auf gleiche Directionskraft* der Bifilarrolle, welche bei diesen Versuchen merkliche Aenderungen erlitt. Bei den im 4. Artikel angeführten Beobachtungsresultaten, durch welche das angeführte Gesetz bewiesen wurde, war die hieraus sich ergebende Correction unmerklich und brauchte daher nicht in Rechnung gebracht zu werden, weil dort der Strom, welcher durch die feste Rolle des Dynamometers ging, getheilt wurde und nur ein kleiner Theil, nämlich $\frac{1}{246}$ des ganzen Stromes, durch die *Bifilarrolle* geführt wurde, der auf die Directionskraft dieser Rolle keinen merklichen Einfluss hatte. Bei den jetzt vorliegenden Beobachtungsresultaten dagegen darf diese Reduction nicht unbeachtet bleiben, weil hier der ganze durch die feste Rolle geführte Strom durch die Bifilarrolle weiter ging.

Die *Directionskraft der Bifilarrolle* zerfällt in einen *constanten* und in einen *veränderlichen* Theil. Der *constante* Theil, welcher das *statische Moment* heisst, hängt von dem Gewichte der Bifilarrolle und von Länge und Abstand der Aufhängungsdrähte ab und lässt sich aus der beobahteten *Schwingungsdauer* und dem *Trägheitsmomente* der Bifilarrolle berechnen. Die *Schwingungsdauer* der Bifilarrolle, wenn kein Strom durchging, war durch besondere Beobachtungen bestimmt worden,

$$t = 13''3259.$$

Das *Trägheitsmoment* K wurde nach den von Gauss in der *Intensitas* gegebenen Vorschriften

$$K = 864800000$$

gefunden, wobei Millimeter und Milligramm als Längen- und Massenmaass zum Grunde liegen. Das *statische Moment* S erhält man hieraus

$$S = \frac{\pi\pi K}{u} = 48064000.$$

Der *veränderliche* Theil der Directionskraft der Bifilarrolle, welcher das *elektromagnetische Moment* heisse, hängt von der Intensität des horizontalen Theils des *Erdmagnetismus* T, von der Intensität des Stromes der Bifilarrolle $\varkappa$ und von der Grösse des Flächenraums λ ab, welcher von den Drahtwindungen der Bifilarrolle begrenzt wird, und ist dem Producte dieser drei Grössen gleich zu setzen. Die Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus war an der Stelle der Bifilarrolle

$$T = 1{,}83$$

gefunden worden. Die Grösse des *Flächenraums*, welcher von den Drahtwindungen der Bifilarrolle begrenzt war, konnte durch directe Abmessung nicht bestimmt werden, weil die Zahl der Drahtwindungen nicht genau bekannt war. Es wurde daher dieser Flächenraum mittelbar durch Vergleichung der elektromagnetischen Wirkung dieser Rolle mit der einer anderen von bekanntem Flächenraume auf eine entfernte Boussole bestimmt, wonach

$$\lambda = 29314000 \text{ Quadratmillimeter}$$

erhalten wurde. Die *Stromintensitäten* waren endlich für alle einzelnen Versuche durch die Galvanometerbeobachtungen in Skalentheilen gegeben, die jedoch zu vorliegendem Zwecke auf das *elektromagnetische Grundmaass* der Stromintensitäten zurückzuführen sind. Hierzu muss die beobachtete Zahl der Skalentheile mit einem constanten Factor multiplicirt werden, welcher der im 9 Artikel zu gebenden Nachweisung gemäss

$$= 0{,}0003614$$

zu setzen ist. Bezeichnet also y die am Galvanometer beobachtete Zahl der Skalentheile, so ist die Stromintensität

$$\varkappa = 0{,}0003614 . y.$$

Aus diesen Elementen ergiebt sich das *elektromagnetische Moment* der Bifilarrolle

$$\varkappa\lambda T = 19400 . y.$$

Dieser Werth des elektromagnetischen Moments ist bei der *ersten* Versuchsreihe von dem des *statischen Moments* abzuziehen, bei der zweiten Versuchsreihe aber demselben hinzuzufügen, um die *Directionskraft der Bifilarrolle* zu erhalten, weil, wie schon S. 34 bemerkt worden ist, die Stromrichtung in der Bifilarrolle in der letzteren Reihe der in der ersteren entgegengesetzt war. Für die *erste* Versuchsreihe ergiebt sich hieraus die Directionskraft in Theilen des statischen Moments

$$= 1 - \frac{19400}{48064000} . y,$$

für die zweite Versuchsreihe

$$= 1 + \frac{19400}{48064000} \cdot y.$$

Die beobachteten *Dynamometer-Ablenkungen* werden hiernach auf eine constante, dem *statischen Momente* gleiche, Directionskraft reducirt, wenn man die am Dynamometer beobachtete Zahl der Skalentheile x in der *ersten* Versuchsreihe mit $(1 - \frac{194}{480640} \cdot y)$, in der *zweiten* mit $(1 + \frac{194}{480640} \cdot y)$ multiplicirt.

Nach dieser Reduction erhält man für die *erste Reihe* die in folgender Tafel zusammengestellten Werthe der Dynamometer- und Galvanometer-Ablenkungen.

Abstand.	Oestlich.		Westlich.		Südlich.		Nördlich.	
Millimeter.	Dynamometer.	Galvanometer.	Dynamometer.	Galvanometer.	Dynamometer.	Galvanometer.	Dynamometer.	Galvanometer.
300	167,26	297,30	169,06	297,81	69,30	299,89	68,67	298,33
400	71,63	303,79	69,93	300,81	81,15	299,30	31,74	302,07
500	37,54	308,80	38,69	314,32	17,09	305,56	17,74	312,48
600	20,95	304,92	22,94	320,14	—	—	—	—

Für die *zweite Reihe* erhält man folgende zusammengehörige Werthe:

Abstand.	Oestlich oder Westlich.	
Millimeter.	Dynamometer.	Galvanometer.
0	923,19	64,44
300	28,75	125,055

Die *Empfindlichkeit* eines Instruments ist seiner *Directionskraft* umgekehrt proportional, d. h. die zu messende Kraft bringt eine desto grössere Ablenkung hervor, je kleiner seine Directionskraft ist. Obige auf *gleiche Directionskraft* reducirten Beobachtungen sind also denen gleich, welche bei *gleicher Empfindlichkeit* des Dynamometers erhalten worden wären.

Nach dieser Reduction der Dynamometer-Beobachtungen *auf gleiche Directionskraft* lässt sich nun das im 4. Artikel bewiesene Gesetz in Anwendung bringen und alle Beobachtungen, zur besseren Vergleichung unter einander, *auf gleiche Stromintensität* reduciren. Es ist hierzu nur nöthig, die normale Stromintensität, für welche die reducirten Beobachtungen gelten sollen, näher zu bestimmen. Da es nicht nöthig ist, für beide Versuchsreihen *gleiche* normale Stromintensitäten anzuwenden, so möge für die *erste Reihe* diejenige gewählt werden, welche einer Galvanometer-Ablenkung in Skalentheilen entspricht, deren Quadrat = 100000 ist, für die *zweite Reihe* eine 5 Mal kleinere, für welche dieses Quadrat = 4000 ist. Nach dem im 4. Artikel bewiesenen Gesetze erhält man dann aus der in der Tafel angegebenen Dynamometer-Ablenkung x, welche der ebenfalls in der Tafel angegebenen Galvanometer-Ablenkung y entsprach, den reducirten Werth für die *erste* Reihe

$$= 100000 . \frac{x}{yy},$$

für die *zweite* Reihe

$$= 4000 \cdot \frac{x}{yy}.$$

In folgender Tafel sind die hiernach reducirten Werthe der *ersten* Reihe zusammengestellt.

Abstand.	Oestlich.	Westlich.	Südlich.	Nördlich.
300	189,24	190,62	77,06	77,16
400	77,61	77,28	34,77	34,78
500	39,37	39,16	18,30	18,17
600	22,53	22,38	—	—

Die reducirten Werthe der *zweiten* Reihe sind folgende:

Abstand.	Oestlich oder westlich.
0	889,29
300	7,35.

Aus dieser letzteren ergiebt sich, dass die elektrodynamische Kraft der festen Rolle auf die Bifilarrolle, wenn die Mittelpunkte zusammenfallen

$$\frac{889{,}29}{7{,}35} = 120{,}9 \text{ Mal}$$

grösser war, als wenn die Mittelpunkte in west-östlicher Richtung 300 Millimeter von einander entfernt waren.

In der Tafel für die erste Reihe sieht man, dass sowohl die in Osten und Westen als auch die in Süden und Norden sich entsprechenden Werthe sehr nahe übereinstimmen, was ein Beweis ist sowohl für die Genauigkeit der Messung als auch für die symmetrische Stellung, welche die feste Rolle zu beiden Seiten der Bifilarrolle erhalten hatte. Nimmt man nun die Mittel von diesen schon nahe mit einander übereinstimmenden Werthen, und fügt für 0 Abstand, dem eben aus der *zweiten* Reihe gezogenen Resultate gemäss, den 120,9 fachen Werth der Wirkung für 300 Millimeter Abstand senkrecht auf dem magnetischen Meridiane hinzu, so erhält man folgende Tafel:

Abstand.	Senkrecht auf den magnetischen Meridian.	In der Richtung des magnetischen Meridians.
0	22960	22960
300	189,93	77,11
400	77,45	34,77
500	39,27	18,24
600	22,46	—

7.

Ehe wir nun dieses System von Messungen über die Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte dazu benutzen, das Ampèresche Fundamentalgesetz direct daran zu prüfen, wollen wir eine interessante, wenn auch nur indirecte und partielle Prüfung vorausschicken. Es ist nämlich bekannt, dass es eine der wichtigsten Consequenzen des Ampèreschen Fundamentalgesetzes für die Wechselwirkung zweier Stromelemente sei, dass die Wechselwirkung zweier Magnete, bei aller Verschiedenheit ihrer gegenseitigen Lage, auch durch constante galvanische Ströme, welche auf eine bestimmte Weise auf der Oberfläche oder im Innern der Magnete statt finden, hervorgebracht werden würde, und umgekehrt, dass die Wechselwirkungen zweier galvanischer Rollen, wie diejenigen, womit unsere Messungen ausgeführt wurden, bei aller Verschiedenheit ihrer gegenseitigen Lage, auch durch zwei constante Magnete hervorgebracht werden würden, welche in Räumen enthalten sind, welche von den Drahtwindungen jener Rollen umschlossen sind, wenn der freie Magnetismus auf eine bestimmte Weise im Innern oder auf ihrer Oberfläche vertheilt wäre. Hiernach können alle Resultate, welche Gauss in der *Intensitas vis magneticae* cet. für solche Magnete bewiesen hat, auf unsere beiden Rollen übertragen werden, und dies kann um so leichter geschehen, als wir unsere Messungen über die Wechselwirkungen der beiden Rollen genau so angeordnet haben, wie Gauss die Messungen der Wechselwirkungen der beiden Magnete bestimmt hat. Gauss hat a. a. O. den Abstand der beiden Magnete in Metern angegeben, statt wir Millimeter gebrauchen; ferner hat Gauss die *einfachen*, von der natürlichen Ruhelage der Nadel an gerechneten, Ablenkungen in Graden, Minuten und Secunden bestimmt, während wir die *doppelten* Tangenten der einfachen Ablenkungswinkel in Skalentheilen (d. i. mit dem constanten Coefficienten 6612,6 multiplicirt), angesetzt haben. Wollen wir daher unsere Messungen über die Wechselwirkung der beiden Leitungsrollen in die nämliche Form bringen wie jene magnetischen, so erhalten wir folgende Tafel der *gemessenen* Ablenkungen:

R	v	v'
0m, 3	0°49′ 22″,	0° 20′ 3″
0 , 4	0 20 8	0 9 2
0 , 5	0 10 12	0 4 44
0 , 6	0 5 50	———

Die Tangenten von v und v' sollen sich dann hier wie dort nach den fallenden ungeraden Potenzen von R entwickeln lassen, und zwar soll

$$\begin{aligned}\text{tang}\, v &= aR^{-3} + bR^{-5}\\ \text{tang}\, v' &= \tfrac{1}{2}aR^{-3} + cR^{-5}\end{aligned}$$

gesetzt werden können, wo a, b, c aus der Erfahrung zu bestimmen sind. Setzt man nun in unserem Falle

$$\text{tang}\, v = 0{,}0003572\, R^{-3} + 0{,}000002755\, R^{-5}$$
$$\text{tang}\, v' = 0{,}0004786\, R^{-3} - 0{,}000001886\, R^{-5}$$

so ergiebt sich folgende Tafel *berechneter* Ablenkungen, denen die Unterschiede von den *gemessenen* beigefügt worden sind:

R	v	Unterschied.	v'	Unterschied.
0^m, 3	0° 49′ 22″	0	0° 20′ 4″	— 1
0 , 4	0 20 7	+ 1	0 8′ 58	+ 4
0 , 5	0 10 8	+ 4	0 4 42	+ 2
0 , 6	0 5 49	+ 1	———	

Die Uebereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Werthen kann nicht besser gewünscht werden und das Ampère'sche Fundamentalgesetz findet sich hiernach in einer seiner allgemeinsten und wichtigsten Consequenzen durch die Erfahrung bestätigt.

8.

Das Ampère'sche Fundamentalgesetz für die Wechselwirkung zweier Stromelemente, welches an dem vorliegenden Systeme von Messungen dieser Wechselwirkung geprüft werden soll, besteht selbst nun wesentlich in Folgendem: Die Wechselwirkung zweier Stromelemente ist dem Quadrate ihres Abstandes von einander umgekehrt, und der Stromintensität und der Länge jedes Stromelements und ausserdem einem Factor direct proportional, welcher von dem Winkel, welchen die Richtungen der beiden Stromelemente mit einander, und von den beiden Winkeln, welche die beiden Stromelemente mit ihrer geraden Verbindungslinie bilden, abhängt. Man bezeichne mit r den Abstand der beiden Stromelemente von einander, mit i und i' die beiden Stromintensitäten, mit ds und ds' die Längen der beiden Stromelemente, mit ε den Winkel, welchen die Richtungen der beiden Stromelemente mit einander bilden, endlich mit θ den Winkel des einen Stromelements mit der Linie r, und mit θ' den Winkel des anderen Stromelements mit der verlängerten Linie r, so ist

$$-\frac{ii'}{rr}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta')\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'$$

ein Ausdruck für die *Grösse* der Wechselwirkung beider Elemente; die *Richtung* derselben fällt für beide Stromelemente mit ihrer Verbindungslinie zusammen, und ist für die beiden Stromelemente entgegengesetzt, für beide abstossend, wenn obiger Ausdruck einen positiven Werth hat, im entgegengesetzten Falle anziehend.

Aus diesem Fundamentalgesetze lässt sich nun zunächst der Ausdruck für die Gesammtwirkung finden, welche eine Anzahl von Stromelementen, die zusammen eine *geschlossene* Linie bilden, auf irgend ein anderes Stromelement ausüben.

Man kann diese Wirkung nach drei rechtwinkligen Coordinatenaxen zerlegen. Bezeichnet man diese drei Componenten mit X, Y, Z, ferner die Winkel, welche das Stromelement ds', auf welches gewirkt wird, mit den drei Coordinatenaxen bildet, mit λ, μ, ν, und ist die Mitte des Elements ds' der Anfangspunkt der Coordinaten, so hat Ampère schon bewiesen, dass

$$X = -\tfrac{1}{2}\, ii'\, \mathrm{d}s' \left(\cos\mu \int \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{r^3} - \cos\nu \int \frac{z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z}{r^3}\right)$$

$$Y = -\tfrac{1}{2}\, ii'\, \mathrm{d}s' \left(\cos\nu \int \frac{y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y}{r^3} - \cos\lambda \int \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{r^3}\right)$$

$$Z = -\tfrac{1}{2}\, ii'\, \mathrm{d}s' \left(\cos\lambda \int \frac{z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z}{r^3} - \cos\mu \int \frac{y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y}{r^3}\right)$$

(siehe Mémoires de l'acad. roy. des sc. de l'Institut de France. Année 1823. S. 214). Ist nun die geschlossene Linie eine Kreislinie von dem Halbmesser m, ist ferner die Axe der x der Projection der den Mittelpunkt des Kreises mit dem Anfangspunkte der Coordinaten verbindenden Geraden auf die Kreisebene parallel, und die Axe der y dem auf jene Projection senkrechten Durchmesser des Kreises; bezeichnet man ferner den auf die Kreisebene projicirten Abstand des Kreismittelpunkts vom Anfangspunkte der Coordinaten mit p, und den Winkel, welchen die Linie p mit dem Radius eines Kreiselementes ds bildet, mit ω; endlich mit q das Perpendikel vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Kreisebene, so ist für diesen Fall in obigen Werthen von X, Y, Z

$$z = q, \quad y = m \sin\omega, \quad x = p - m\cos\omega,$$

folglich ist, weil $rr = xx + yy + zz$ ist,

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{r^3} = mp \int \frac{\cos\omega\,\mathrm{d}\omega}{r^3} - mm \int \frac{\mathrm{d}\omega}{r^3}$$

$$= mp\left(\frac{\sin\omega}{r^3} + 3\int \sin\omega \,.\, \frac{\mathrm{d}r}{r^4}\right) - mm \int \frac{\mathrm{d}\omega}{r^3}$$

$$\int \frac{z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z}{r^3} = mq \int \frac{\sin\omega\,\mathrm{d}\omega}{r^3}$$

$$\int \frac{y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y}{r^3} = -mq \int \frac{\cos\omega\,\mathrm{d}\omega}{r^3} = -mq\left(\frac{\sin\omega}{r^3} + 3\int \sin\omega \,.\, \frac{\mathrm{d}r}{r^4}\right)$$

Substituirt man hierin endlich für dr seinen aus der Gleichung für r, nämlich:

$$rr = xx + yy + zz = mm + pp + qq - 2mp\cos\omega,$$

sich ergebenden Werth

$$dr = \frac{mp\sin\omega\,\mathrm{d}\omega}{r},$$

und erstreckt die Integralwerthe auf den ganzen Kreisumfang, so erhält man

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{r^3} = 3\,mm\,pp \int \frac{\sin\omega^2\,\mathrm{d}\omega}{r^5} - mm \int \frac{\mathrm{d}\omega}{r^3}$$

$$\int \frac{z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z}{r^3} = 0$$

$$\int \frac{y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y}{r^3} = -3\,mm\,pq \int \frac{\sin\omega^2\,\mathrm{d}\omega}{r^5};$$

folglich

$$X = -\tfrac{1}{2}\, ii'\, ds'.mm \cos\mu \left(3pp \int \frac{\sin\omega^2\, d\omega}{r^5} - \int \frac{d\omega}{r^3}\right)$$

$$Y = +\tfrac{1}{2}\, ii'\, ds'.mm \left(3pq \cos\nu \int \frac{\sin\omega^2\, d\omega}{r^5} + 3pp \cos\lambda \int \frac{\sin\omega^2\, d\omega}{r^5} - \cos\lambda \int \frac{d\omega}{r^3}\right).$$

Gehört nun das Element ds' ebenfalls einem Kreise an, dessen Halbmesser mit n bezeichnet werde, und dessen Ebene der Coordinatenaxe z parallel ist, und bezeichnet man mit a das Perpendikel vom Mittelpunkte des Kreises m auf die Ebene des Kreises n, mit c das Perpendikel vom Mittelpunkte des Kreises n auf die Ebene des Kreises m, mit b den Abstand beider Perpendikel, und ist, wie in obigen Versuchen der Fall war,

$$b = 0,$$

so erhält man für die Winkel α, β, γ, welche das Perpendikel auf die Ebene des Kreises n mit den Coordinatenaxen bildet, folgende Gleichungen:

$$\gamma = 90°$$
$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = 1$$
$$\cos\alpha \cos\lambda + \cos\beta \cos\mu = 0.$$

Da ausserdem

$$\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2 = 1$$

gegeben ist, so erhält man

$$\cos\alpha = \frac{\cos\mu}{\sin\nu}, \quad \cos\beta = -\frac{\cos\lambda}{\sin\nu}.$$

Für p und q erhält man ferner folgende Gleichungen:

$$p \cos\beta = n \cos\nu$$
$$pp = aa + nn \cos\nu^2$$
$$q = c + n \sin\nu$$

Multiplicirt man nun die Componenten X, Y, Z respective mit den Cosinus der Winkel α, β, γ, welche das Perpendikel auf die Ebene des Kreises n mit den Coordinatenaxen macht, so giebt die Summe dieser Produkte die Componente in der auf die Ebene des Kreises n senkrechten Richtung, nämlich:

$$= X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma,$$

oder, wenn man für X, Y, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, und γ die gefundenen Werthe substituirt, und p und q eliminirt,

$$= -\tfrac{1}{2}\, ii'\, mm\, ds'.\left[3\,(aa \sin\nu - cn \cos\nu^2) \int \frac{\sin\omega^2\, d\omega}{r^5} - \sin\nu \int \frac{d\omega}{r^3}\right],$$

worin

$$rr = aa + cc + mm + nn + 2cn \sin\nu - 2m \cos\omega.\, \sqrt{(aa + nn \cos\nu^2)}.$$

Schreibt man in obigem Ausdrucke für die Länge des Kreiselementes ds' seinen durch Bogenwerth und Halbmesser ausgedrückten Werth $= n\, d\nu$, und multiplicirt dann mit dem Abstande des Elementes von dem verticalen Durch-

messer des Kreises $= n \sin \nu$, so erhält man das Drehungsmoment der Kraft, in Beziehung auf den verticalen Durchmesser des Kreises als Drehungsaxe,

$$= -\tfrac{1}{2} ii'.mmnn \sin\nu . d\nu \Big[3(aa\sin\nu - cn\cos\nu^2)\int\frac{\sin\omega^2\, d\omega}{r^5} - \sin\nu\int\frac{d\omega}{r^3}\Big].$$

Integrirt man diesen Ausdruck zwischen den Grenzen $\nu = 0$ bis $\nu = 2\pi$, so erhält man das Drehungsmoment, welches der Kreisstrom m auf den Kreisstrom n ausübt.

Bei der angegebenen Stellung der beiden Kreise gegen einander (wo nämlich ihre Ebenen auf einander senkrecht sind, und die darauf in ihren Mittelpunkten errichteten Perpendikel einander schneiden) können drei Hauptfälle unterschieden werden, die allein bei den obigen Versuchen vorkommen, nämlich entweder

1) die Ebene des Kreises m halbirt die Ebene des Kreises n, oder es ist $c = 0$; oder

2) die Ebene des Kreises n halbirt die Ebene des Kreises m, oder es ist $a = 0$; oder endlich

3) beide Ebenen halbiren einander wechselseitig, oder es ist $a = 0$ und $c = 0$.

Für den *ersten* Fall ergiebt sich folgender Ausdruck des auf den Kreis n wirkenden Drehungsmomentes, nämlich:

$$-\tfrac{1}{2} ii'.mmnn \int_0^{2\pi} \sin\nu^2 d\nu \left(3\, aa\int\frac{\sin\omega^2\, d\omega}{r^5} - \int\frac{d\omega}{r^3}\right);$$

worin

$$rr = aa + mm + nn - 2m\cos\omega . \sqrt{(aa + nn\cos\nu^2)}.$$

Für den *zweiten* Fall ergiebt sich folgendes Drehungsmoment:

$$+\tfrac{1}{2} ii'.mmnn \int_0^{2\pi} \sin\nu\, d\nu \left(3\, cn\cos\nu^2\int\frac{\sin\omega^2\, d\omega}{r^5} + \sin\nu\int\frac{d\omega}{r^3}\right),$$

worin

$$rr = cc + mm + nn + 2cn\sin\nu - 2mn\cos\nu\cos\omega.$$

Für den *dritten* Fall ergiebt sich folgendes Drehungsmoment:

$$+\tfrac{1}{2} ii'\, mmnn \int_0^{2\pi} \sin\nu^2 d\nu \int\frac{d\omega}{r^3},$$

worin

$$rr = mm + nn - 2mn\cos\nu\cos\omega.$$

Die erste Integration obiger Ausdrücke, nämlich in Beziehung auf ω, lässt sich

nur ausführen, indem man $\frac{1}{r^3}$ und $\frac{1}{r^5}$ in Reihen nach wachsenden Potenzen von $\cos\omega$ entwickelt. Da rr die Form hat:

$$ll(1-k\cos\omega),$$

so ergiebt sich:

$$\frac{1}{r^3}=\frac{1}{l^3}\left(1+\tfrac{3}{2}k\cos\omega+\tfrac{15}{8}kk\cos\omega^2+\tfrac{35}{16}k^3\cos\omega^3+\tfrac{315}{128}k^4\cos\omega^4+\ldots\right)$$
$$\frac{1}{r^5}=\frac{1}{l^5}\left(1+\tfrac{5}{2}k\cos\omega+\tfrac{35}{8}kk\cos\omega^2+\tfrac{105}{16}k^3\cos\omega^3+\tfrac{1155}{128}k^4\cos\omega^4+\ldots\right).$$

Da ferner

$$\pi=\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\omega=\int_0^{2\pi}\sin\omega^2\,\mathrm{d}\omega=\int_0^{2\pi}\cos\omega^2\,\mathrm{d}\omega=4\int_0^{2\pi}\sin\omega^2\cos\omega^2\,\mathrm{d}\omega$$
$$=\tfrac{4}{3}\int_0^{2\pi}\cos\omega^4\,\mathrm{d}\omega=8\int_0^{2\pi}\sin\omega^2\cos\omega^4\,\mathrm{d}\omega=\text{etc.}$$
$$o=\int_0^{2\pi}\cos\omega\,\mathrm{d}\omega=\int_0^{2\pi}\sin\omega^2\cos\omega\,\mathrm{d}\omega=\int_0^{2\pi}\cos\omega^3\,\mathrm{d}\omega=\int_0^{2\pi}\sin\omega^2\cos\omega^3\,\mathrm{d}\omega=\text{etc.},$$

so erhält man

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\omega^2\,\mathrm{d}\omega}{r^5}=\frac{\pi}{l^5}\left(1+\tfrac{35}{32}kk+\tfrac{1155}{1024}k^4+\ldots\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\omega}{r^3}=\frac{2\pi}{l^3}\left(1+\tfrac{15}{16}kk+\tfrac{945}{1024}k^4+\ldots\right).$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man für den *ersten* Hauptfall, wo $c=0$ ist, den Werth des elektrodynamischen Drehungsmoments

$$=-\frac{\pi}{2}\,\frac{mm\,nn}{l^3}\,ii'.\Sigma,$$

wo Σ folgenden Integralwerth bezeichnet:

$$\int_0^{2\pi}\sin\nu^2\,\mathrm{d}\nu\left[3\frac{aa}{ll}\left(1+\tfrac{35}{32}kk+\tfrac{1155}{1024}k^4+\ldots\right)-2\left(1+\tfrac{15}{16}kk+\tfrac{945}{1024}k^4+\ldots\right)\right].$$

Es ist hierin,

$$aa+mm+nn=ll \quad\text{und}\quad 4(aa+nn\cos\nu^2).\frac{mm}{l^4}=kk.$$

Substituirt man diesen Werth von kk, und integrirt den nach Potenzen von $\cos \nu^2$ geordneten Ausdruck, so erhält man das elektrodynamische Drehungsmoment

$$= -\frac{\pi\pi}{2}\frac{mm\,nn}{l^3}\,ii'\Big[3\frac{aa}{ll} - 2 + \frac{15}{32}\Big(7\frac{aa}{ll} - 4\Big)\Big(4 + \frac{nn}{aa}\Big)\frac{aa\,mm}{l^4} + \ldots\Big].$$

Dieser Ausdruck giebt also für den betrachteten ersten Hauptfall das Maass des Drehungsmoments, welches ein Ring vom Halbmesser $= m$ auf einen Ring vom Halbmesser $= n$ ausübt. Für ein System von Ringen, deren Halbmesser arithmetisch von 0 bis m wachsen, erhält man als Maass des Drehungsmoments, welches dasselbe auf den Ring vom Halbmesser $= n$ ausübt, das Integral des obigen mit dm multiplicirten Ausdrucks, zwischen den Grenzen $m = 0$ bis $m = m$ genommen. Setzt man Kürze halber

$$\frac{mm}{aa+nn} = vv; \quad \frac{nn}{aa+nn} = ww; \quad \frac{4aa+nn}{16(aa+nn)} = f; \quad \frac{8a^4 + 4aann + n^4}{64(aa+nn)^2} = g,$$

so ist das gesuchte elektrodynamische Drehungsmoment

$$= -\frac{\pi\pi}{2}v^3\,nn\,ii'.S,$$

wo S folgende Reihe bezeichnet:

$$\begin{aligned} S = &+ \Big[\tfrac{1}{3} - ww\Big] \\ &- \tfrac{3}{2}\Big[\tfrac{3}{5} - ww - (3 - 7ww)f\Big]vv \\ &+ \tfrac{15}{8}\Big[\tfrac{5}{7} - ww - 2(5 - 9ww)f + 3(5 - 11ww)g\Big]v^4 \\ &- \tfrac{35}{16}\Big[\tfrac{7}{9} - ww - 3(7 - 11ww)f + 11(7 - 13ww)g\Big]v^6 \\ &+ \tfrac{315}{256}\Big[\tfrac{9}{11} - ww - 4(9 - 13ww)f + 26(9 - 15ww)g\Big]v^8 \\ &- \text{etc.} \end{aligned}$$

Eine genaue Vergleichung mit den Beobachtungen fordert, das Drehungsmoment zu bestimmen, welches ein System von solchen Ringsystemen mit gemeinschaftlicher Axe auf ein anderes ähnliches System ausübe, wozu noch mehrere Integrationen nöthig wären. Indess sieht man leicht ein, dass, wenn man von dem mittelsten dieser auf einer Axe befindlichen Ringsysteme ausgeht, die Wirkung desselben als Mittelwerth für je zwei symmetrisch zu beiden Seiten desselben liegende Systeme genommen werden dürfe, weil die Wirkung des einen der beiden letzteren nahe eben so viel jenen Mittelwerth übersteigt, als die Wirkung des andern darunter bleibt. Es gilt dies um so mehr, je kleinere Bruchtheile die Halbmesser m und n von dem Abstande a der Mittelpunkte beider Systeme sind. Wir können daher bei dem zuletzt gegebenen Ausdrucke als Maass der Wirkung stehen bleiben.

Setzt man darin nun die aus der Beobachtung bekannten Werthe von m, und n, nämlich in Millimetern:

$$m = 44,4$$
$$n = 55,8,$$

und für a successive folgende verschiedene Werthe:

$$1.\ a' = 300$$
$$2.\ a'' = 400$$
$$3.\ a''' = 500,$$

so erhält man folgende mit $\pi\pi ii$ zu multiplicirende Werthe des Drehungsmoments:

$$1 \quad -1,4544$$
$$2. \quad -0,6547$$
$$3. \quad -0,3452.$$

Wendet man ein ähnliches Verfahren auf den *zweiten* Hauptfall an, wo $a = 0$ ist, so erhält man den Werth des elektrodynamischen Drehungsmoments

$$= + \pi\pi v^3 nnii' . S,$$

worin Kürze halber

$$\frac{mm}{cc+nn} = vv; \quad \frac{cc}{cc+nn} = f; \quad \frac{nn}{cc+nn} = 4grr,$$

gesetzt worden, und S folgende Reihe bezeichnet:

$$\begin{aligned} S = &+ \left[\tfrac{1}{3}\right] \\ &- \tfrac{3}{2}\left[\tfrac{1}{5} - \tfrac{10}{3}fg\right]vv \\ &+ \tfrac{15}{8}\left[\tfrac{1}{7} + \tfrac{2}{5}(1-14f)g + 42ffgg\right]v^4 \\ &- \tfrac{35}{16}\left[\tfrac{1}{9} + \tfrac{3}{7}(2-18f)g - \tfrac{54}{5}(1-11f)fgg - 572f^3g^3\right]v^6 \\ &+ \tfrac{315}{128}\left[\begin{array}{l}\tfrac{1}{11} + \tfrac{4}{9}(3-22f)g + \tfrac{12}{7}(1-22f+143ff)gg \\ \quad + \frac{1144}{5}(1-10f)ffg^3 + \frac{24310}{3}f^4g^4\end{array}\right]v^8 \\ &- \text{etc.} \end{aligned}$$

Setzt man nun in diesem Ausdrucke die aus der Beobachtung bekannten Werthe von m und n, nämlich in Millimetern:

$$m = 44,4$$
$$n = 55,8,$$

und für c successive folgende verschiedene Werthe:

$$1.\ c' = 300$$
$$2.\ c'' = 400$$
$$3.\ c''' = 500$$
$$4.\ c'''' = 600,$$

so erhält man folgende mit $\pi\pi ii$ zu multiplicirende Werthe des Drehungsmoments:

1. + 3,5625
2. + 1,4661
3. + 0,7420
4. + 0,4267.

Für den *dritten* Hauptfall endlich, wo $a = c = 0$ und $\frac{m}{n}$ ein echter Bruch ist, reicht es für unsern Zweck nicht hin, für n einen Mittelwerth anzunehmen, sondern man muss den für irgend ein n gefundenen Werth mit dn multipliciren, und das Integral dieses Products zwischen den durch die Beobachtung gegebenen Grenzwerthen von n, welche wir mit n' und n'' bezeichnen wollen, nehmen. Der hieraus sich ergebende Ausdruck ist dann noch mit $n''-n'$ zu dividiren, um seinen Werth auf das Maass der für den ersten und zweiten Hauptfall gegebenen Ausdrücke zu reduciren, welche in Beziehung auf n nicht integrirt worden sind. Man erhält dann für diesen dritten Hauptfall, wo $a = 0$ und $c = 0$ ist, folgenden Ausdruck für das Drehungsmoment:

$$+\frac{\pi\pi m^3}{n''-n'}ii'\left[\begin{array}{l}\frac{1}{3}\log\text{nat}\frac{n''}{n'}+\frac{9}{160}\left(\frac{1}{n''n''}-\frac{1}{n'n'}\right)mm-\frac{225}{14336}\left(\frac{1}{n''^4}-\frac{1}{n'^4}\right)m^4\\ +\frac{6125}{884736}\left(\frac{1}{n''^6}-\frac{1}{n'^6}\right)m^6+\frac{694575}{184549376}\left(\frac{1}{n''^8}-\frac{1}{n'^8}\right)m^8+\ldots\end{array}\right]$$

Setzt man in diesem Ausdrucke die aus der Beobachtung bekannten Werthe von m, n' und n'', nämlich in Millimetern:

$$m = 44{,}4$$
$$n' = 50{,}25$$
$$n'' = 61{,}35,$$

so erhält man folgenden mit $\pi\pi ii$ zu multiplicirenden Werth des Drehungsmoments:

$$442{,}714.$$

Bei der Nachbarschaft der Rollen in diesem Falle muss endlich noch darauf Rücksicht genommen werden, dass nicht sämmtliche Windungen jeder Rolle in einer Ebene liegen. Wenn daher auch für die Mittelpunkte der mittleren Querschnitte beider Rollen die Abstände $a = o$ und $c = o$ sind, so gilt dies doch nicht für die übrigen Querschnitte. Es ergiebt sich hieraus, wie man leicht sieht, eine Verkleinerung der Wirkung. In welchem Verhältnisse nun diese Verkleinerung zur ganzen Wirkung steht, lässt sich mit hinreichender Schärfe bestimmen, wenn man in der S. 43 gegebenen allgemeinen Formel, nach Substitution der Werthe von $\frac{1}{r^3}$ und $\frac{1}{r^5}$, sich blos an das erste von x unabhängige Glied hält, und das zwischen den Grenzwerthen $\omega = o$ bis $\omega = 2\pi$ genommene Integral desselben, nachdem es mit $n\sin\nu$ und mit $dmdndadc$ multiplicirt, und $nd\nu$ für ds' gesetzt worden ist, zwischen den Grenzen $\nu = o$ bis $\nu = 2\pi$, $m = o$ bis $m = 44{,}4$, $n = 50{,}25$ bis $n = 61{,}35$, $a = o$ bis $a = 15$ und $c = o$ bis $c = 15$ integrirt. Führt man diese Rechnung aus, so erhält man einen Ausdruck von folgender Form

$$A\left(1-\frac{\alpha\alpha}{5000}+\frac{\gamma\gamma}{22000}\right)\cdot\alpha\gamma,$$

worin A blos von i und i' und den Grenzwerthen von m und n abhängig ist, und α und γ die grössten Werthe von a und c bezeichnen. Die gesuchte Verkleinerung, in Theilen der ganzen Wirkung ausgedrückt, ist hiernach

$$= \frac{1}{5000}\alpha\alpha - \frac{1}{22000}\cdot\gamma\gamma,$$

und beträgt nach den angegebenen Zahlenwerthen $\alpha = \gamma = 15$

$$\frac{1}{29}.$$

Zieht man also von obigem Werthe $\frac{1}{29} \cdot 442{,}714$ ab, so erhält man folgenden mit $\pi\pi ii$ zu multiplicirenden Werth des elektrodynamischen Drehungsmoments, welches dem *dritten Hauptfall* entspricht,

$$= 427{,}45.$$

Stellt man nun, nach Analogie mit den Beobachtungen, die gefundenen Rechnungsresultate zusammen, so erhält man folgende Tafel für die berechneten Werthe der elektrodynamischen Drehungsmomente:

Abstand.	Senkrecht auf den magnetischen Meridian.	In der Richtung des magnetischen Meridians.
0	+ 427,45	+ 427,45
300	+ 3,5625	— 1,4544
400	+ 1,4661	— 0,6547
500	+ 0,7420	— 0,3452
600	+ 0,4267	————

Diese Werthe müssen nun, wenn das Ampère'sche Gesetz richtig ist, den beobachteten Werthen proportional sein. In der That, multiplicirt man sämmtliche Werthe mit dem constanten Factor

53,06,

so erhält man den beobachteten sehr nahe kommende Werthe, welche nebst ihren Unterschieden von den letzteren in der folgenden Tafel enthalten sind.

Abstand.	Senkrecht auf d. magnetischen Meridian.	Unterschied.	In d. Richtung d. magnetischen Meridians.	Unterschied
0	+ 22680	+ 280	+ 22680	+ 280
300	+ 189,03	+ 0,90	— 77,17	— 0,06
400	+ 77,79	— 0,34	— 34,74	+ 0,03
500	+ 39,37	— 0,10	— 18,31	— 0,07
600	+ 22,64	— 0,18	————	————

Der erste berechnete Werth, nämlich + 22680, ist hier mit dem 120,9fachem Werthe dessen verglichen worden, welcher bei 300 Millimeter östlichem oder westlichem Abstande erhalten worden war, weil dieser Werth, dem in Art. 6. aus der zweiten Versuchsreihe gezogenen Resultate gemäss, der Wirkung der festen Rolle entspricht, wenn ihr Mittelpunkt mit dem der Bifilarrolle zusammenfällt. Der dabei angegebene Unterschied von 280 Einheiten erscheint daher vergrössert und entspricht einem Beobachtungsfehler von $\frac{1}{3}$ Skalentheile,

welcher in der zweiten Versuchsreihe Art. 5. in der Bestimmung der Dynamometer-Ablenkung bei 300 Millimeter Abstand begangen worden.

Diese vollkommene Uebereinstimmung zwischen den nach der Ampère'schen Formel berechneten und den beobachteten Werthen (die Unterschiede übersteigen nämlich nirgends den möglichen Betrag der unvermeidlichen Beobachtungsfehler), ist bei den so verschiedenen Verhältnissen, auf welche diese Uebereinstimmung sich bezieht, ein vollständiger Beweis der Wahrheit des Ampère'schen Fundamentalgesetzes.

Aus obiger Tafel ersieht man, dass die berechneten Werthe der elektrodynamischen Drehungsmomente sich theils positiv theils negativ ergeben. Die Bedeutung der verschiedenen Vorzeichen ist hierbei folgende. Die Ebenen der beiden Drahtrollen waren gegen einander rechtwinkelig vorausgesetzt worden. Das elektrodynamische Drehungsmoment, welches die feste Rolle auf die bewegliche (Bifilarrolle) ausübt, strebt daher die Ebene der letzteren der Ebene der ersteren parallel zu machen, was von der ursprünglichen rechtwinkeligen Lage aus auf doppelte Weise, nämlich durch Drehung nach beiden Seiten hin geschehen kann. Die eine dieser Drehungen führt nun zu einem solchen Parallelismus der Ebenen, wobei die Ströme um eine auf beide Ebenen senkrechte Axe in gleichem Sinne herumgehen; die andere Drehung führt dagegen zu einem solchen Parallelismus der Ebenen, wobei die Ströme in entgegengesetztem Sinne um eine solche Axe herumgehen. Die elektrodynamischen Drehungsmomente, je nachdem sie die erstere oder die letztere Drehung bewirken, werden in der Rechnung als positiv oder negativ bezeichnet. Die Vorzeichen in obiger Tafel der berechneten Werthe lehren also, dass, wenn die feste Rolle auf die Bifilarrolle aus der Ferne von Norden oder Süden her wirkt, eine Drehung der Bifilarrolle erfolge, welche, wenn sie 90° betrüge, bewirken würde, dass die Ströme in *entgegengesetztem* Sinne um gleich gerichtete Axen herum gingen; wenn dagegen die feste Rolle aus der Ferne von Osten oder Westen her wirkt, eine Drehung der Bifilarrolle erfolge, welche, wenn sie 90° betrüge, bewirken würde, dass die Ströme in *gleichem* Sinne um gleich gerichtete Axen herumgingen. Das letztere findet der Rechnung nach auch dann statt, wenn die Mittelpunkte beider Rollen zusammen fallen.

Auch diese Resultate der Rechnung fanden sich durch die Resultate aller Beobachtungen vollständig bestätigt. Die deshalb zu beachtenden Verhältnisse sind in der oben gegebenen Beschreibung blos deshalb nicht ausführlich erörtert worden, weil die vollständigen Angaben über den Sinn der Strömung in allen einzelnen Theilen der Leitungskette und über den Sinn der beobachteten Drehungen zu vielen Raum gekostet haben würden. Da übrigens zur Prüfung dieser Resultate der Rechnung keine exacten Messungen nöthig sind, so konnte die Bestätigung derselben auch mit den bisherigen Mitteln erlangt werden und ist damit auch schon erhalten worden, weshalb es hier genügt, die Uebereinstimmung der mitgetheilten Beobachtungen mit obigen Rechnungs-Resultaten nur im Allgemeinen zu bemerken.

9.

Das Ampère'sche Fundamentalgesetz giebt die berechneten Drehungsmomente in *absoluten Maassen* ausgedrückt, vorausgesetzt, dass den Werthen der Stromintensität i ein absolutes Intensitätsmaass zum Grunde gelegt werde, und zwar ist hierbei als Grundmaass der Stromintensitäten diejenige Stromintensität zu betrachten, bei welcher zwei gleiche parallele, auf der Verbindungslinie senkrechte Stromelemente aus dem dem Längenmaasse gleichen Abstande eine Kraft auf einander ausüben, welche von dem in der Mechanik festgesetzten Kraftmaasse denselben Bruchtheil bildet, wie das *Quadrat der Länge jener Stromelemente* von dem *Flächenmaasse.* Denn setzt man in der Ampère'schen Formel für die Grösse der elektrodynamischen Kraft zweier Stromelemente von der Länge α und von gleicher Stromintensität, nämlich:

$$-\frac{\alpha\alpha}{rr}ii(\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'),$$

1) den Winkel ε, welchen beide Stromelemente mit einander bilden, $=0°$ oder $=180°$; 2) die Winkel θ und θ', welche beide Stromelemente mit der Verbindungslinie bilden, $=90°$ oder $=270°$; 3) den Abstand $r=1$; so erhält man als Werth der elektrodynamischen Kraft für die *Einheit* der Stromintensität

$$\pm\,\alpha\alpha,$$

d. h. in der Ampèreschen Formel wird ein solches Maass der Stromintensität vorausgesetzt, bei welchem die *elektrodynamische Kraft in dem bezeichneten Falle* sich zu dem *Kraftmaasse* verhält, wie

$$\alpha\alpha:1,$$

d. i. wie das *Quadrat der Länge jener Stromelemente* zum *Flächenmaass.* Diesem Grundmaasse für die Stromintensität liegt also das *elektrodynamische Princip* selbst zum Grunde.

Zum Zweck unserer Messungen haben wir dagegen dem Maasse der Stromintensität das *elektromagnetische Princip* zum Grunde gelegt, wonach als Grundmaass der Stromintensitäten diejenige Stromintensität zu betrachten ist, welche in einem das Flächenmaass begrenzenden Leiter statt finden muss, um auf einen *entfernten Magnet* gleiche Wirkungen hervorzubringen, wie ein Magnet an derselben Stelle, dessen magnetisches Moment dem von Gauss in der *Intensitas* etc. festgesetzten absoluten Maasse gleich ist, und dessen Axen gleiche Richtung hat, wie die Normale der Stromebene.

Diese beiden Grundmaasse lassen sich nun nach der von Ampère gegebenen Relation zwischen der *Elektrodynamik* und dem *Elektromagnetismus* mit einander vergleichen.. Denn nach dieser Relation kann auch der andere *entfernte Magnet* auf gleiche Weise, wie der erstere, durch einen geschlossenen Strom ersetzt werden.

Nun wird das Drehungsmoment eines Magnets auf einen anderen entfernten Magnet, wenn ihre magnetischen Momente nach absolutem Maasse $=m$ und m' sind, wie sich aus den von Gauss gegebenen Vorschriften (Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840. S. 26—34) leicht ergiebt,

$$=\frac{mm'}{r^3}\sin\delta\,.\sqrt{(1+3\cos\psi^2)}$$

gefunden, wo ψ den Winkel bezeichnet, welchen die Axe des ersten Magnets mit der Verbindungslinie r, und δ den Winkel, welchen die Axe des zweiten Magnets mit derjenigen Richtung einschliesst, für welche das Drehungsmoment $= 0$ ist.

Setzt man nun an die Stelle des ersten Magnets einen Strom von der Intensität $\varkappa$, der die kleine Ebene λ begrenzt, deren Normale gleiche Richtung wie die Axe des Magnets hat, so ergiebt sich nach dem *elektromagnetischen* Fundamentalgesetze (wonach die Stärke der elektromagnetischen Kraft eines Stromelements von der Länge α und Intensität $\varkappa$ auf ein Element magnetischen Fluidums μ in der Entfernung r, wenn r mit α den Winkel φ einschliesst, $=\frac{\alpha\varkappa\mu}{rr}\,.\sin\varphi$ gegeben ist, und zwar normal auf die Ebene, welche mit α und r parallel ist) das von diesem Strome auf den entfernten Magnet ausgeübte Drehungsmoment

$$=\frac{k\lambda\,.\,m'}{r^3}\sin\delta\,.\sqrt{(1+3\cos\psi^2)},$$

worin für die Stromintensität $\varkappa$ das oben angegebene *elektromagnetische Maass* zum Grunde liegt. Es muss also, dieser Maassbestimmung gemäss,

$$\varkappa\lambda = m$$

sein, wenn dieses Drehungsmoment dem vorigen gleich sein soll.

Nach der von Ampère gegebenen Relation kann nun ohne Aenderung der Wirkung auf gleiche Weise *der zweite Magnet durch einen geschlossenen Strom ersetzt werden*, für welchen

$$\varkappa'\lambda' = m'$$

ist, und es ergiebt sich daraus die Grösse des Drehungsmoments, welches der erste Strom auf den zweiten ausübt,

$$=\frac{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'}{r^3}\sin\delta\,.\sqrt{(1+3\cos\psi^2)},$$

worin für die Stromintensitäten $\varkappa$ und $\varkappa'$ das oben angegebene *elektromagnetische Maass* zum Grunde liegt.

Berechnet man nun aber nach der Ampère'schen Formel (S. 249) das Drehungsmoment, welches ein solcher kleiner Planstrom auf einen anderen aus grosser Entfernung ausübt, so ergiebt sich dessen Werth

$$=-\frac{1}{2}\frac{ii'\lambda\lambda'}{r^3}\sin\delta\,.\sqrt{(1+3\cos\psi^2)}\;^{*}),$$

---

*) Der Fall, wo $\delta=\psi=90^\circ$ ist, folglich das elektrodynamische Drehungsmoment

$$=-\frac{1}{2}\frac{ii'\lambda\lambda'}{r^3}$$

ist, entspricht dem früher betrachteten *ersten Hauptfalle*, für welchen die Stärke des Drehungsmoments S. 254

$$=-\frac{\pi\pi}{2}\frac{mmnn}{l^3}ii'\left[3\frac{aa}{ll}-2+\frac{15}{32}\left(7\frac{aa}{ll}-1\right)\left(1+\frac{nn}{aa}\right)\frac{aamm}{l^4}+\dots\right]$$

gefunden worden ist. Für grosse Entfernungen, wie hier vorausgesetzt worden, ver-

worin für die Stromintensitäten i und i' das oben angegebene *elektrodynamische Maass* zum Grunde liegt.

---

schwindet m und n gegen l, und r kann für a und l gesetzt werden; das Drehungsmoment wird also für diesen Fall

$$= -\frac{\pi\pi mm\, nn}{2\, r^3} ii',$$

was mit dem aus obiger Formel für diesen Fall abgeleiteten Werthe identisch ist, weil πmm und πnn die Flächenräume λ und λ' bezeichnen.

Die oben angeführten *analogen* Gesetze des Magnetismus, des Elektromagnetismus und der Elektrodynamik, aus denen der einfache Zusammenhang dieser verschiedenen Klassen von Erscheinungen leicht übersehen werden kann, welcher unmittelbar aus den *Grundgesetzen* nicht einleuchtet, können aus letzteren auf folgende Weise abgeleitet werden.

1) *Ableitung des Gesetzes der magnetischen Wirkung, welche ein Magnetstab auf einen andern in der Ferne ausübt.*

Aus dem *Grundgesetz des Magnetismus* hat Gauss in den «Resultaten etc. 1840» S. 26 ff. das Gesetz der magnetischen Wirkung abgeleitet, welche ein Magnetstab auf die in einem entfernten Punkte concentrirt gedachte Einheit des nördlichen magnetischen Fluidums ausübt. Dieses Gesetz ist folgendes: Wenn Fig. 12. A der Mittelpunkt des

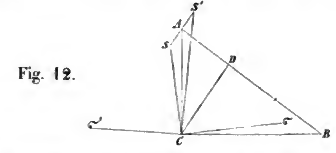


Fig. 12.

Magnetstabes ist, dessen magnetisches Moment mit m bezeichnet werde, n ein beliebiger anderer Punkt seiner durch A gelegten magnetischen Axe auf der Seite des Nordpols, C der Punkt, für welchen die magnetische Wirkung des Magnetstabes auf die daselbst concentrirt gedachte Einheit des nördlichen magnetischen Fluidums bestimmt werden soll, und wenn CB eine Normale gegen CA in derjenigen Ebene ist, in welcher n, A, C liegen, und B ihr Durchschnittspunkt mit der magnetischen Axe, und wenn endlich D von AB das Stück $AD = \frac{1}{3} AB$ abschneidet: so ist *die Stärke* der Kraft, welche der Magnetstab auf die in C concentrirt gedachte Einheit des nördlichen magnetischen Fluidums ausübt,

$$= \frac{CD}{AD} \cdot \frac{m}{AC^3}.$$

Die *Richtung* dieser Kraft ist, wenn nAC ein stumpfer Winkel ist, CD, wenn nAC ein spitzer Winkel ist, DC.

Nun ist im Dreieck ABC, weil $ACB = 90^0$ ist,

$$AC = AB \cos BAC = 3AD \cos DAC,$$

Ferner ist in dem Dreieck ACD

$$CD = \sqrt{(AC^2 + AD^2 - 2AC.AD.\cos DAC)} = AD.\sqrt{(1 + 3\cos DAC^2)};$$

folglich ist

$$\frac{CD}{AD} = \sqrt{(1 + 3\cos DAC^2)}.$$

Setzt man $AC = r$ und $nAC = \psi$, so ist, da $\cos DAC^2 = \cos nAC^2 = \cos\psi^2$, die *Stärke* der Kraft

$$\frac{CD}{AD} \cdot \frac{m}{AC^3} = \frac{m}{r^3} \cdot \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}.$$

Befindet sich in einem Stahlstabe bei C die nordmagnetische Masse $+\mu$ und die südmagnetische Masse $-\mu$ durch die gegen r unendlich kleine Linie α geschieden, so ist $\alpha\mu = m'$ das magnetische Moment des Stahlstabes und $+\frac{m\mu}{r^3}\sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}$ und

Es folgt nun hieraus, dass, wenn der letztere Werth, nach dem *elektrodynamischen* Maasse, mit dem ersteren, nach dem *elektromagnetischen* Maasse,

---

$-\frac{m\mu}{r^3}\sqrt{(1+3\cos\psi^2)}$ sind die beiden Kräfte, welche auf ihn in der Richtung CD oder DC wirken. Ist n' der Endpunkt der kleinen Linie α, in welchem die Masse $+\mu$ concentrirt gedacht wird, und C ihr Mittelpunkt, und bezeichnet δ den Winkel, welchen Cn mit der Richtung CD oder DC der oben bestimmten Kraft bildet, so ist $\alpha\sin\delta$ der Abstand der Angriffspunkte beider Kräfte senkrecht gegen ihre Richtung geschätzt. Das Product dieses Abstandes in den Werth obiger Kraft giebt dann das Drehungsmoment, welches der Magnetstab in A auf den Magnetstab in C ausübt,

$$=\alpha\sin\delta.\frac{m\mu}{r^3}\sqrt{(1+\cos 3\psi^2)}=\frac{mm'}{r^3}\sin\delta\sqrt{(1+3\cos\psi^2)}.$$

Der Magnet bei C wird dadurch in der Ebene ACD in demjenigen Sinne gedreht, in welchem Cn der Richtung CD oder DC der oben bestimmten Kraft genähert wird.

2) *Ableitung des Gesetzes der electromagnetischen Wirkung, welche ein geschlossener Planstrom auf einen Magnetstab in der Ferne ausübt.*

Aus dem *elektromagnetischen Grundgesetze* kann zunächst die Wirkung eines geschlossenen Stroms auf die nordmagnetische Masse $+\mu$ des Magnetstabes, welche in einem Punkte bei C Fig. 12. concentrirt gedacht wird, bestimmt werden. Man lege durch C und durch den Mittelpunkt A der vom Strome begrenzten Ebene eine auf letztere senkrechte Ebene ACB, CB sei senkrecht auf CA; s und s' seien die Durchschnittspunkte des Stromes mit dieser Ebene. Man zerlege ferner jedes Stromelement in 3 aufeinander senkrechte Elemente, das erste nach C gerichtet und das zweite senkrecht auf die Richtung CB. Die nach C gerichteten Elemente haben auf den Magnetismus in C keine Wirkung und können also ganz ausser Betracht bleiben, weil für sie in dem allgemeinen Ausdrucke der Stärke der Kraft $=\frac{\alpha k\mu}{rr}\sin\varphi$ der Werth von $\varphi=0$ ist. Zur zweiten Klasse gehören die beiden in s und s' auf der Ebene ACB perpendikularen Elemente, deren Länge mit $\mathrm{d}s$ bezeichnet werde. Die Kraft, welche das erstere auf den Magnetismus in C ausübt, hat dem elektromagnetischen Grundgesetze nach die Richtung $C\varsigma$ senkrecht gegen Cs; die Kraft des letzteren hat die Richtung $C\varsigma'$ senkrecht gegen Cs', und die Stärke dieser Kräfte ist, wenn $\varkappa$ die Stromintensität nach elektromagnetischem Grundmaasse bezeichnet,

$$\frac{\varkappa\mu\,\mathrm{d}s}{Cs^2} \text{ und } \frac{\varkappa\mu\,\mathrm{d}s}{Cs'^2}.$$

Zerlegt man nun diese Kräfte nach CA und senkrecht darauf, so erhält man

$$\text{die mit } CA \text{ parallele Componente} = \frac{\varkappa\mu\,\mathrm{d}s}{Cs^2}\cos AC\varsigma + \frac{\varkappa\mu\,\mathrm{d}s}{Cs'^2}\cos AC\varsigma'$$

$$\text{die auf } CA \text{ senkrechte Componente} = \frac{\varkappa\mu\,\mathrm{d}s}{Cs^2}\sin AC\varsigma - \frac{\varkappa\mu\,\mathrm{d}s}{Cs'^2}\sin AC\varsigma'.$$

Bezeichnet man nun den Winkel, welchen die Normale der Stromebene AB mit $AC=r$ bildet, durch ψ und beachtet, dass As und As' gegen r verschwinden soll, so erhält man

$$Cs = r - As\cos\psi, \qquad Cs' = r + As'\cos\psi$$

$$\text{oder } \frac{1}{Cs}=\frac{1}{r}\left(1+\frac{As}{r}\cos\psi\right), \quad \frac{1}{Cs'}=\frac{1}{r}\left(1-\frac{As'}{r}\cos\psi\right);$$

$$\cos AC\varsigma = \sin ACs = ACs$$

$$\cos AC\varsigma' = \sin ACs' = ACs'$$

$$sCs' = \frac{(ss')}{r}\cos\psi.$$

Substituirt man diese Werthe, und bezeichnet die Entfernung ss' mit x, so erhält man die Componente nach CA

$$=\frac{\varkappa\mu}{r^3}\cos\psi\,.\,x\,\mathrm{d}s.$$

Da alle Stromelemente sehr nahe um A liegen, so kann der Factor $\frac{\varkappa\mu}{r^3}\cos\psi$ als constant betrachtet werden, und man erhält also die Componente nach CA für alle Stromelemente zweiter Classe:

identisch sein soll, die oben definirten elektrodynamischen und elektromagnetischen Maasse der Stromintensitäten in solchem Verhältnisse zu einander

---

$$=\frac{\varkappa\mu}{r^3}\cos\psi.\int x\,ds.$$

Das Integral $\int x\,ds$ bezeichnet aber den vom Strome begrenzten Flächenraum $=\lambda$; folglich ist die Componente nach CA für alle Stromelemente *zweiter* Classe

$$=\frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\cos\psi.$$

Ebenso ergiebt sich die Componente senkrecht auf CA für alle Stromelemente *zweiter* Classe

$$=\frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\sin\psi.$$

Auf ähnliche Weise findet man ferner die Componente nach CA für alle Stromelemente *dritter* Classe

$$=\frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\cos\psi,$$

die Componente senkrecht auf CA für alle Stromelemente *dritter* Classe

$$=0.$$

Die Resultante aller dieser Kräfte ist also

$$=\frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\sqrt{(4\cos\psi^2+\sin\psi^2)}=\frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\sqrt{(1+3\cos\psi^2)}.$$

Die Richtung dieser Resultante fällt in die Ebene ACB und macht mit CA einen Winkel, dessen Tangente der Componente senkrecht auf AC, $=\frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\sin\psi$, dividirt durch die Componente nach AC, $=2\frac{\varkappa\lambda\mu}{r^3}\cos\psi$, gleich ist, d. i.

$$=\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\psi.$$

Da nun $CAB=\psi$ und $ACB=90^\circ$ ist, so ist, wenn $AD=\frac{1}{3}AB$ gemacht wird,

$$\sin ACD:\sin\psi=\tfrac{1}{3}AB:CD$$
$$\cos ACD:\cos\psi=\tfrac{2}{3}AB:CD,$$

folglich

$$\operatorname{tang}ACD=\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\psi,$$

woraus hervorgeht, dass CD die Richtung der Resultante ist. Hierbei ist vorausgesetzt, dass, wenn man sich senkrecht auf die Stromebene in A stehend denkt, den Kopf in B, der Strom im Sinne der scheinbaren täglichen Bewegung der Sonne herumlaufe. Findet das entgegengesetzte statt, so ist die Richtung der Kraft CD mit DC zu vertauschen. Hiernach hat der geschlossene Strom in A auf den Magnetismus in C dieselbe Wirkung, wie nach (1) ein Magnetstab in A, dessen magnetisches Moment

$$m=\varkappa\lambda$$

ist und dessen magnetische Axe mit der Normale der Stromebene zusammenfällt, und zwar den Südpol auf derjenigen Seite der Stromebene, von welcher aus betrachtet der Strom in der Richtung der scheinbaren täglichen Bewegung der Sonne läuft. Es folgt daraus, dass wenn man wie in (1) in C einen Magnetstab stellt, dessen magnetisches Moment $=m'$ ist, und dessen magnetische Axe mit CD den Winkel δ macht, das Drehungsmoment, welches der geschlossene Strom in A auf diesen Magnetstab übt, dem in (1) gefundenen Drehungsmomente gleich ist, wenn man darin m mit $\varkappa\lambda$ vertauscht, also

$$=\frac{\varkappa\lambda m'}{r^3}\sin\delta\sqrt{(1+3\cos\psi^2)}$$

was zu beweisen war.

3) *Ableitung des Gesetzes der elektrodynamischen Wirkung, welche ein geschlossener Planstrom auf einen andern in der Ferne ausübt.*

Das Gesetz der Wirkung, welche ein geschlossener Planstrom auf ein *Stromelement* in der Ferne ausübt, hat Ampère schon S. 214, 227 seiner Abhandlung aus dem Grundgesetze der Elektrodynamik abgeleitet. Es lässt sich dasselbe auf folgende Weise aus-

stehen müssen, dass $\varkappa$ und $\varkappa'$ nach dem letzteren Maasse die nämlichen Stromintensitäten bezeichnen wie $i\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $i'\sqrt{\frac{1}{2}}$ nach dem ersteren. Hieraus ergiebt sich, dass alle nach dem *elektromagnetischen* Grundmaasse gemachten Bestimmungen der Stromintensitäten mit dem constanten Factor $\sqrt{2}$ zu multipliciren sind, um sie auf das der Ampère'schen Formel zum Grunde liegende *elektrodynamische* Intensitätsmaass zu reduciren.

Diess vorausgesetzt, lässt sich selbst auch noch der *constante Factor*, mit welchem alle berechneten Werthe zu multipliciren sind, um die beobachteten zu geben, aus den Galvanometer-Beobachtungen ableiten, und die Vergleichung des so bestimmten Factors mit dem oben angewendeten, nämlich mit

$$53{,}06,$$

giebt dann endlich noch den Prüfstein für die Richtigkeit der aus Ampère's Formel berechneten *absoluten* Werthe, oder für die Richtigkeit der zwischen der Elektrodynamik und dem Elektromagnetismus gegebenen Relation.

Es wird hierzu dreierlei erfordert: 1) ist der Factor zu bestimmen, mit welchem alle von uns beobachteten Dynamometerwirkungen zu multipliciren sind, um sie auf das absolute Maass der *Drehungsmomente* zu reduciren; 2) ist der Factor zu bestimmen, mit welchem alle von uns beobachteten Galvano-

---

sprechen: Befindet sich das Stromelement in C Fig. 12. und der geschlossene Planstrom in A, ist AB die Normale auf der Stromebene, CB senkrecht auf CA, und $AD = \frac{1}{2}AB$, so ist die Kraft, welche der Strom in A auf das Stromelement in C übt, auf den beiden Richtungen des Stromelements selbst und der Linie CD senkrecht, und die Stärke der Kraft ist, wenn nach dem elektrodynamischen Grundmaasse die Intensität des geschlossenen Stromes mit i, und die des Stromelements mit i' bezeichnet wird, und ferner ds' die Länge des Stromelements, $r = AC$ und $\psi = CAD$ ist,

$$= \tfrac{1}{2}\, ii'\, ds' \frac{\lambda}{r^3} \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}.$$

Befindet sich nun auch in C ein geschlossener Planstrom und schliesst die Normale seiner Ebene mit CD den Winkel δ ein, so kann man jedes Element dieses Stromes in zwei Elemente zerlegen, das eine parallel der Linie, in welcher eine auf CD normale Ebene die Stromebene schneidet, das andere senkrecht auf dieser Schneidungslinie. Die ersteren Elemente kann man paarweise von gleicher Länge ds' ordnen und durch Perpendikel auf jener Schneidungslinie verbinden. Bezeichnet man die Länge dieses Perpendikels mit x, so ergiebt sich, dass die Wirkung des geschlossenen Stromes in A auf ein solches Paar in einem Drehungsmomente besteht, welches dem Producte von $x \sin\delta$ in obige Kraft gleich ist, d. i.

$$= \tfrac{1}{2}\, ii' \frac{\lambda}{r^3} \sin\delta \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)} . x\, ds'$$

Der Strom in A übt also auf alle mit obiger Schneidungslinie parallelen Stromelemente das Drehungsmoment

$$= \tfrac{1}{2}\, ii' \frac{\lambda}{r^3} \sin\delta \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)} . \int x\, ds'.$$

aus, wo das Integral $\int x\, ds'$ den von dem Strome in C begrenzten Flächenraum $= \lambda'$ bezeichnet; folglich ist dieses Drehungsmoment

$$= \tfrac{1}{2}\, ii' \frac{\lambda\lambda'}{r^3} \sin\delta . \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}.$$

Betrachtet man auf ähnliche Weise die Wirkung des geschlossenen Stromes in A auf die gegen obige Schneidungslinie senkrechten Elemente, so ergiebt sich das Drehungsmoment $= 0$, woraus folgt, dass das so eben angegebene Drehungsmoment die ganze Wirkung ist, welche der geschlossene Strom in A auf den geschlossenen Strom in C ausübt, was zu beweisen war.

meterwirkungen zu multipliciren sind, um sie auf das *elelektromagnetische Grundmaass der Stromintensitäten* zu reduciren; 3) sind die *Flächenräume* zu bestimmen, welche von der Bifilarrolle und von der festen Rolle des Dynamometers begrenzt werden.

1) Bestimmung des Factors zur Reduction der beobachteten Dynamometerwirkungen auf absolutes Maass.

Die beobachteten Dynamometerablenkungen sind nach *Skalentheilen* gemessen und sind daher, um sie auf absolutes *Winkelmaass* zu bringen, bei der Kleinheit der Winkel, blos mit dem doppelten Horizontalabstande des Spiegels von der Skale (= 6612,6 Skalentheilen) zu dividiren. Es entspricht ferner die angegebene Zahl der Skalentheile der Differenz der positiven und negativen Ablenkung, und ist daher ausserdem noch mit 2 zu dividiren, um sie auf die einfache Ablenkung zu reduciren. Bezeichnet also x die in den obigen Tafeln angegebene *Zahl der Skalentheile,* so giebt

$$\frac{x}{13225,2}$$

die einfache *Angularablenkung* in Theilen des Halbmesser. Bezeichnet ferner S das im 6. Artikel angegebene *statische Moment* der Bifilarrolle, worauf die Ablenkungen reducirt worden sind, so braucht man, wenn x den reducirten Werth bezeichnet, die Angularablenkung $= \frac{x}{13225,2}$ nur mit jenem Werthe von S zu multipliciren, um das *elektrodynamische Drehungsmoment,* welches die Ablenkung hervorbrachte, nach den in der Statik festgesetzten Grundmaassen ausgedrückt zu erhalten. Es ist also dieses Moment

$$= \frac{x}{13225,2} \cdot S = 3634 \cdot x.$$

Folglich ist 3634 der constante Factor, womit die am Schlusse von Art. 6. angegebenen Dynamometer-Ablenkungen zu multipliciren sind, um auf absolutes Maass reducirt zu werden.

2) Bestimmung des Factors zur Reduction der beobachteten Galvanometerwirkungen auf absolutes Maass.

Die Galvanometerwirkungen sind oben ebenfalls in *Skalentheilen* angegeben, und zwar entspricht die angegebene Zahl y der Differenz der positiven und negativen Ablenkung. Da nun der horizontale Abstand des Spiegels von der Skale beim Galvanometer 1103 Skalentheile betrug, so ergiebt sich die einfache *Angularablenkung* nach absolutem Winkelmaasse, d. h. in Theilen des Halbmessers,

$$= \frac{y}{4412}.$$

Diese Angularablenkung wurde durch eine Drahtrolle hervorgebracht, durch welche der zu bestimmende Strom ging, und die in 217 Millimeter Abstand westlich von dem kleinen Magnetometer aufgestellt war.

Multiplicirt man den Sinus dieser Angularablenkung mit der Directionskraft $= m'T$, welche der Erdmagnetismus $= T$ auf die Boussole übte, deren

magnetisches Moment $= m'$ war; so erhält man das Drehungsmoment, womit der Erdmagnetismus die abgelenkte Boussole zum magnetischen Meridian zurücktrieb,

$$= m' T . \sin \frac{y}{4412} . \frac{180°}{\pi} .$$

Es ist hierin nach absolutem Maasse der Werth von

$$T = 1{,}91$$

zu setzen, wie derselbe am Platze der Boussole gefunden worden war *).

Die Boussole wurde nun in jener abgelenkten Lage im Gleichgewicht erhalten, durch dasjenige Drehungsmoment, welches der Strom in der 217 Millimeter entfernten Drahtrolle auf sie übte, und es war folglich die Stärke dieses letztern Drehungsmoments gleichfalls

$$= 1{,}91 . m' \sin \frac{y}{4412} . \frac{180°}{\pi} .$$

Nach dem S. 54 in der Anmerkung unter (2) erwiesenen Gesetze würde nun, wenn der Strom hiebei aus einer *grossen* Entfernung r gewirkt hätte, dieses letztere Drehungsmoment

$$= \frac{\varkappa \lambda m'}{r^3} \sin \delta . \sqrt{(1 + 3 \cos \psi^2)}$$

sein, worin der Werth von ψ für unseren Fall $= 0$, und δ die Ergänzung des beobachteten Ablenkungswinkels zu 90° ist, wodurch dieser Ausdruck

$$= 2 \frac{\varkappa \lambda m}{r^3} \cos \frac{y}{4412} . \frac{180°}{\pi}$$

wird. Es ist nun aber die Entfernung von 217 Millimetern viel zu klein, um dieses Gesetz unmittelbar in Anwendung zu bringen. Ich habe daher, um diese Anwendung zu vermitteln, besondere Versuche angestellt zur Vergleichung der Wirkung der Rolle aus 217 Millimeter Entfernung mit ihrer Wirkung aus grössern Entfernungen r, für welche obiges Gesetz zulässig ist, und habe das Verhältniss dieser Wirkungen wie

$$1 : 1388 . \frac{10^4}{r^3}$$

gefunden. Das beobachtete Drehungsmoment $= 1{,}91 . m' \sin \frac{y}{4412} . \frac{180°}{\pi}$ muss also mit dem Factor

$$1388 . \frac{10^4}{217^3}$$

multiplicirt werden, wenn es dem für grosse Entfernungen geltenden Ausdrucke gleich gesetzt werden soll; man erhält also

$$1388 . \frac{10^4}{217^3} . 1{,}91 . m' \sin \frac{y}{4412} . \frac{180°}{\pi} = 2 \frac{\varkappa \lambda m'}{217^3} . \cos \frac{y}{4412} . \frac{180°}{\pi} ,$$

und hieraus folgt bei kleinen Bögen der Werth

$$\varkappa \lambda = 3004 . y .$$

*) Die Boussole stand nahe an der Wand eines Nebenzimmers, in welchem grosse Magnete aufgestellt waren; wurden diese Magnete entfernt, so sank der Werth von T auf 1,83 herab, was ungefähr der gegenwärtige Werth des horizontalen Theils des Erdmagnetismus in Leipzig ist.

Durch genaue Abmessung war aber

$$\lambda = 8313440 \text{ Quadratmillimeter}$$

gefunden worden. Hieraus ergiebt sich

$$x = 0{,}0003614 \,.\, y,$$

woraus folgt, dass

$$0{,}0003614$$

der Factor ist zur Reduction der beobachteten Galvanometerwirkungen auf das *elektromagnetische* Grundmaass der Stromintensität. Es ist dieser Factor schon oben im 6. Artikel zum Zwecke der Reduction der Beobachtungen auf gleiche Directionskraft der Bifilarrolle angeführt worden. Die Stromintensität i nach dem der Ampère'schen Formel zum Grunde liegenden *elektrodynamischen* Grundmasse erhält man endlich durch Multiplication der in Skalentheilen beobachteten Wirkungen mit dem Factor $0{,}0003614 \,.\, \sqrt{2}$. Es ist jedoch zu bemerken, dass dieser Reductionsfactor auf Erfahrungsdaten beruhet, welche zum Theil nur beiläufig erhalten worden und daher auf keine grosse Präcision Anspruch machen.

3) Bestimmung der Flächenräume, welche von der Bifilarrolle und von der festen Rolle des Dynamometers begrenzt werden.

Der Flächenraum der Bifilarrolle ist schon im 6. Artikel

$$= 29314000 \text{ Quadratmillimeter}$$

angegeben worden. Auf dieselbe Weise wie dieser war auch der Flächenraum der anderen festen Rolle des Dynamometers bestimmt worden, nämlich

$$= 31327000 \text{ Quadratmillimeter.}$$

Es leuchtet ein, dass auch diese Bestimmung in Betracht der indirecten Methode, nach welcher sie gefunden worden, auf keine grosse Präcision Anspruch machen könne.

Mit Hülfe dieser drei Bestimmungen lässt sich nun endlich auch noch der *absolute* Werth der elektrodynamischen Wirkungen, wie er sich aus Ampère's Fundamentalgesetz ergiebt, der erfahrungsmässigen Prüfung unterwerfen. Aus (2) ergiebt sich nämlich der Werth von ii, welcher der *normalen* Stromintensität, auf welche die Beobachtungen reducirt sind, entspricht. Setzt man nämlich für dieselbe nach S. 38.

$$yy = 100000,$$

so ist

$$ii = 2xx = 2 \,.\, 0{,}0003614^2 \,.\, yy = 0{,}02612.$$

Ferner ersieht man leicht, dass in der S. 255 nach der Ampère'schen Formel gemachten Berechnung des elektrodynamischen Drehungsmoments, der Flächenraum der Bifilarrolle nur zu

$$\pi \,.\, 55{,}8^2 \text{ Quadratmillimetern}$$

in Anschlag gebracht worden ist, statt derselbe sich nach (3)

$$= 29314000 \text{ Quadratmillimeter}$$

ergeben hat, und dass auf gleiche Weise der Flächenraum der festen Rolle des Dynamometers a. a. O. nur zu

$$\tfrac{1}{3}\pi \,.\, 44{,}4^3 \text{ Quadratmillimeter}$$

in Rechnung gebracht ist, statt derselben sich nach (3)

$$= 21327000 \text{ Quadratmillimeter}$$

ergeben hat. Hieraus folgt, dass die in der Tafel S. 257 aufgeführten *berechneten* Werthe mit

$$\frac{29314000 \,.\, 21327000}{\tfrac{1}{3}\pi\pi \,.\, 55{,}8^2 \,.\, 44{,}4^3} \,.\, \pi\pi ii = 180000$$

zu multipliciren sind, um die elektrodynamischen Drehungsmomente nach Ampère's Fundamentalgesetze in absolutem Maasse zu bestimmen. Aus (1) ersieht man aber, dass die in Skalentheilen *beobachteten* Dynamometerwirkungen in der Tafel S. 39 mit dem Factor 3634 zu multipliciren sind, um sie auf absolute Drehungsmomente zu reduciren. Dividirt man folglich mit diesem letzteren Factor den vorhergehenden, so erhält man den Factor 49,5, mit welchem die in der Tafel S. 49 aufgeführten *berechneten* Werthe zu multipliciren sind, um mit den in der Tafel S. 39 aufgeführten *beobachteten* Werthen verglichen zu werden. Dieser Factor ist etwa um 6 Procent kleiner als der oben unmittelbar aus der Vergleichung der berechneten und beobachteten Werthe abgeleitete Factor 53,06, eine Differenz, wie sie bei so vielen zur Bestimmung des Factors nothwendigen aus der Erfahrung entnommenen Elementen, unter denen mehrere nur beiläufig bestimmt worden sind (siehe [2] und [3]), erwartet werden musste. Es wird also hierdurch die Richtigkeit der aus Ampère's Formel berechneten *absoluten* Werthe oder die Richtigkeit der zwischen der Elektrodynamik und dem Elektromagnetismus aufgestellten Relation in so weit bestätigt gefunden, als nur die gemachten Erfahrungen verbürgt werden können. Diese Prüfung der *absoluten Werthe* oder der angegebenen Relationen zwischen der *Elektrodynamik* und dem *Elektromagnetismus* lag ursprünglich nicht in dem Zwecke der hier mitgetheilten Versuche, welcher blos die Abhängigkeit der elektrodynamischen Kraft von der gegenseitigen Lage und Entfernung der auf einander wirkenden Leitungsdrähte betraf, sonst würden Einrichtungen getroffen worden sein, um die galvanischen Ströme auch ihrer *absoluten* Intensität nach mit grösserer Präcision zu bestimmen, so wie auch die Zahl der Umwindungen der beiden Rollen des Dynamometers *direct* zu ermitteln; jene Prüfung ist aber beiläufig mit angeführt worden, weil die beschriebenen Versuche die wesentlichen Data an die Hand gaben. Weil aber nicht *alle* diese Data die hiefür wünschenswerthe Präcision besitzen, so muss eine schärfere Ausführung dieser Prüfung einer künftigen Gelegenheit vorbehalten werden. Welche Einrichtungen und Abänderungen in den Versuchen zu treffen sein würden, um den hier weniger genau bestimmten Datis eine grössere Präcision zu verschaffen, leuchtet von selbst leicht ein und bedarf keiner weiteren Erörterung.

Volta-Induction mit dem Elektro-Dynamometer.

10.

Wir haben bisher die erste Klasse elektrodynamischer Erscheinungen betrachtet, nämlich die von Ampère entdeckten, welche die Kräfte betreffen, womit die *Stromträger* bei gegebenen Stromintensitäten einander zu bewegen suchen, und haben das von Ampère für diese Klasse von Erscheinungen aufgestellte Gesetz bestätigt gefunden. Zu dieser ersten Klasse elektrodynamischer Erscheinungen ist durch Faraday's Entdeckung 10 Jahre später eine zweite Klasse noch hinzugekommen, wo die elektrodynamischen Wirkungen in Kräften bestehen, welche nicht die Stromträger, sondern die *Elektricität in den Stromträgern* zu bewegen suchen. Man kann für diese unter dem Namen der *Volta-Induction* begriffenen Erscheinungen zwei Fundamentalversuche unterscheiden, welche beide von Faraday herrühren.

Gleich im Beginne seiner «Experimental-Untersuchungen über Elektricität», Poggendorff's Annalen 1832. Bd. 25. S. 93 Art. 10, beschreibt nämlich Faraday den *ersten* Fundamentalversuch der Volta-Induction, wo zwei isolirte Kupferdrähte dicht neben einander auf einer Holzwalze aufgewunden waren, und der eine mit dem Galvanometer, der andere mit einer Volta'schen Säule in Verbindung gebracht wurde, und wo die Entstehung eines Stromes im erstern Drahte am Galvanometer jedesmal in dem Momente beobachtet wurde, wo die Kette, zu welcher der zweite Draht gehörte, entweder gelöst oder wieder geschlossen wurde. Der *zweite* Fundamentalversuch folgt darauf in Art. 18, wo er zwei Kupferdrähte in gleichen Zickzackbiegungen getrennt von einander auf zwei Brettern befestigt, und den einen mit dem Galvanometer, den andern mit der Volta'schen Säule in Verbindung gesetzt hat, und wo die Entstehung eines Stromes im erstern Drahte am Galvanometer jedesmal in dem Momente beobachtet wurde, wo das Brett mit diesem Drahte entweder aus der Ferne plötzlich genähert und auf das Brett mit dem zweiten Drahte aufgelegt, oder wo das aufliegende Brett plötzlich aufgehoben und von dem andern entfernt wurde.

Nach Faraday haben sich besonders Nobili und Lenz mit dieser Art der Induction beschäftigt und letzterer hat ein einfaches Gesetz aufgestellt, wodurch die Induction eines Stromes auf einen bewegten Leiter auf die Ampère'schen Sätze der elektrodynamischen Bewegungen zurückgeführt wird.

«Gleich bei Durchlesung der Abhandlung Faraday's», sagt Lenz, Poggendorff's Annalen 1834. Bd. 31. S. 484 f., «schien es mir, als müssten sich sämmtliche Versuche der elektrodynamischen Vertheilung sehr einfach auf die Sätze der elektrodynamischen Bewegungen zurückführen lassen, so dass, wenn man diese als bekannt voraussetzt, auch jene dadurch bestimmt sind, und da sich diese Ansicht bei mir durch vielfache Versuche bestätigt hat, so werde ich sie im Nachfolgenden auseinandersetzen, und theils an bekannten, theils an eigens dazu angestellten Versuchen prüfen. Der Satz, nach welchem

die Reduction der magnetoelektrischen Erscheinungen auf die elektromagnetischen geschieht, ist folgender:

« Wenn sich ein metallischer Leiter in der Nähe eines galvanischen Stroms oder eines Magneten bewegt, so wird in ihm ein galvanischer Strom erregt, der eine solche Richtung hat, dass er in dem ruhenden Drahte eine Bewegung hervorgebracht hätte, die der hier dem Drathe gegebenen gerade entgegengesetzt wäre, vorausgesetzt, dass der ruhende Draht nur in Richtung der Bewegung und entgegengesetzt beweglich wäre.»

«Zur Bestätigung dieses Satzes, so weit er die Induction eines Stroms auf einen bewegten Leiter betrifft, führt nun Lenz folgende drei Versuche von Faraday, von sich und von Nobili an.»

«*a*. Wenn von zwei geradlinigen, einander parallelen Leitern einer von einem galvanischen Strom durchlaufen wird, und wenn man den andern Leiter jenem in paralleler Richtung nähert, so wird während der Bewegung im bewegten Leiter ein entgegengesetzter Strom von dem im unbewegten hervorgerufen; entfernt man ihn aber, so ist der erregte Strom mit dem erregenden gleichlaufend.» (Faraday.)

«*b*. Wenn von zwei verticalen kreisförmigen Leitern, die, von nahe zu gleichem Durchmesser, mit ihren Ebenen auf einander senkrecht stehen, der eine, feststehende, von einem galvanischen Strome durchflossen wird, und wenn man dann den andern, um den gemeinschaftlichen verticalen Durchmesser als Axe drehbaren, plötzlich aus der senkrechten in die parallel anliegende Lage bringt, so entsteht in ihm ein Strom, der dem im andern Leiter entgegengesetzt ist. Diesen letzten Versuch,» sagt Lenz, «habe ich mit zwei kreisförmigen Leitern angestellt, von denen jeder aus 20 Windungen besponnenen Kupferdrahts bestand; der eine ward mit einem 2 Quadratfuss grossen Zinkkupferpaar, der andere mit einem emfindlichen Nobili'schen Multiplicator in Verbindung gesetzt.»

«*c*. Bewegt sich ein begrenzter Leiter, der senkrecht auf einen vom galvanischen Strom durchflossenen unbegrenzten Leiter steht, längs diesem und in Richtung seines Stroms hin, so entsteht in ihm ein Strom, der gegen den begrenzten Leiter gerichtet ist; bewegt sich aber der begrenzte Leiter gegen die Richtung des Stroms im unbegrenzten Leiter, so ist die Richtung des in ihm durch Vertheilung erregten Stroms von dem unbegrenzten Strom abwärts. (Nobili; Poggendorff's Annalen 1833. Nr. 3. S. 407).»

Durch obigen von Lenz zuerst ausgesprochenen Satz werden die inducirten Ströme zunächst nur ihrer Richtung nach bestimmt: eine quantitative Bestimmung für die Intensität der inducirten Ströme hat Lenz nicht gegeben. Es ist diess aber von Neumann in einer noch ungedruckten Abhandlung geschehen, von welcher so eben in Poggendorff's Annalen 1846 Bd. 67. S. 31 ein Auszug erschienen ist. Die hierdurch gewonnenen quantitativen Bestimmungen bedürfen aber einer Prüfung an der Erfahrung, wozu es noch an den erforderlichen Messungen gebricht.

Eigenthümliche Versuche über die Induction von Strömen in einem ruhenden Leiter bei *Lösung* der Kette einer benachbarten Volta'schen Säule hat Henry, Poggendorff's Annalen 1842. Ergänzungsband S. 282, mitgetheilt, wobei er den inducirten Draht in verschiedene Entfernungen und Lagen gebracht hat. Auch hat er den inducirten Strom selbst wieder benutzt, um in einem dritten Leiter einen Strom zu induciren u. s. w. Er schreibt nach diesen Versuchen diesen inducirten Strömen in parallelen Drähten abwechselnd entgegengesetzte Richtungen zu; dem ersten aber dieselbe Richtung wie dem durch *Lösung* der Kette verschwindenden Strome der Volta'schen Säule.

Es soll nun in diesem Abschnitte *zuerst* gezeigt werden, wie auch die Erscheinungen der Volta-Induction sich mit dem *Elektrodynamometer* beobachten lassen, sodann sollen einige *Maassbestimmnngen* über den zweiten Faraday'schen Fundamentalversuch mitgetheilt werden.

In der Darstellung der Erscheinungen der Volta-Induction muss wesentlich zweierlei unterschieden werden, nämlich *erstens* die Vorrichtung zur Stromerregung, *zweitens*, weil der erregte Strom unmittelbar nicht wahrnehmbar ist, eine Vorrichtung zur Beobachtung einer wahrnehmbaren Wirkung des erregten Stromes. Bei dem zweiten Faraday'schen Fundamentalversuche bilden z. B. die beiden zickzackförmig gebogenen Kupferdrähte, deren einer in eine galvanische Kette eingeschaltet ist, nebst der Einrichtung, wodurch beide Drähte plötzlich einander genähert oder von einander entfernt werden können, die erste Vorrichtung, zur *Erregung* des Stroms; das *Galvanometer* dagegen, welches mit dem andern Drahte in Verbindung gesetzt wird, bildet die zweite Vorrichtung, zur Beobachtung einer *sichtbaren Wirkung* des erregten Stromes. Hier sind also die beiden wesentlichen Vorrichtungen zu dem Versuche verschieden und von einander getrennt.

Eine wesentliche Vereinfachung des Versuches kann man nun aber durch das *Elektrodynamometer* erlangen, wo es möglich ist, dieselbe Vorrichtung, welche zur Erregung des Stromes dient, auch zur Beobachtung einer sichtbaren Wirkung des Stromes zu benutzen. Die Bifilarrolle des Elektrodynamometers wird nämlich in *Schwingung* gesetzt und diese Bewegung zur Induction benutzt; sodann wird die *Abnahme der Schwingungsbögen* derselben Bifilarrolle beobachtet, welche, wie sogleich gezeigt werden wird, die Folge der elektrodynamischen Wechselwirkung des inducirenden und des inducirten Stromes ist. Dabei gestattet die Gesetzmässigkeit sowohl jener, die Induction vermittelnden, Schwingungen, als auch dieser, als sichtbare Wirkung des inducirten Stromes beobachteten, Abnahme der Schwingungsbögen, genaue *Maassbestimmungen* für diese Inductionserscheinungen auszuführen.

Verbindet man nämlich den Draht der *einen* Rolle des Dynamometers, während die Bifilarrolle *schwingt*, mit einer Volta'schen Säule, so braucht man, um einen Strom in der *anderen* Rolle zu *induciren*, nur ihre beiden Drahtenden mit einander zu verknüpfen. Dieser an sich zwar unwahrnehmbare in der letzteren Rolle inducirte Strom übt nun sogleich im Dynamometer selbst auf den Strom der ersteren Rolle eine *wahrnehmbare elektrodynamische Kraft* aus und ändert dadurch die Schwingung der Bifilarrolle. Beobachtet man also diese Aenderung, so lernt man daraus die elektrodynamische Kraft kennen,

welche sie verursacht, und aus der elektrodynamischen Kraft wiederum den *inducirten Strom*, dem sie proportional ist, ohne dass es dazu nöthig ist, den inducirten Strom durch den Multiplicator eines *Galvanometers* zu leiten. Das *Dynamometer* dient also hiebei selbst sowohl zur *Erregung* des Stroms, als auch zur Beobachtung einer *sichtbaren und messbaren Wirkung* des erregten Stroms.

Ruhet die Bifilarrolle, so wird kein Strom erregt, folglich ist die elektrodynamische Kraft = 0, und die Bifilarrolle wird dann von der festen Rolle nicht bewegt. Schwingt aber die Bifilarrolle, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: entweder ist nämlich die feste Rolle mit der Volta'schen Säule verbunden und die Bifilarrolle ist in sich geschlossen; alsdann wird ein Strom in der schwingenden Bifilarrolle erregt: oder die schwingende Bifilarrolle selbst ist durch ihre beiden Aufhängungsdrähte mit der Volta'schen Säule in Verbindung gebracht und die feste Rolle ist in sich geschlossen; alsdann wird ein Strom in der festen Rolle erregt. In beiden Fällen ergiebt sich eine elektrodynamische Kraft, welche auf gleiche Weise die Schwingung der Bifilarrolle ändert.

Die *Beobachtung* aber dieser Schwingungsänderung, in Folge eines inducirten Stromes und der davon nach Ampère's Fundamentalgesetze abhängigen *elektrodynamischen* Wechselwirkung zwischen der inducirenden und der inducirten Drahtrolle, muss auf eine ganz *andere* Weise ausgeführt werden, wie die in den vorhergehenden Artikeln beschriebenen Beobachtungen am Dynamometer. Es müssen an die Stelle der bisherigen *Standbeobachtungen* am Dynamometer *Beobachtungen über die Abnahme der Schwingungsbögen* der schwingenden Bifilarrolle treten. Die Nothwendigkeit dieser veränderten Beobachtungsmethode ergiebt sich leicht wie folgt.

Die elektrodynamische Wechselwirkung beider Rollen, welche mit dem Elektrodynamometer beobachtet werden soll, besteht nach dem Ampère'schen Fundamentalgesetze in einem Drehungsmomente, welches auf die schwingende Bifilarrolle wirkt und dem ein veränderter *Ruhestand* dieser Rolle entspricht. Dieser *Ruhestand* der Bifilarrolle kann nun aber, wenn dieselbe schwingt, nicht unmittelbar beobachtet, sondern kann nur aus mehreren Beobachtungen, welche um die Schwingungsdauer von einander abstehen, bestimmt werden, und zwar nur unter der Voraussetzung, dass in der Zwischenzeit die äusseren Kräfte, welche auf die Rolle wirken, *constant* geblieben seien, oder sich stetig und *proportional* mit der *Zeit* geändert haben. Wenn also die elektrodynamische Einwirkung, welche in Folge des inducirten Stromes auf die schwingende Rolle statt findet, *constant* bliebe, oder mehrere Schwingungen hindurch *proportional* mit der Zeit sich änderte, so würde dieselbe sich *durch den veränderten Ruhestand*, wie er aus einem System von Beobachtungen bestimmt wird, erkennen lassen. Wenn aber die elektrodynamische Einwirkung, welche in Folge des inducirten Stromes auf die schwingende Rolle statt findet, *von Schwingung zu Schwingung sich umkehrt*, so wird der Ruhestand der Rolle, wie er aus einem System von Beobachtungen während der Schwingung bestimmt wird, sich trotz der vorhandenen elektrodynamischen Einwirkung dennoch *unverändert* finden. Die Beobachtung zeigt in der That, dass das letztere statt findet, dass also die elektrodynamische Einwirkung, wenn eine solche in Folge eines inducirten

Stromes wirklich existirt, sich von Schwingung zu Schwingung umkehren müsse und durch blosse *Standbeobachtungen* am Dynamometer nicht erforscht werden könne.

Findet nun wirklich eine solche elektrodynamische Einwirkung auf die schwingende Rolle statt, welche von Schwingung zu Schwingung sich umkehrt: so wird diese zwar durch Bestimmung des Ruhestandes der Rolle nicht erkennbar sein, sie muss sich aber an den *Schwingungsbögen* der Rolle zu erkennen geben; es muss nämlich die Grösse des Schwingungsbogens von Schwingung zu Schwingung sich *ändern*, entweder immer wachsen, oder immer abnehmen.

Wirklich zeigt die Erfahrung, dass, während der berechnete Ruhestand der schwingenden Rolle immer der nämliche bleibt, der Schwingungsbogen immer *abnimmt* und es geht aus den nachfolgenden Versuchen hervor, dass diese Abnahme wirklich von *elektrodynamischen* Einwirkungen und nicht von fremdartigen äusseren Ursachen herrührt, wenn man den gewöhnlichen Einfluss des Widerstands der Luft in Abrechnung bringt.

Um also diese zweite Klasse von Erscheinungen mit dem Elektrodynamometer zu beobachten, wird es hiernach nöthig, zur genauen Messung der Abnahme der Schwingungsbögen, *Schwingungsversuche* mit der Bifilarrolle des Dynamometers zu machen, während wir zum Zweck der Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen auf *Ablenkungsversuche* oder *Standbeobachtungen* uns beschränken konnten.

Für unseren Zweck ist es zunächst von Wichtigkeit, nachzuweisen, dass sich die *Schwingungsbeobachtungen* am Dynamometer nach derselben Methode und mit einer eben so grossen Präcision, wie an einem Magnetometer, ausführen lassen. Ich will daher zunächst eine Reihe von Schwingungsversuchen, welche ich mit dem Dynamometer gemacht habe, vorausschicken, wobei *keine* elektrodynamische Einwirkung statt fand, indem gar kein galvanischer Strom durch das Instrument geleitet wurde und die Drahtenden sogar unverbunden blieben.

Die Methode, wie diese Versuche angestellt wurden, ist die nämliche, wie sie Gauss in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837», S. 58 ff., angegeben hat, und es ist darnach nicht nöthig, die ursprünglichen Protocolle selbst vollständig mitzutheilen, sondern es genügt die Mittheilung des Extracts, welcher aus diesen Protocollen eben so, wie a. a. O. abgeleitet ist.

Zu den folgenden Beobachtungen diente das Fig. 2., 3. und 4. abgebildete Dynamometer von Meyerstein, wo die schwingende Rolle im Mittelpunkte der festen Rolle aufgehängt und das Fernrohr etwa 6 Meter von dem Instrumente aufgestellt war. Der Abstand des Spiegels von der Skale betrug 6018,6 Skalentheile und es war der Werth von

$$1 \text{ Skalentheil} = 17''1356.$$

Die Beobachtungen wurden abwechselnd von verschiedenen Beobachtern angestellt, nämlich von Herrn Dr. Stähelin aus Basel, von meinem Assistenten, Herrn Dietzel und von mir. Jeder machte einen Satz von Beobachtungen nach der a. a. O. S. 64 gegebenen Vorschrift, welcher 6 Zeiten der Vorübergänge eines bestimmten, nahe der Mitte des Schwingungsbogens liegenden

Skalenpunktes und 7 Elongationspunkte enthielt. In der folgenden Tafel giebt jede horizontale Zeile die Resultate eines solchen Satzes von Beobachtungen, nämlich die Bezifferung der Schwingung, die entsprechende Zeit, den entsprechenden Ruhestand in Skalentheilen, den entsprechenden Schwingungsbogen in Skalentheilen und den Logarithmus des letzteren

Beobachtungen zur Bestimmung der Schwingungsdauer und der Abnahme der Schwingungsbögen der Bifilarrolle des Dynamometers bei offener Kette.

Schwingung. Nr.	Zeit.	Stand.	Schwingungsbogen.	Log.
0.	5ʰ 16′ 28″,53	457,10	650,80	2,813448
14.	20 10,20	457,38	601,43	2,779185
25.	23 4,39	457,15	564,90	2,751972
52.	30 12,50	457,19	485,28	2,685992
82.	38 8,02	457,29	409,62	2,612381
109.	45 16,16	457,15	353,08	2,547873
134.	51 52,08	457,65	306,70	2,486714
163.	59 31,80	457,41	261,08	2,416774
189.	6 6 23,90	457,56	226,33	2,354742
212.	12 28,22	457,69	198,68	2,298154
232.	17 45,45	457,63	178,26	2,251054
254.	23 33,89	457,78	157,98	2,198602
284.	31 29,30	457,73	134,17	2,127655
309.	38 5,53	456,55	116,30	2,065580
328.	43 6,90	458,02	105,25	2,022222
369.	53 56,24	457,81	83,68	1,922622
387.	58 41,96	457,90	75,45	1,877659

Dividirt man den Unterschied der ersten und letzten Zeit mit der Zahl der Schwingungen, so erhält man eine ziemlich genaue Bestimmung der Schwingungsdauer der schwingenden Rolle, weil die zur Reduction auf unendlich kleine Bögen anzubringende Correction bei so kleinen Schwingungsbögen, wie hier statt fanden, nur wenig beträgt. Diese genäherte Schwingungsdauer ist

$$= 15'',84865.$$

Reducirt man mit dieser genäherten Schwingungsdauer alle Zeiten in der Tafel, durch Abrechnung des Products der Zahl der Schwingung in die Schwingungsdauer, auf die erste Zeit, so erhält man die in der dritten Columne der folgenden Tafel enthaltenen Werthe:

Schwingung. Nr.	Zeit.	Reducirte Zeit.	Unterschied vom Mittel.
0.	5h 16′ 28″,52	5h 16′ 28″,53	+ 0″,13
11	20 10 ,20	28 ,32	— 0,08
25.	23 4 ,39	28 ,17	— 0,23
52.	30 12 ,50	28 ,37	— 0,03
82.	38 8 ,02	28 ,43	+ 0,03
109.	45 16 ,16	28 ,66	+ 0,26
134.	51 52 ,08	28 ,36	— 0,04
163.	59 31 ,80	28 ,47	+ 0,07
189.	6 6 23 ,90	28 ,50	+ 0,10
212.	12 28 ,22	28 ,31	— 0,09
232.	17 45 ,45	28 ,56	+ 0,16
254.	23 33 ,89	28 ,33	— 0,07
284.	31 29 ,30	28 ,28	— 0,12
309.	38 5 ,53	28 ,30	— 0,10
328.	43 6 ,90	28 ,54	+ 0,14
369.	53 56 ,24	28 ,07	— 0,33
387.	58 41 ,96	28 ,53	+ 0,13

Aus der Uebereinstimmung dieser reducirten Werthe, deren Unterschiede vom Mittelwerthe stets unter $\frac{1}{3}$ Secunde bleiben, geht von selbst hervor, dass die Bestimmung der *Schwingungsdauer* der Bifilarrolle des Dynamometers gleicher Schärfe und Genauigkeit fähig ist, wie beim Magnetometer, wobei noch zu beachten ist, dass jene Unterschiede durch die constante Differenz, welche bekanntlich immer zwischen zwei Beobachtern statt findet, vergrössert erscheint. Auch die Bestimmungen des *Ruhestandes* der schwingenden Rolle aus den Elongationsbeobachtungen in der 3ten Columne der ersten Tafel zeigen eine grosse Uebereinstimmung, wie die folgende Uebersicht ihrer Abweichungen vom Mittelwerthe, nach ihrem Bogenwerthe ausgedrückt, beweist:

— 6″,3	+ 3,1	+ 4,5
— 1,5	— 1,0	— 15,8
— 5,5	+ 1,5	+ 9,4
— 4,8	+ 3,8	+ 5,8
— 3,1	+ 2,7	+ 7,4
— 5,5	+ 5,3	

Diese Uebereinstimmung aller Standbeobachtungen kann nicht grösser gewünscht werden, zumal wenn man beachtet, dass das Fernrohrstatif auf dem hölzernen Fussboden des Zimmers aufgestellt war, wo bekanntlich die Richtung des Fernrohrs durch das Auftreten auf den Boden leicht etwas geändert wird. Man erkennt auch leicht, dass der Stand in der letzteren Hälfte der Beobachtungen etwas grösser, als in der erstern, gewesen sei. —

Es bleibt uns endlich die *Abnahme der Schwingungsbögen* zu betrachten übrig. Die einzelnen Sätze der Beobachtungen folgen zum Theil in so kurzer Zeit auf einander, dass die Abnahme der Schwingungsbögen in der Zwischenzeit nicht gross genug ist, um eine genaue Bestimmung des Verhältnisses zweier auf einander folgender Schwingungsbögen zu geben. Es möge daher der Logarithmus dieses Verhältnisses bestimmt werden, indem statt der Differenz je zweier unmittelbar auf einander folgender Logarithmen der Schwingungsbögen die Differenz des 1sten und 5ten, des 2ten und 6ten u. s. w. mit der Zahl der dazwischen liegenden Schwingungen dividirt wird. Man erhält alsdann aus obigen 17 Beobachtungssätzen statt 16 nur 13, aber genauere Werthe des *logarithmischen Decrements,* nämlich folgende. Vor jedem Werthe ist die Schwingungszahl bemerkt, zu welcher er im Mittel gehört.

Schwingung. Nr.	Logarithmisches Decrement.	Unterschied vom Mittel.
41.	0,002452	+ 0,000038
61½.	0,002435	+ 0,000021
79½.	0,002433	+ 0,000019
107½.	0,002425	+ 0,000011
135½.	0,002408	— 0,000006
160½.	0,002424	+ 0,000010
183.	0,002405	— 0,000009
208½.	0,002397	— 0,000017
236½.	0,002390	— 0,000024
260½.	0,002398	— 0,000016
280.	0,002384	— 0,000030
311½.	0,002400	— 0,000014
335½.	0,002427	+ 0,000013

Mittel = 0,002414.

Es ergiebt sich also im Mittel eine *Abnahme der Schwingungsbögen,* wonach die Grösse des Bogens nach $124\frac{7}{10}$ Schwingungen, oder nach 32 Minuten $56\frac{1}{3}$ Secunde auf die Hälfte herabsinkt. Die Uebereinstimmung der partiellen Werthe beweist, dass man auch diese kleine Abnahme der Schwingungsbögen mit Schärfe messen könne.

An dem nämlichen Tage, unmittelbar vor der eben beschriebenen Beobachtungsreihe, war eine andere ähnliche Beobachtungsreihe unter ganz gleichen äusseren Verhältnissen gemacht worden, blos mit dem Unterschiede, dass die beiden Enden der festen Rolle mit einer Säule von 3 kleinen Grove'schen Bechern, den nämlichen wie im 4. Artikel, in Verbindung gesetzt, und dass die freien Enden der Aufhängungsdrähte der Bifilarrolle unter sich verknüpft worden waren. Zur näheren Kenntniss des Stroms, welcher durch die feste Rolle geleitet wurde, diente die Beobachtung der Ablenkung, welche diese Rolle selbst auf das 583,5 Millimeter nördlich von ihr aufgestellte, Art. 3. beschriebene *Spiegelmagnetometer* hervorbrachte. Diese beobachtete Ablenkung des

Spiegelmagnetometers ist in der letzten Columne der folgenden Tafel bemerkt worden. Der Werth der Skalentheile dieses Magnetometers hängt von dem horizontalen Abstande des Spiegels von der Skale ab, welcher = 1301 Skalentheile war. Die Beobachter und die Methode der Beobachtung waren die nämlichen. Die folgende Tafel giebt den Extract von dieser Beobachtungsreihe gerade so, wie die vorige Tafel von der andern.

Beobachtungen zur Bestimmungen der Schwingungsdauer und der Abnahme der Schwingungsbögen der Bifilarrolle des Dynamometers beim Durchgange des Stroms von 3 Grove'schen Bechern durch die feste Rolle, während der Leitungsdraht der Bifilarrolle geschlossen war.

Schwingung. Nr.	Zeit.	Stand.	Schwingungsbogen.	Log.	Ablenkung des Spiegelmagnetometers.
0.	$3^h 29' 44''$,88	464,05	764,10	2,883150	108,50
9.	32 7 , 03	464,44	679,15	2,831966	
18.	34 29 , 58	464,23	604,05	2,781073	
35.	38 50 , 17	464,07	484,15	2,684980	108,60
47.	42 9 , 40	464,20	414,60	2,617629	
57.	44 47 , 66	464,25	365,50	2,562887	
74.	49 16 , 79	464,22	292,27	2,465784	109,10
85.	52 10 , 80	464,30	253,30	2,403635	
103	56 56 , 11	464,40	200,80	2,302764	
118.	4 0 53 , 43	464,25	165,56	2,218955	108,95
130.	4 3 , 26	464,37	141,37	2,150357	
143.	7 28 , 90	465,23	119,33	2,076750	
157.	11 11 , 11	464,96	100,49	2,002123	109,20
179.	16 59 , 23	465,20	75,59	1,878464	
196.	21 28 , 65	464,88	60,58	1,782329	190,40
210.	25 10 , 23	464,96	50,08	1,699664	

Ich beschränke mich bei dieser, der vorigen im Uebrigen sehr ähnlichen Beobachtungsreihe auf die Betrachtung der Abnahme der Schwingungsbögen. Der Logarithmus des Verhältnisses zweier auf einander folgender Schwingungsbögen, oder das logarithmische Decrement, soll hier bestimmt werden, indem die Differenz des 1sten und 4ten, des 2ten und 5ten u. s. w. Logarithmus mit der Zahl der dazwischen liegenden Schwingungen dividirt wird. Man erhält dann aus obigen 16 Beobachtungssätzen 13 Werthe des logarithmischen Decrements, wie sie die folgende Tafel mit Beifügung der Schwingungszahl, zu welcher jeder im Mittel gehört, enthält.

Schwingung. Nr.	Logarithmisches Decrement.	Unterschied vom Mittel.
$17\frac{1}{2}$.	0,005662	+ 0,000042
28.	0,005640	+ 0,000020
$37\frac{1}{2}$.	0,005595	— 0,000025
$54\frac{1}{2}$.	0,005620	0,000000
66.	0,005631	+ 0,000011
80.	0,005655	+ 0,000035
96.	0,005610	— 0,000010
$107\frac{1}{2}$.	0,005628	+ 0,000008
123.	0,005650	+ 0,000030
$137\frac{1}{2}$.	0,005560	— 0,009060
$154\frac{1}{2}$.	0,005549	— 0,000071
$169\frac{1}{2}$.	0,005555	— 0,000065
$183\frac{1}{2}$.	0,005707	+ 0,000087

Mittel = 0,005620.

Es ergiebt sich also im Mittel eine *Abnahme der Schwingungsbögen*, wonach die Grösse des Bogens nach 53,564 Schwingungen, oder nach 14 Minuten 8,187 Secunden auf die Hälfte herabsinkt. Auch hier zeugt die Uebereinstimmung der partiellen Werthe für die Schärfe der Messung, und es kann dabei nicht auffallen, dass zuletzt, wo die Schwingungsbögen sehr klein geworden waren, die Differenzen etwas grösser erscheinen.

Der Unterschied, welcher zwischen dieser letzteren Bestimmung des logarithmischen Decrements und der vorhergehenden statt findet, hat seinen Grund nicht in der Verschiedenheit äusserer Verhältnisse, welche auf die schwingende Rolle einwirkten, weil diese vollkommen die nämlichen blieben, sondern in dem *inducirenden* Einflusse der festen Rolle auf die schwingende Rolle, welcher den einzigen Unterschied zwischen der ersten und zweiten Versuchsreihe bildete. Beide Versuchsreihen sind an mehreren Tagen wiederholt worden, und haben nicht allein fast genau denselben Unterschied im Werthe der logarithmischen Decremente, sondern auch nahe gleiche absolute Werthe für beide Decremente gegeben, wodurch kein Zweifel daran bleibt, dass hierbei wirklich eine Induction galvanischer Ströme in der geschlossenen Bifilarrolle durch den galvanischen Strom in der festen Rolle statt findet, und zwar von solcher Stärke, dass die in der Abnahme der Schwingungsbögen sichtbare Wirkung der inducirten Ströme einer genauen Maassbestimmung fähig ist.

11.

Nach dieser Nachweisung der *praktischen* Brauchbarkeit des Elektrodynamometers zur Darstellung der Erscheinungen der Volta-Induction, gehen wir *zweitens* dazu über, einige *gesetzliche Bestimmungen* für diese Erscheinungen aus den Beobachtungen der Schwingungen und der Abnahme der Schwingungsbögen der Bifilarrolle abzuleiten.

Erstens ist schon bemerkt worden, dass die in Folge der inducirten Ströme *sich ändernde Grösse* der Schwingungsbögen, bei unverändertem mittleren Stande der Bifilarrolle, beweist, dass die Richtung des inducirten Stroms mit der *Richtung der Bewegung* der schwingenden Bifilarrolle wechselt, dass folglich durch entgegengesetzte Bewegungen entgegengesetzte Ströme inducirt werden, wie dies auch bei der Magneto-Induction der Fall ist.

Zweitens, die *Abnahme* der Schwingungsbögen beweist, dass bei *Annäherung* paralleler Elemente der inducirenden Drähte ein dem inducirenden Strome *entgegengesetzter,* bei *Entfernung* paralleler Elemente ein dem inducirenden *gleich gerichteter* Strom inducirt werde. Wenn das entgegengesetzte Verhältniss der Stromrichtungen der inducirenden und inducirten Ströme statt fände, müsste nämlich eine fortwährende *Zunahme* der Schwingungsbögen sich ergeben. Auch diese Bestimmung ist mit dem analog, was für die Magneto-Induction erfahrungsmässig begründet ist.

Drittens das *geometrische Gesetz* der Abnahme der Schwingungsbögen in Folge der inducirten Ströme beweist, dass die Intensität des inducirten Stroms der *Geschwindigkeit* der inducirenden Bewegung proportional ist; denn das geometrische Gesetz für die Abnahme der Schwingungsbögen beweist, dass die Kraft, welche diese Abnahme hervorbringt, d. h. die Intensität der inducirten Ströme, der Grösse der Schwingungsbögen immer proportional bleibt: es ist aber bekannt, dass die Grösse der Schwingungsbögen eines *isochron* schwingenden Körpers der ihm in entsprechenden Augenblicken seiner Schwingungsdauer zukommenden Geschwindigkeit immer proportional ist.

Viertens, was die gesetzliche Bestimmung der *absoluten* Stärke der Volta-Induction betrifft, so wollen wir endlich noch folgenden Satz aus Beobachtungen am Dynamometer ableiten.

> Die *Volta-Induction* ist der *Magneto-Induction* in der in sich geschlossenen schwingenden Bifilarrolle gleich, wenn jene von einem durch die feste Rolle geleiteten galvanischen Strome, diese durch Magnete hervorgebracht wird, welche in einer solchen Lage gegen die Bifilarrolle sich befinden, bei welcher, wenn durch die Bifilarrolle ein Strom geht, das *elektrodynamische* Drehungsmoment jenes Stroms dem *elektromagnetischen* Drehungsmomente dieser Magnete gleich ist.

Durch diesen Satz wird, wie man leicht sieht, die Bestimmung der Volta-Induction mit Hülfe bekannter *elektromagnetischer* und *elektrodynamischer* Kräfte auf die Gesetze der Magneto-Induction zurückgeführt, die auf andern Wegen schon genauer erforscht worden sind. Zum Beweis dieses Satzes kann ich vor der

Hand zwar nur einige mit dem Dynamometer ausgeführte Messungen geben, die unter Umständen gemacht wurden, unter welchen keine auf feine Bruchtheile genauen Bestimmungen möglich waren; es dürften jedoch diese Messungen einstweilen als genügend angesehen werden, weil, wenn obiger Satz unrichtig wäre, gar kein Grund zu derjenigen approximativen Uebereinstimmung vorläge, die sich aus den Beobachtungen ohne Zweifel ergiebt. Zu einer feineren Prüfung obigen Satzes müssten alle dabei concurrirenden Messungen mit gleicher Genauigkeit ausgeführt werden. Um aber alle Verhältnisse zur Erreichung dieser gleichmässigen Genauigkeit ganz zweckmässig einzurichten, würde es nöthig sein, besondere Instrumente blos für diesen Zweck darzustellen, was mir bisher nicht möglich war.

Ich werde die Beobahtungsresultate hier kurz zusammen stellen, ohne in das Detail der Beobachtungen selbst einzugehen, das im Wesentlichen mit dem der vorhergehenden Beobachtungen übereinstimmt.

Die *erste* Versuchsreihe bezog sich auf Messung der Magneto-Induction. Gerade diese Reihe ist es, für welche die Verhältnisse am wenigsten günstig sich gestalten liessen, und die daher der Genauigkeit der ganzen Maassbestimmung engere Schranken setzte, die unter etwas günstigeren Verhältnissen leicht bedeutend hätten erweitert werden können. Die Bifilarrolle des Art. 1. beschriebenen, Fig. 2., 3. und 4. abgebildeten Dynamometers wurde nämlich in sich geschlossen und in Schwingung gesetzt, während ausserhalb des Kastens, welcher die schwingende Bifilarrolle vor der Luft schützte, mehrere kleine Magnete NS, $N'S'$ Fig. 4. in derjenigen Lage fest aufgestellt wurden,

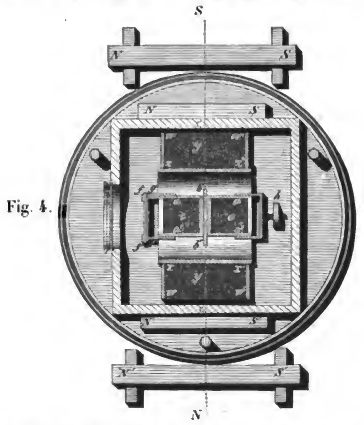


Fig. 4.

in welcher sie in der schwingenden Bifilarrolle die stärksten *magnetoelektrischen* Ströme inducirten. Diese kleinen Magnete lagen nämlich sämmtlich senkrecht

gegen den durch die Axe der Bifilarrolle gehenden magnetischen Meridian, und zwar nördlich und südlich von der Bifilarrolle symmetrisch und ihre gleichnamigen Pole waren dabei nach gleicher Seite gekehrt, wie die Figur es zeigt, worin N und N' Nordpole, S und S' Südpole bedeuten. Alsdann wurden die Schwingungen der Bifilarrolle, wie früher, von dem Augenblicke an, wo sie durch die Skale gemessen werden konnten, so lange beobachtet, bis sie zu genauen Bestimmungen der Abnahme der Schwingungsbögen zu klein wurden. Diese Beobachtungen wurden auf dieselbe Weise, wie oben, berechnet und ergaben das *logarithmische Decrement* für die Abnahme der Schwingungsbögen

$$= 0{,}002638.$$

Dieselbe Versuchsreihe wurde nochmals wiederholt mit dem einzigen Unterschiede, dass die Bifilarrolle geöffnet war, und es ergab sich dann für das *logarithmische Decrement* der Abnahme der Schwingungsbögen folgender etwas kleinere Werth:

$$= 0{,}002541.$$

Der geringe Unterschied dieser beiden Werthe,

$$= 0{,}000097,$$

ist die Wirkung der *magnetoelektrischen* Ströme, welche in der schwingenden und geschlossenen Bifilarrolle durch die festliegenden Magnete inducirt wurden. Es ist die grösste Sorgfalt darauf gewendet worden, diesen kleinen Unterschied mit möglichster Genauigkeit zu bestimmen, und die Versuche liessen dabei nichts zu wünschen übrig, dennoch liegt es in der Kleinheit des Unterschieds, dass derselbe, wie die Wiederholungen der Versuche zeigten, etwa auf 6 bis 8 Procente als unsicher betrachtet werden muss.

Die *zweite* Versuchsreihe bezog sich auf das *elektromagnetische* Drehungsmoment. Die kleinen Magnete blieben unverrückt an ihrer Stelle, während durch die Bifilarrolle ein schwacher Strom von einer Volta'schen constanten Säule geleitet wurde; der Strom dieser Säule ging ausserdem durch ein *Galvanometer*, durch welches seine Intensität gemessen wurde. Nun wurde der *Ruhestand* der Bifilarrolle beobachtet, abwechselnd, wenn die Volta'sche Säule geschlossen und wenn sie geöffnet war. Es ergab sich aus einer Reihe von Wiederholungen nach der Reduction der Resultate auf gleiche Stromintensität (die nur wenig variirt hatte) mit grosser Uebereinstimmung der Unterschied,

$$= 19{,}1 \text{ Skalentheilen.}$$

Dieser Unterschied ist ein Maass des *elektromagnetischen* Drehungsmoments, welches die oben erwähnten Magnetstäbe auf den Strom in der Bifilarrolle ausübten.

Die *dritte* Versuchsreihe bezog sich auf das *elektrodynamische* Drehungsmoment. Die kleinen Magnete wurden entfernt und dagegen die beiden Drahtenden der festen Rolle des Dynamometers mit einer starken Volta'schen Säule verbunden, während durch die Bifilarrolle der nämliche schwache Strom von einer Volta'schen constanten Säule geleitet wurde, wie in der vorigen

Reihe. Die Intensität beider Ströme wurde durch ein *Galvanometer* gemessen*). Nun wurde, wie in der vorigen Versuchsreihe, der *Ruhestand* der Bifilarrolle beobachtet, abwechselnd wenn die Volta'sche Säule geschlossen und wenn sie geöffnet war. Es ergab sich aus einer Reihe von Wiederholungen nach der Reduction auf gleiche Stromintensität mit grosser Uebereinstimmung der Unterschied

= 101,9 Skalentheilen.

Dieser Unterschied ist ein Maass des *elektrodynamischen* Drehungsmoments, welches der starke Strom in der festen Rolle auf den schwachen Strom in der Bifilarrolle ausübte.

Die *vierte* Versuchsreihe bezog sich endlich auf die *Volta-Induction*. Die Bifilarrolle wurde in sich geschlossen und in Schwingung gesetzt, während durch die feste Rolle des Dynamometers der Strom derselben Volta'schen Säule geleitet wurde, wie in der vorhergehenden Versuchsreihe. Alsdann wurden die Schwingungen der Bifilarrolle eben so beobachtet, wie in der ersten Versuchsreihe und daraus das *logarithmische Decrement* der Abnahme der Schwingungsbögen berechnet. Dieses Decrement ergab sich, nach Reduction auf diejenige Stromintensität in der festen Rolle, auf welche sich der durch die vorhergehende Versuchsreihe gefundene Werth des *elektrodynamischen* Drehungsmoments bezieht,

= 0,005423.

Dieselbe Versuchsreihe wurde nochmals wiederholt mit dem einzigen Unterschiede, dass die Bifilarrolle geöffnet war, und es ergab sich dann für das *logarithmische Decrement* der Abnahme der Schwingungsbögen folgender kleinere Werth:

0,002796**).

Der Unterschied dieser beiden Werthe,

= 0,002627,

ist die Wirkung *der Volta-Induction*, welche in der schwingenden und geschlossenen Bifilarrolle durch den Strom in der festen Rolle statt fand.

Da also die *elektrodynamische* Kraft unseres Stroms in der festen Rolle, nach der *dritten* Versuchsreihe, der *elektromagnetischen* Kraft unserer Magnete in der *zweiten* Versuchsreihe nicht gleich war, sondern sich wie

101,9 : 19,1

verhielt, so sollten auch die von beiden unter ganz gleichen Verhältnissen in der Bifilarrolle *inducirten Ströme* nicht gleich sein, sondern sich ebenfalls wie

101,9 : 19,1

---

*) Beide Ströme stammten von derselben constanten Säule her und die verschiedene Intensität derselben in den beiden Rollen war durch eine Theilung des Stroms bewirkt worden.

**) Dieser Werth ergab sich noch kleiner, wenn man zugleich den Strom in der festen Rolle unterbrach, weil dieser Strom auch bei geöffneter Bifilarrolle noch in der messingenen Fassung der letzteren während der Schwingung Ströme inducirte, gerade so, wie dies auch in der ersten Versuchsreihe mit den Magneten der Fall gewesen war, die aber weit schwächer wirkten.

verhalten. Wenn aber die Intensitäten der in der schwingenden Bifilarrolle inducirten Ströme in dem angegebenen Verhältnisse stehen, so wird aus der Wechselwirkung dieser Ströme mit jenen sie erzeugenden und deshalb ihnen selbst proportionalen galvanischen und magnetischen Kräften eine Dämpfung der Schwingungen der Bifilarrolle hervorgehen müssen, deren *logarithmische Decremente* sich wie die Quadrate von 101,9 : 19,1 verhalten, d. h. wie

28,5 : 1.

Statt dessen haben wir aus den Beobachtungen der Abnahme der Schwingungsbögen in beiden Fällen das Verhältniss der von den inducirten Strömen herrührenden Antheile der logarithmischen Decremente nach der *vierten* und *ersten* Versuchsreihe wie

$$0{,}002627 : 0{,}000097 = 27{,}1 : 1$$

gefunden, welches Verhältniss von den berechneten etwa um 5 Procent verschieden ist, die sich in dem beobachteten von den *magnetoelektrischen* Strömen herrührenden kleinen logarithmischen Decremente, wie schon oben S. 73 erwähnt ist, nicht mehr verbürgen lassen.

12.

Ein inducirter Strom von gleicher Stärke wie der inducirende.

Aus der *Constanz* des logarithmischen Decrements der schwingenden Bifilarrolle, unter dem Einflusse eines constanten Stromes in der festen Rolle, und der dadurch inducirten Ströme in der schwingenden Bifilarrolle, ergab sich schon S. 71 für die Induction das Gesetz, dass die Intensität des inducirten Stromes in jedem Augenblicke der *Geschwindigkeit* der schwingenden Rolle in diesem Augenblicke proportional ist. Ist nun dieses Gesetz hierdurch ausser Zweifel gesetzt, so folgt daraus, dass man bei einem gegebenen *constanten* inducirenden Strome den von ihm *inducirten* Strom beliebig verstärken könne, wenn man jene *Geschwindigkeit* vergrössere, und dass es eine Geschwindigkeit geben müsse, bei welcher *die Intensität des inducirten Stromes eben so stark sei, wie die des inducirenden Stromes.* Es dürfte nicht uninteressant sein, eine nähere *Bestimmung* von dieser Geschwindigkeit zu geben. Diese Bestimmung kann leicht erhalten werden, wenn man 1) aus dem gemessenen Schwingungsbogen unserer Rolle nnd aus ihrer ebenfalls gemessenen Schwingungsdauer nach bekannten Gesetzen die *Geschwindigkeit* berechnet, welche die Rolle in der Mitte ihrer Schwingung besass; 2) wenn man aus dem ebenfalls gemessenen Werthe des logarithmischen Decrements, welches durch die Voltasche Induction hervorgebracht worden war, die *Ablenkung* der Rolle berechnet, welche die Kraft, welche die Geschwindigkeit der schwingenden Bifilarrolle in dem Augenblicke verlangsamt, wo sie in der Mitte ihrer Schwingung sich befindet, wenn sie gleichförmig in gleicher Richtung fortwirkte, hervorbringen würde; und 3) endlich, wenn man durch die Bifilarrolle einen Strom gehen lässt und die Intensität dieses Stromes so lange ändert, bis die

elektrodynamische Ablenkung der Rolle in Folge der Wechselwirkung dieses Stromes und des constanten Stromes in der festen Rolle jener Ablenkung gleich ist, und wenn man alsdann das *Verhältniss* der Intensitäten beider Ströme bestimmt. — Es leuchtet dann ein, dass, wenn man die Geschwindigkeit der schwingenden Rolle nach dem Verhältniss dieser Intensitäten vergrösserte, der inducirte Strom in dem Augenblicke, wo die Rolle in der Mitte ihres Schwingungsbogens sich befindet, dem inducirenden Strom an Stärke gleich sein würde. Auf diesem Wege hat sich ergeben, dass die Bifilarrolle des Art. 1. beschriebenen Dynamometers um ihre senkrechte Drehungsaxe in einer Sekunde

31 Mal

herumgedreht werden müsste, damit der darin von dem beliebig starken oder schwachen Strome der festen Rolle dieses Instrumentes *inducirte* Strom in dem Augenblicke, wo beide Rollen auf einander senkrecht stehen, die *Intensität des ursprünglichen Stromes* hätte. Bei dieser Drehungsgeschwindigkeit der Rolle, würde die grösste lineare Geschwindigkeit der Stromelemente, da nach S. 219 der Halbmesser der Bifilarrolle 33,4 Millimeter beträgt, $6\frac{1}{2}$ Meter oder etwa 20 Fuss in eine Sekunde betragen.

13.

Bestimmung der Dauer momentaner Ströme mit dem Dynamometer nebst Anwendung auf physiologische Versuche.

Um mit Hülfe des Dynamometers die Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte darzustellen und zu messen, bedarf es, wie die angeführten Thatsachen beweisen, keiner starken Ströme, sondern es reichen dazu schwache Ströme hin, welche mit anderen Hülfsmitteln kaum wahrnehmbar sind, wie z. B. die inducirten Ströme, welche durch die ohne optische Hülfsmittel kaum sichtbaren Schwingungen der Bifilarrolle, nach Art. 10. erregt wurden. Dieser Umstand ist von praktischer Wichtigkeit, weil diese Versuche dadurch eine viel grössere Ausdehnung erhalten und der Weg zu den mannichfaltigsten Anwendungen des Dynamometers insbesondere auch zu *galvanometrischen* Bestimmungen gebahnt wird. Man nennt eine Boussole, oder ein Magnetometer, wenn sie mit einem Multiplicator versehen ist, ein *Galvanometer*, weil sie dazu dient, die Intensität der galvanischen Ströme, welche durch den Multiplicatordraht geführt werden, zu messen. Die Messung der Intensität galvanischer Ströme wird hierbei *nicht auf rein galvanische*, sondern auf *elektromagnetische* Wirkungen begründet. Mit gleichem Rechte verdient auch ein *Voltameter* den Namen eines *Galvanometers*, weil es ebenfalls zur Messung der Intensität galvanischer Ströme dient, welche durch das Voltameter geleitet werden; nur ist letzteres ein *elektrochemisches* Galvanometer, ersteres ein *elektromagnetisches*. Das *Elektrodynamometer* ist nun auch ein *Galvanometer*, weil es zur Messung der

Intensität galvanischer Ströme dient, welche durch dasselbe geleitet werden, es ist aber ein *rein galvanisches* oder *elektrodynamisches*, weil es die Wechselwirkung der galvanischen Ströme selbst ist, welche dabei zur Messung der Stromintensität benutzt wird, und es verdient darum sogar vorzugsweise den Namen eines *Galvanometers*.

Dennoch scheint dem *Elektrodynamometer*, wenn es sich nicht mehr um Prüfung der elektrodynamischen Grundgesetze, sondern blos um *galvanometrische* Bestimmungen handelt, keine grosse praktische Wichtigkeit zugeschrieben werden zu können, weil die mannichfaltigen Einrichtungen der Voltameter und der elektromagnetischen Galvanometer bei den Intensitätsmessungen galvanischer Ströme schon so gute und bequeme Dienste leisten, dass kein Grund vorliegt, diese schon in Gebrauch befindlichen Instrumente durch neue zu ersetzen. So lange es sich blos um Zwecke handelt, welche mit den letzteren Instrumenten entweder schon erreicht worden sind, oder damit erreicht werden können, kann einem neuen Instrumente, wie dem Dynamometer in der That keine grosse praktische Wichtigkeit beigelegt werden. Anders verhält es sich aber in denjenigen Fällen, wo die bisherigen Hülfsmittel unzureichend sind, wie z. B. wenn es sich um Bestimmung der Stromintensitäten *für einzelne Augenblicke* handelt.

Es giebt nämlich der Sinus oder die Tangente der Ablenkung der Magnetnadel in der Sinus- oder Tangentenboussole nur dann ein richtiges Maass der Stromintensität im Multiplicator *für einen bestimmten Augenblick* wenn der auf die Nadel wirkende Strom im Multiplikator *constant* ist; wenn dagegen seine Intensität *veränderlich* ist, so kann die Intensität des Stromes für einen einzelnen Augenblick aus der Ablenkung der Magnetnadel gar nicht, oder nur durch Rechnung mit Hülfe eines bestimmten für jene Veränderungen gegebenen Gesetzes, abgeleitet werden. Zwar steht es frei, den Strom alsdann nur einen *Augenblick* lang auf die Nadel wirken zu lassen, aber die durch diese augenblickliche Einwirkung hervorgebrachte Ablenkung der Nadel, wenn sie auch für genaue Beobachtung gross genug ist und feine Messung gestattet, genügt für sich allein keineswegs zur Bestimmung der Stromintensität in jenem Augenblicke, sondern es wird dazu noch die Kenntniss eines andern Elements erfordert, nämlich die Kenntniss der *Dauer* jener momentanen Einwirkung, die mit dem Instrumente nicht zu erlangen ist. Nur wenn man die *Menge* der Elektricität, welche der momentane Strom durchführt und die *Zeit* kennt, in welcher diese Elektricität durch einen Querschnitt gegangen ist, lässt sich die Intensität bestimmen, indem man erstere durch letztere dividirt. Aus der durch jene augenblickliche Einwirkung hervorgebrachten Ablenkung der Nadel lässt sich aber nur eine Bestimmung jener Elektricitätsmenge ableiten, die Zeit bleibt unbestimmt.

Das *Dynamometer* dient nun in solchen Fällen wesentlich zur *Ergänzung* des *elektromagnetischen* Galvanometers, denn beide Instrumente geben uns *zwei wesentlich verschiedene*, von einander unabhängige Bestimmungen, aus welchen *die beiden unbekannten Elemente*, von welchen die Stromintensität abhängt, abgeleitet werden können. Die *Verschiedenheit* der mit beiden Instrumenten erhaltenen Bestimmungen zeigt sich schon, wenn man fortdauernde

constante Ströme von *verschiedener Intensität* durch eine Kette leitet, in welcher sowohl das gewöhnliche *Galvanometer*, als auch das *Dynamometer* eingeschlossen ist, und die *Ablenkungswinkel* beobachtet, bei welchen für jeden dieser Ströme das Gleichgewicht der Instrumente besteht. Diese Ablenkungswinkel wachsen bei beiden Instrumenten mit der Intensität, aber nach verschiedenen Gesetzen; denn die Tangenten der Ablenkungswinkel des *Dynamometers* sind, wie Art. 2. nachgewiesen worden ist, den *Quadraten* der Tangenten der Ablenkungswinkel des *Magnetometers* proportional.

Noch auffallender zeigt sich jene *Verschiedenheit* in den von beiden Instrumenten gelieferten Bestimmungen, wenn man einen *constanten* Strom, wie eben beschrieben worden ist, durch beide Instrumente gehen lässt und die correspondirenden Ablenkungen beider beobachtet und sodann, ohne die Stromintensität zu ändern, blos die *Richtung* des Stromes in allen Leitungsdrähten der beiden Instrumente mit Hülfe eines Commutators *umkehrt*; es ist bekannt, dass nach dieser Umkehrung der Stromrichtung im Multiplikator der *Magnet*nadel letztere eben so weit, wie vor der Umkehrung, aber nach der *entgegengesetzten* Seite abgelenkt wird. Bei dem *Dynamometer* findet dieses nicht statt, sondern die vor der Umkehrung des Stromes vorhandene Ablenkung bleibt hier *unverändert* auch nach der Umkehrung des Stromes, so, dass, wenn nur die Umkehrung des Stromes ohne Unterbrechung wirklich momentan stattgefunden hat, von dieser Umkehrung *gar kein Einfluss* auf das Dynamometer wahrzunehmen ist. Letzteres verhält sich hierbei wie ein *elektromagnetisches* Galvanometer sich verhalten würde, wenn in dem Augenblicke, wo der Strom im Multiplikator umgekehrt, zugleich auch die *Pole der Nadel gewechselt* würden, vorausgesetzt, dass die Nadel, wie die Bifilarrolle des Dynamometers, eine bestimmte, von der Lage ihrer Pole unabhängige Directionskraft besässe. Diese Gleichheit der Wirkungen positiver und negativer Ströme im Dynamometer pflegt bei diesem leicht anzustellenden Versuche um so mehr Aufmerksamkeit zu erregen, je mehr man gewohnt ist, entgegengesetzten Strömen entgegengesetzte Wirkungen entsprechen zu sehen.

Diese experimentell nachgewiesene *Verschiedenheit* der von beiden Instrumenten gelieferten Bestimmungen, lässt sich nun leicht genauer *definiren*. Die unmittelbare Wirkung des durch die Leitungsdrähte beider Instrumente gehenden Stromes ist ein *Drehungsmoment*, welches die Boussole oder die Bifilarrolle, auf die es wirkt, in eine rotirende Bewegung zu setzen strebt. Dieses Drehungsmoment ist bei dem *magnetischen Galvanometer* der Intensität i des Stromes, welcher auf die Nadel wirkt, und dem magnetischen Moment m der Nadel, auf welche gewirkt wird, proportional, und wird also durch die Formel

$$a.mi$$

dargestellt, worin, wenn man sich auf kleine Ablenkungswinkel beschränkt, a als eine für jedes Instrument ein für allemal zu bestimmende Constante zu betrachten ist. Die Wirkung dieses Drehungsmoment in dem Zeitelemente dt wird dann durch das Produkt

$$ami.dt$$

ausgedrückt und ist dem Produkte der Drehungsgeschwindigkeit, in welche

der drehbare Körper dadurch versetzt wird, in das Trägheitsmoment dieses Körpers gleich.

Bei dem *Dynamometer* ist dagegen das Drehungsmoment der Intensität i des Stromes in der festen Rolle, welche auf die Bifilarrolle wirkt, und auch der Intensität i des Stromes in der Bifilarrolle selbst, auf welche gewirkt wird, proportional und wird also durch die Formel

$$b\,.\,ii$$

darstellt, wo b, wenn man sich auf kleine Ablenkungswinkel beschränkt, eine für jedes Dynamometer ein für allemal zu bestimmende Constante bezeichnet. Die Wirkung dieses Drehungsmoments in dem Zeitelemente dt wird also durch das Product

$$bii\,.\,dt$$

ausgedrückt, und ist ebenfalls dem Produkte der dadurch hervorgebrachten Drehungsgeschwindigkeit in das Trägheitsmoment des drehbaren Körpers gleich.

Dauert nun dieser Strom während der kurzen Zeit von $t=0$ bis $t=\theta$ gleichmässig fort, und bezeichnet man die Trägheitsmomente der Nadel und der Bifilarrolle mit p und q, so ist die dadurch hervorgebrachte *Angulargeschwindigkeit*

$$\text{für die Nadel} \quad = \int_0^\theta \frac{a}{p}\,.\,midt = \frac{am}{p}\,.\,i\theta$$

$$\text{für die Bifilarrolle} \quad = \int_0^\theta \frac{b}{q}\,.\,iidt = \frac{b}{q}\,.\,ii\theta.$$

Waren beide Instrumente vorher in Ruhe, so sind sie durch Mittheilung dieser Angulargeschwindigkeit in Schwingung versetzt, und bezeichnet s und ς die *Schwingungsdauer* beider Instrumente, so wird nach bekannten Schwingungsgesetzen, wenn keine Dämpfung stattfindet, und wenn der Zeitraum θ, in welchem die Nadel und die Bifilarrolle jene Angulargeschwindigkeiten erhielten, so klein ist, dass die *Verrückung* derselben während dieses kleinen Zeitraums, wie bei einem *Stosse,* nicht in Rechnung gezogen zu werden braucht, die *Drehungsgeschwindigkeit* für irgend einen Augenblick am Ende der Zeit t durch

$$\frac{e\pi}{s}\,.\,\cos\frac{\pi}{s}(t-\theta) \text{ und } \frac{\varepsilon\pi}{\varsigma}\,.\,\cos\frac{\pi}{\varsigma}(t-\theta)$$

ausgedrückt, wo e und ε die *Elongationsweiten* bezeichnen, welche an beiden Instrumenten durch *Beobachtung* bestimmt werden können. Setzt man hierin nun für t den ersten Augenblick nach dem Aufhören des Stromes, d. i. $t=\theta$, so erhält man die beiden Instrumenten ursprünglich durch den Strom mitgetheilten Geschwindigkeiten:

$$\frac{am}{p}\,.\,i\theta = \frac{e\pi}{s}, \qquad \frac{b}{q}\,.\,ii\theta = \frac{\varepsilon\pi}{\varsigma},$$

oder man hat zur Bestimmung der *Stromintensität i* und der *Stromdauer θ* zwei Gleichungen, durch welche sie aus den *gemessenen Ablenkungen* beider Instrumente *e* und *ε* berechnet werden können, nämlich:

$$i\theta = \frac{\pi p}{ams} \cdot e, \quad ii\theta = \frac{\pi q}{b\varsigma} \cdot \varepsilon$$

wo $\frac{\pi p}{ams}$ und $\frac{\pi q}{b\varsigma}$ ein für allemal zu bestimmende Constante bezeichnen. Die gesuchte *Stromintensität i* ergiebt sich hieraus:

$$i = \frac{am}{b} \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{s}{\varsigma} \cdot \frac{\varepsilon}{e},$$

und die gesuchte *Dauer* dieses Stroms:

$$\theta = \frac{\pi bpp\varsigma}{aammqss} \cdot \frac{ee}{\varepsilon}.$$

Da sich die *Schwingungsdauer* beider Instrumente *s* und *ς* unmittelbar bestimmen lässt, so ist zur vollständigen Bestimmung der *Constanten* beider Instrumente blos nöthig, einen constanten Normalstrom, dessen *Intensität* = 1 gesetzt wird, durch beide Instrumente gehen zu lassen und die Tangenten der *Ablenkungswinkel* e' und ε' zu beobachten, für welche das Gleichgewicht alsdann besteht. Diese Tangenten der Ablenkungswinkel sind dann nach bekannten Gesetzen den Verhältnissen der ablenkenden *Drehungsmomente* für die Stromintensität = 1, nämlich

$$am \text{ und } b,$$

zu den *Directionskräften* der Boussole und der Bifilarrolle, nämlich

$$\frac{\pi\pi p}{ss} \text{ und } \frac{\pi\pi q}{\varsigma\varsigma},$$

gleichzusetzen, also:

$$e' = am \cdot \frac{ss}{\pi\pi p}, \quad \varepsilon' = b \cdot \frac{\varsigma\varsigma}{\pi\pi q}.$$

Substituirt man diese Werthe in den obigen Gleichungen, so erhält man

$$i\theta = \frac{s}{\pi} \cdot \frac{e}{e'}, \quad ii\theta = \frac{\varsigma}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon'},$$

folglich ist

$$i = \frac{\varsigma}{s} \cdot \frac{e'}{\varepsilon'} \cdot \frac{\varepsilon}{e}$$

$$\theta = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{ss}{\varsigma} \cdot \frac{\varepsilon'}{e'e'} \cdot \frac{ee}{\varepsilon},$$

worin durch einmalige Beobachtung der Ablenkungen e' und ε' sowie der Schwingungsdauer der Boussole und der Bifilarrolle *s* und *ς* die constanten Coefficienten $\frac{\varsigma}{s}$, $\frac{e'}{\varepsilon'}$, $\frac{ss}{\varsigma}$ und $\frac{\varepsilon'}{e'e'}$ für immer bestimmt sind. Es geht hieraus also hervor, dass die an beiden Instrumenten gleichzeitig gemachten Beobachtungen der Ablenkungen *e* und *ε* sich ergänzen, indem sie vereint die vollständigen Data zur Bestimmung der *Intensität* und der *Dauer* eines momentanen

Stromes liefern, während jede einzeln betrachtet, weder das eine, noch das andere kennen lehrt.

Die Fälle, wo diese vollständige, durch gleichzeitigen Gebrauch beider Instrumente erreichbare, Bestimmung momentaner Ströme nützliche *Anwendungen* findet, brauchen nicht weit gesucht zu werden, sie bieten sich von selbst in mannichfaltiger Art dar. So werden z. B. *momentane* Ströme vielfach zu *physiologischen* Versuchen gebraucht, um den *Einfluss des Galvanismus auf das Nervensystem* zu erforschen; denn es zeigt sich, dass eine fortgesetzte Einwirkung des galvanischen Stroms den Nerven, durch welchen er geht, zumal wenn es ein *Sinnesnerv* ist, sehr schnell abstumpft, so dass keine ausgedehntere Reihe schnell auf einander folgender Versuche auf diese Weise ausgeführt werden kann, was möglich wird, wenn man immer nur einen Augenblick lang den Strom durch den Nerven gehen lässt. Diese höchst interessanten Beobachtungen können aber zu keinen bestimmten Resultaten führen, wenn man blos die Verschiedenheit der *Wirkungen* bestimmt, welche von jenen Strömen auf die Nerven hervorgebracht werden, ohne eine *Kenntniss von den Strömen* zu haben, welche jene Wirkungen hervorbringen, insbesondere von ihrer *Intensität* und von ihrer *Dauer*. Eine gründliche Untersuchung der physiologischen Wirkungen galvanischer Ströme auf das Nervensystem fordert daher die vollständige Bestimmung dieser beiden Elemente, die sich aber nur nach der eben entwickelten Methode durch gleichzeitige Beobachtungen des *Galvanometers* und *Dynamometers* erreichen lässt. Jedenfalls ist es eine interessante Aufgabe für die Nervenphysiologie, die *Grenze* der Zeit festzusetzen, wie lange ein Strom auf den Nerven wirken müsse, um eine bestimmte Wirkung in ihm hervorzubringen, und wie sich dieser nothwendige Zeitraum mit der Stromstärke ändere. Ich darf hoffen, dass das Elektrodynamometer zu dem angegebenen Zwecke benutzt werden wird, zumal da schon in dem hiesigen *physiologischen Institute* einige Probeversuche mit gutem Erfolge gemacht worden sind, die bei einer andern Gelegenheit mitgetheilt werden sollen. Gegenwärtig werde ich mich zunächst auf solche Anwendungen beschränken, welche sich im Bereiche der Physik selbst machen lassen und zwar zunächst im Gebiete der reinen *Elektricitätslehre*.

14.

Wiederholung des Ampère'schen Fundamentalversuchs mit gemeiner Elektricität, und Messung der Dauer des elektrischen Funkens bei Entladung einer Leidener Batterie.

Der Ampère'sche Fundamentalversuch über die Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte aus der Ferne war bisher mit einer einzigen Art galvanischer Ströme ausgeführt worden, welche nämlich von einer *Volta'schen Säule* herstammten. Wenn man sich nun gleich mit Recht zu der Vermuthung bewogen findet, dass alle galvanischen Ströme, aus welcher Quelle sie auch stammen

mögen, gleichen Gesetzen unterworfen seien, und dass also auch das Ampère-sche Gesetz über die Wechselwirkung zweier Leitungsdrähte für alle Arten von galvanischen oder elektrischen Strömen sich bestätigen werde, so ist doch diese Bestätigung selbst keineswegs überflüssig. Insofern erscheint es schon wichtig, dass nach den im Vorhergehenden mitgetheilten Versuchen die Ampère-sche Wechselwirkung auch für *magnetoelektrische* und durch *Volta-Induction* erregte Ströme als sichere Thatsache nachgewiesen worden ist. Noch wichtiger scheint es aber zu sein, den Ampère'schen Fundamentalversuch mit *gemeiner Elektricität*, wie sie bei Entladung einer Leidener Flasche oder Batterie durch den angewandten Entladungsdraht geht, zu wiederholen, da zwischen diesem Strome der gemeinen Elektricität und allen andern galvanischen Strömen so erhebliche Verschiedenheiten stattfinden, dass nur die Erfahrung lehren kann, ob der Ampère'sche Fundamentalversuch damit bestehen könne, oder nicht. Insbesondere konnte man, so lange die Erfahrung nicht darüber entschieden hatte, leicht vermuthen, dass entweder die äusserst *kurze Dauer* eines Stromes gemeiner Elektricität, oder, bei längerer Dauer, die *Discontinuirlichkeit* des Stromes der Wechselwirkung zweier langer Leitungsdrähte, wie die beiden Rollen des Dynamometers sind, wesentlich hinderlich sein möchte, weil es möglich wäre, dass die Strömung in dem einen Drahte schon wieder aufgehört hätte, während sie in dem andern erst begönne. Die Erfahrung am *Elektrodynamometer* hat aber bewiesen, dass der Ampère'sche Fundamentalversuch auch mit gemeiner Elektricität gelinge, wovon ich hier nun genauere Rechenschaft geben will.

Es ist bekannt, dass die Wiederholung des *Oersted'schen Fundamentalversuchs* mit der in einer Leidener Flasche angesammelten *gemeinen Elektricität* am sichersten gemacht wird, wenn man das eine Ende einer *nassen Schnur* an dem Auslader befestigt, das andere Ende an dem Leitungsdrahte, welcher den Multiplikator des *Galvanometers* bildet, und dessen anderes Ende mit der äusseren Belegung der Leidener Flasche in leitender Verbindung steht. Entladet man sodann die Leidener Flasche mit dem Auslader, während die nasse Schnur daran hängt, so beobachtet man eine Ablenkung der Magnetnadel in derjenigen *Richtung*, welche durch die *elektromagnetischen* Gesetze voraus bestimmt werden kann. Die Anwendung einer nassen Schnur ist jedoch zu diesem Fundamentalversuche nicht unbedingt nothwendig, sondern scheint nur dann vortheilhaft zu sein, wenn man die in Leidener Flaschen oder Batterien *angesammelte* Elektricität in Anwendung bringen will, und ist entbehrlich, wenn man die Drahtenden des Multiplikators eines empfindlichen Galvanometers mit dem positiven und negativen Conductor einer Elektrisirmaschine unmittelbar in Verbindung setzt. Man beobachtet dann gleichfalls die Ablenkung der Nadel nach der durch die elektromagnetischen Gesetze voraus bestimmten Seite während der Drehung der Elektrisirmaschine. Es ist dabei auch nicht nothwendig, die Drähte besser zu isoliren als es bei anderen galvanischen Ketten geschieht. In dem ersten Falle war die Anwendung einer nassen Schnur darum vortheilhaft, weil ohnedem die Heftigkeit der Entladung die Gefahr einer Vereinigung der geschiedenen und in der Batterie angesammelten Elektricitäten auf anderen Wegen als durch alle Windungen des Leitungsdrahts hindurch mit sich führt.

Diese Gefahr wird vermieden durch Einschaltung einer nassen Schnur, welche die Heftigkeit der Entladung mindert und dennoch gestattet, dass sehr grosse Massen Elektricität in sehr kurzer Zeit durch den Leitungsdraht sich mit einander vereinigen.

Während es nun bei Anstellung des Oersted'schen Fundamentalversuchs mit gemeiner Elektricität hauptsächlich nur darauf ankommt, recht grosse Massen Elektricität durch den Multiplikator zu leiten, *die Zeit* aber, in welcher die Elektricität durch den Draht geht, *weniger* in Betracht kommt, beruht die erfolgreiche Ausführung des Ampère'schen Fundamentalversuchs vielmehr wesentlich darauf, dass grosse Massen Elektricität *in möglichst kurzer Zeit* durch den Leitungsdraht geführt werden, wozu also die Ansammlung der Elektricität in Batterien und die Entladung der Batterie durch eine nasse Schnur vorzüglich geeignet erscheint. Die Wirkung gleicher Massen Elektricität ist bei dem *ersteren* Versuche immer die *nämliche*, die Zeit des Durchgangs mag kleiner oder grösser sein, wenn sie nur nicht so gross wird, dass sie einen beträchtlichen Theil der Schwingungsdauer erfordert; bei dem *letztern* Versuche soll aber, dem vorigen Artikel gemäss, die Wirkung der Zeit des Durchgangs *umgekehrt proportional* sein. Es scheint hiernach die Anwendung der Leidener Batterie nebst nasser Schnur, wenn nicht als nothwendig, doch als besonders günstig für unseren Versuch betrachtet werden zu müssen, und ich habe daher bei meinen ersten Versuchen beide wirklich gebraucht.

Ich verband also zu diesem Zwecke zwei Drahtenden der beiden Rollen des Dynamometers unter einander und führte von den zwei anderen Drahtenden das eine zur äusseren Belegung einer Leidener Batterie, das andere zu einer nassen Schnur, welche an den isolirten Auslader geknüpft war. Die Batterie wurde geladen und endlich der Auslader dem metallenen Knopfe genähert, welcher mit der inneren Belegung der Batterie in Verbindung stand. In dem Augenblicke nun, wo die Entladung der Batterie durch die nasse Schuur und durch die Rollen des Dynamometers statt fand, wurde das vorher in Ruhe befindliche Dynamometer in eine *Schwingung* gesetzt, welche oft einen Bogen von mehreren hundert Skalentheilen umfasste, wovon sogleich mehrere Beispiele angeführt werden sollen. Der am Fernrohr stehende Beobachter konnte leicht die *Grösse* der ersten Elongation und die *Seite*, nach welcher sie erfolgte, bestimmen.

Wurde darauf der Versuch wiederholt, indem die Leidener Flasche oder Batterie auf gleiche Weise wieder geladen wurde, aber mit dem Unterschiede, dass derjenige Draht, welcher vorher mit der äusseren Belegung in Verbindung war, an das Ende der nassen Schnur des Ausladers geknüpft wurde, und das andere Drahtende statt dessen von der Schnur gelöst und mit der äusseren Belegung der Batterie verbunden ward, so war die Wirkung nicht allein der Grösse, sondern auch ihrer Richtung nach die *nämliche*, so dass in der Wirkung des *positiven* und *negativen* Stromes, wie bei gewöhnlichen Strömen, *gar kein* Unterschied statt fand. Und diese *Richtung* der Ablenkung des Dynamometers in Folge des durchgehenden Stromes gemeiner Elektricität ergab sich auch als diejenige, welche durch das Ampère'sche Fundamentalgesetz schon *im voraus* bestimmt war. Es ist hiermit bewiesen, dass der Ampère'sche Fun-

damentalversuch auch mit dem Strome der gemeinen Elektricität gemacht werden kann.

Es war nun aber ferner interessant, zu prüfen, ob zum Gelingen dieser Versuche die Anwendung der nassen Schnur nothwendig oder entbehrlich sei, sowie überhaupt, ob es Fälle gebe, wo der Strom der gemeinen Elektricität zwar den Oersted'schen, aber nicht den Ampère'schen Fundamentalversuch hervorbringe, oder ob beide Arten von Wirkungen auch bei den Strömen der gemeinen Elektricität immer verbunden seien. Es werden hierzu ausgedehntere Versuchsreihen erfordert, als ich bisher angestellt habe; doch mögen einige vorläufige Versuche hier einstweilen Platz finden.

Es wurden die früheren Versuche wiederholt, bald mit Anwendung bald mit Ausschliessung der nassen Schnur, und zugleich damit auch die *elektro magnetischen* Versuche verbunden, indem der Multiplikator eines magnetischen Galvanometers in die nämliche Kette eingeschaltet wurde, welche die beiden Rollen des Dynamometers umfasste. Die letztere Wirkung diente dann als Merkmal und Maassstab, *ob* und *wie viel* Elektricität bei der Entladung der Leidener Flasche durch die Drahtkette wirklich hindurchgegangen war. Um bei Ausschliessung der nassen Schnur den grossen Widerstand, welchen sie leistete, auf andere Weise zu ersetzen, wurde ein feiner Argentandraht von $\frac{3}{10}$ Millimeter Durchmesser um zwei $3\frac{3}{4}$ Meter von einander abstehende Glassäulen so gewunden, dass die einzelnen $7\frac{1}{2}$ Meter langen Windungen ungefähr 40 Millimeter weit von einander entfernt waren, wodurch sie von einander vollkommen isolirt wurden. Der Argentandraht bildete 32 solche Umwindungen und das eine Ende dieses Drahts wurde nun frei durch die Luft zu der geladenen Batterie geführt. Ich stelle in folgender Tafel die Resultate zweier Versuchsreihen zur Vergleichung zusammen, wo nämlich in der einen der Strom durch die nasse Schnur ging, in der andern die nasse Schnur aus der Kette ausgeschlossen war. Die elektrische Batterie bestand aus 4 Flaschen, jede von etwa 2 Quadratfuss belegter Fläche, die mässig stark und bei allen Versuchen so gleichmässig, wie es sich an dem Quadranten-Elektrometer erkennen liess, geladen wurden. Die Schnur war von Hanf, 320 Millimeter lang, 4 Millimeter dick und wurde vor jedem Versuche in Wasser getaucht.

1. Entladung durch die nasse Schnur:

Nr.	Elongation des Galvanometers $= e$	Elongation des Dynamometers $= \varepsilon$
1.	51,75	206,99
2.	56,26	214,94
3.	61,36	236,98
4.	52,68	216,63
5.	55,31	223,88

2. Entladung durch die Drahtkette, ohne Schnur:

Nr.	Elongation des Galvanometers $= e$	Elongation des Dynamometers $= \varepsilon$
6.	7,06	0,85
7.	7,04	0,85

Die Beobachtungen am *Galvanometer* zeigten, dass, wenn bei Anwendung der Schnur alle Elektricität durch die Kette gegangen war, ohne die Schnur nur der 7te bis 8te Theil davon durchging, wonach, unter der Voraussetzung, dass die Entladung ohne Schnur schneller erfolge oder wenigstens nicht langsamer als mit der Schnur, eine mindestens den 50sten Theil der vorhergehenden betragende elektrodynamische Wirkung zu erwarten gewesen wäre. Diese hat aber nicht statt gefunden, sondern, wie die Vergleichung der in der dritten Columne unter ε aufgeführten Beobachtungen zeigt, eine fast 6 Mal noch geringere. So klein übrigens diese letztere Wirkung war, so wurde sie doch deutlich wahrgenommen.

Der Einfluss, den das Wasser ausübte, wenn die Elektricität durch dasselbe geleitet wurde, schien genauer erforscht werden zu können, wenn an die Stelle der nassen Schnur eine mit Wasser gefüllte Glasröhre gesetzt würde. Es wurde daher eine 1200 Millimeter lange, 13 Millimeter im Lichten weite Glasröhre *U*förmig gebogen und mit Wasser gefüllt, zwischen dem Auslader und der übrigen Kette eingeschaltet und die früheren Versuche damit wiederholt, wo sich dann folgende Resultate, bei gleicher Ladung der Batterie wie früher, ergaben, welche bewiesen, dass das in einer Glasröhre eingeschlossene Wasser eine nasse Schnur hierbei nicht ersetzen könne.

Entladung durch eine mit Wasser gefüllte Glasröhre.

Nr.	Elongation des Galvanometers $= e$	Elongation des Dynamometers $= \varepsilon$
1.	4,68	3,23
2.	4,50	1,57.

Alle Vorsichtsmassregeln, welche bei diesem und bei dem vorigen, mit Ausschliessung der nassen Schnur gemachten, Versuche angewendet wurden, um die Elektricität zu nöthigen, ihren Weg hier durch das Wasser der Röhre, dort durch den Argentandraht zu nehmen, um durch den Widerstand dieser Körper die Heftigkeit der Entladung zu mindern und zu bewirken, dass alle Elektricität ihren Weg durch die Leitungsdrähte der Instrumente nähme, waren vergeblich; nur ein geringer Theil der Elektricität schien den letzteren Weg wirklich einzuschlagen. Wurde dagegen die Glasröhre mit einer Schnur von *Glasfäden* vertauscht, so leistete diese, wenn sie äusserlich benetzt war, ähnliche Dienste, wie die benetzte Hanfschnur. Die Entladung durch eine solche 500 Millimeter lange mit Ammoniak befeuchtete Schnur gab folgende am Galvanometer und Dynamometer sich entsprechende Elongationen:

100,55 70,35.

Es scheint die aus einer Leidener Flasche kommende Elektricität an der Oberfläche der Körper sich besonders zu verbreiten, und ein feuchter Leiter deshalb mehr Wirkung zu haben, wenn er äusserlich die Oberfläche dieser Körper bedeckt, als wenn er eingeschlossen ist.

Zuletzt mögen noch die Resultate einer mit der nassen Schnur angestellten Versuchsreihe Platz finden, wobei eine Batterie von 8 eben solchen Fla-

schen, wie früher gebraucht wurde, und eine hanfene Schnur von 7 Millimeter Dicke und 2000 Millimeter Länge eingeschaltet war; diese Länge jedoch gradweise bis auf 125 Millimeter verkürzt wurde.

Länge der Schnur	Elongation des Galvanometers $= e$	Elongation des Dynamometers $= \varepsilon$	$\frac{ee}{\varepsilon}$
2000mm	79,9	65,6	97,3
1000	76,6	153,0	38,3
500	82,3	293,8	23,0
250	87,3	682,0	11,2
125	93,2	aus d. Skale	
250	82,9	609,1	11,3
500	95,6	422,8	21,6
1000	95,8	210,1	43,7
2000	101,5	98,0	105,0

Es möge noch bemerkt werden, dass, als die Schnur in *verdünnte Schwefelsäure* getaucht worden war, eine Entladung der Batterie an dem Galvanometer einen Ausschlag von 83 Skalentheilen gab, während der Ausschlag am Dynamometer selbst bei einer Länge der Schnur von 2000 Millimetern zu gross war, um mit der Skale gemessen zu werden.

Man sieht leicht, dass hier noch ein weites Feld interessanter Versuche offen steht, welches ich darum nicht weiter verfolgt habe, weil dabei das Bedürfniss sich zeigt, die Elektricitätsmenge in der Batterie, welche zu den Versuchen gebraucht wird, einer directen genauen Messung zu unterwerfen, nach dem von Ries in seinen elektrischen Untersuchungen gegebenen Muster, wozu mir aber vor der Hand nicht die geeigneten Mittel zu Gebote standen, weshalb ich diese Arbeit auf eine günstigere Zeit verschiebe.

Indessen zeigt sich doch auch schon in der zuletzt angeführten Versuchsreihe, abgesehen von der *Stärke* der Wirkungen, ein solcher Grad von *Regelmässigkeit*, dass es wahrscheinlich wird, dass bei Entladungen der Leidener Batterie durch eine nasse Schnur wirklich *alle Elektricität* durch die Drahtleitung hindurchgehe und darin einen Strom bilde, der dem Strome einer galvanischen Säule einigermassen an Continuirlichkeit vergleichbar sein dürfte *). Wäre dies der Fall, so könnte man von den vorliegenden Beobachtungen eine wichtige Anwendung machen, indem sich dann die Art. 13. entwickelten Regeln darauf anwenden liessen, um die *Dauer* des Stromes, welche mit der Dauer des *Entladungsfunkens* als gleich betrachtet werden darf, nach *absolutem Zeitmaass* zu bestimmen. Es ist bekannt, dass Wheatstone diese

*) Es lassen sich elektrodynamische Versuche mit *zwei Dynamometern* so anordnen, dass die Elektricität in dem einen *successive*, in dem andern *simultan* durch die feste und schwebende Rolle geführt wird. Durch Vergleichung der Angaben beider Instrumente, wenn eine Batterie durch sie entladen würde, würde sich die Continuirlichkeit oder Discontinuirlichkeit des Stromes genauer erforschen lassen.

Bestimmung der Dauer des Entladungsfunkens auf eine ganz andere Weise bewerkstelligt hat, und es würde interessant sein, die auf so verschiedenen Wegen gefundenen Resultate mit einander zu vergleichen. Um die *relativen Zeitmaasse*, welche wir schon den obigen Versuchen selbst in der mit $\frac{ee}{\varepsilon}$ überschriebenen Columne beigefügt haben, auf *absolute* zu reduciren, bedarf es nach S. 80 nur eines Versuches mit einem constanten, durch beide Instrumente gehenden, Strome, den ich zu diesem Zwecke gemacht, und gefunden habe, dass die in obiger Tafel aufgeführten Werthe von $\frac{ee}{\varepsilon}$ mit

1188

zu dividiren sind, um die Dauer des Stroms in *Secunden* zu erhalten. Hiernach ist die folgende Tafel berechnet:

Länge der Schnur. Millimeter.	Dauer des Funkens. Secunde.
2000	0,0819
1000	0,0322
500	0,0193
250	0,0094
250	0,0095
500	0,0182
1000	0,0368
2000	0,0883

oder in Mittelwerthen:

Länge der Schnur. Millimeter.	Dauer des Funkens. Secunde.
2000	0,0851
1000	0,0345
500	0,0187
250	0,0095

Es ergiebt sich hieraus, dass die *Dauer des Funkens der Länge der Schnur fast proportional* ist, wie folgende Uebersicht der darnach *berechneten* Werthe und ihrer Differenzen von den *beobachteten* Werthen beweisen:

Länge der Schnur. Millimeter.	Berechnete Dauer des Funkens. Secunde.	Unterschied von der beobachteten. Secunde.
2000	0,0816	— 0,0035
1000	0,0408	+ 0,0063
500	0,0204	+ 0,0017
250	0,0102	+ 0,0007.

Vergleicht man hiermit das von Wheatstone gefundene Resultat, wonach die Dauer des Funkens bei Entladungen durch blos metallische Leiter gegen die hier gefundene Dauer verschwindend klein ist, so steht dieses mit der hier ge-

fundenen Proportionalität der Funkendauer und der Länge der nassen Entladungschnur in vollkommenem Einklange. Dass hiernach die *Bewegung der Elektricität im Wasser* so *langsam* geschieht, dass die Zeit, welche sie für den kurzen Weg von 2 Metern braucht, ungefähr $\frac{1}{12}$ Secunde beträgt, verdient jedenfalls besondere Aufmerksamkeit. Man könnte zwar gegen die Anwendung der Regel, wonach diese Zeitbestimmungen gemacht sind, abgesehen von dem von der Discontinuirlichkeit der Ströme gemeiner Elektricität hergenommenen Einwande (von welchen schon oben die Rede war, und welcher in hohem Grade oder ganz durch den Einfluss des Wassers beseitigt sein dürfte) noch den Einwand machen, dass der Strom im ersten Momente am intensivsten sei, und *allmählig abnehmen* werde, statt dass obige Regel nur dann genaue Anwendung findet, wenn der Strom während seiner kurzen Dauer immer gleiche Intensität besitzt. Erfährt man aber auch in diesem Falle nicht die wahre Dauer, sondern diejenige Dauer, welche einer *mittleren Stromstärke* entsprechen würde, so dürfte doch der Werth der Bestimmung dadurch wenig verlieren, weil die Kenntniss der letzteren Dauer in der Regel mehr Interesse haben wird als die der erstern. Auch ist zu bemerken, dass aus demselben Grunde bei der Wheatstone'schen Bestimmung der Funkendauer eine ähnliche Differenz veranlasst werde, weil der Funke in eine Linie ausgedehnt wird, die in Folge jener Abnahme sich allmählig ohne scharfe Begrenzung verliert.

15.

Es würden hier noch zwei Untersuchungen im Gebiete der *reinen Elektricitätslehre* auszuführen sein, für welche die Anwendung des Dynamometers einen neuen Weg eröffnet, auf die ich jedoch gegenwärtig noch nicht näher eingehen werde, weil es noch an den nöthigen Versuchen fehlt, um zugleich mit der Methode auch die damit gewonnenen Resultate darzulegen. Diese beiden Untersuchungen betreffen:

1) die Bestimmung der Geschwindigkeit der Stromverbreitung, worüber bisher blos einige wenige Versuche von Wheatstone vorliegen, die aber nach Wheatstone's eigener Angabe noch zu keinen sichern Resultaten geführt haben;

2) die Bestimmung der elektromotorischen Kraft einer galvanischen Kette unabhängig von der Polarisation ihrer Platten.

Die *erstere* Anwendung fordert, dass die Bifilarrolle von der festen durch lange Leitungsdrähte geschieden, und in dieser langen Kette ein Strom hervorgebracht werde, dessen Richtung gleich schnell wechselt, wie Wheatstone's Spiegel herumgedreht wird. Es würde die Anwendung des Dynamometers, im Vergleich mit Wheatstone's Methode, den Vortheil gewähren, dass galvanische Ströme statt gemeiner Elektricität gebraucht, und die Kette nirgends unterbrochen würde, was bei Wheatstone zur Darstellung der Funken nothwendig war. Die *letztere* Anwendung beruht auf der Messung momentaner Ströme nach Art. 13.

16.

Anwendung des Dynamometers auf Intensitätsmessungen der Schallschwingungen.

Es bleibt noch übrig, eine Anwendung des Dynamometers auf Untersuchungen in einem andern Theile der Physik mitzutheilen, welche ein besonderes Interesse darum zu haben scheint, weil sie dasjenige, was mit diesem Instrumente zu leisten sei, von einer eigenthümlichen Seite in ein helles Licht setzt. Wir besitzen ausserordentlich feine *Galvanoskope*, womit wir im Stande sind, auch die schwächsten in der Natur vorkommenden Ströme zu entdecken und zu erforschen. Wir brauchen uns blos der schönen Arbeiten von Melloni zu erinnern, um auf den Gebrauch dieser feinen Instrumente und die damit aufgefundenen Spuren von elektrischen Bewegungen die grösste Wichtigkeit für die gesammte Wissenschaft zu legen. Trotz dieser Feinheit der Instrumente ist es aber in vielen Fällen doch nicht gelungen, elektrische Ströme überall nachzuweisen, wo man solche vermuthete, vielleicht weil jene Instrumente trotz ihrer Feinheit dazu ungeeignet waren. Dieser Grund verdient um so mehr Beachtung, als sich *eine* Art von Strömen nachweisen und wirklich darstellen lässt, von denen auch jene feinsten Instrumente der Natur der Sache nach gar nicht afficirt werden können. Dieses findet statt, wenn wir mit einem veränderlichen Strome zu thun haben, welcher in sehr kurzen, auf einander folgenden Zeitabschnitten *seine Richtung immer wechselt.* Die abwechselnd entgegengesetzten Wirkungen dieses Stromes auf die empfindlichste Magnetnadel müssen sich, wenn der Magnetismus der letzteren immer der nämliche bleibt, vollkommen annulliren. Die von Poggendorff (Annalen 1838. Bd. 45. S. 353 ff.) beobachteten Erscheinungen, wo dieses nicht statt zu finden schien, rührten jedenfalls von einer Veränderlichkeit des Nadelmagnetismus her, und würden bei sehr beschleunigtem Stromwechsel wieder verschwunden sein. Solche Ströme, deren Richtung sehr schnell wechselt, können also in der Natur in grosser Menge existiren, ohne dass wir noch eine Ahnung von ihrer Existenz haben, weil wir kein Mittel besitzen, sie zu entdecken. Und es ist gar nicht unwahrscheinlich, dass solche Ströme existiren, denn die Bewegung der Elektricität in ihnen würde sich von der Bewegung der Elektricität in gewöhnlichen Strömen nur dadurch unterscheiden, dass sie in einer *Schwingung* bestände, während in letzteren die Bewegung der Elektricität *progressiv* ist. Da nun die progressive Bewegung der Elektricität in der Natur so häufig vorkommt, so ist nicht einzusehen, warum nicht, bei so grosser Beweglichkeit, auch bisweilen Verhältnisse eintreten sollten, welche eine schwingende Bewegung begünstigten. Wenn z. B. die Lichtundulationen eine Wirkung auf die elektrischen Fluida übten und das Gleichgewicht derselben zu stören vermöchten, so würde

gewiss zu erwarten sein, dass diese *Wirkungen* der Lichtundulationen sich der Zeit nach eben so periodisch gestalteten, wie die *Lichtundulationen selbst*, so, dass das Resultat in einer *elektrischen Schwingung* bestände, die wir aber mit unsern Instrumenten nicht zu entdecken vermöchten. Nun geschehen die Lichtschwingungen so schnell, dass, wenn die dadurch erregten elektrischen Schwingungen einen gleich geschwinden Wechsel befolgten, kaum zu hoffen wäre, dass es gelingen werde, mit irgend einem Instrumente eine Wirkung davon wahrzunehmen. Es finden sich aber in der Natur auch langsamere Schwingungen, z. B. die akustischen, und es fragt sich daher, ob es nicht elektrische Bewegungen in der Natur gebe, welche ihnen ihren Ursprung verdanken, und wenn es solche gebe, auf welche Weise wir dieselben entdecken und erforschen könnten.

Ich will hier wenigstens ein Beispiel von solchen durch Schallschwingungen erregten *elektrischen Schwingungen* geben und den thatsächlichen Beweis liefern, wie solche elektrische Schwingungen mit Hülfe des *Dynamometers* wahrgenommen und erforscht werden können, und wie die messbaren Wirkungen dieser elektrischen Schwingungen wieder benutzt werden können, um auf die Schallschwingungen, von denen sie herrühren, rückwärts zu schliessen, und dadurch für manche akustische Untersuchungen eine neue Bahn zu eröffnen, für welche es uns gänzlich noch an geeigneten Mitteln gebricht, die *Intensität der Schallschwingungen* zu messen.

In der That besteht die Eigenthümlichkeit des Dynamometers, welche dasselbe am meisten charakterisirt und von allen andern Galvanometern unterscheidet, darin, dass es für die *Richtung* des Stromes, der darauf wirkt, *indifferent* ist, während andere Galvanometer bei entgegengesetzten Richtungen der Ströme entgegengesetzte Einwirkungen erleiden. Es ist darauf schon oben Art. 13. aufmerksam gemacht worden. Wir können dies kurz dadurch ausdrücken, dass das Dynamometer in Beziehung auf *constante* Ströme einen Maassstab für das *Quadrat der Stromintensität* gebe, während andere Galvanometer einen Maassstab für die Stromintensität selbst darbieten.

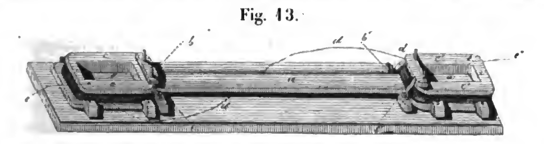
Aus dieser charakteristischen Eigenschaft des Dynamometers leuchtet nun von selbst ein, dass die schnell auf einander folgenden Wirkungen entgegengesetzter Ströme sich nicht, wie beim elektromagnetischen Galvanometer, einander aufheben, sondern vielmehr summiren müssen; und dass folglich das Dynamometer seiner Natur nach seine wahre Bestimmung darin finde, solche auf andere Weise nicht wahrzunehmende Ströme an den Tag zu bringen.

Nun sind zwar die *Schallschwingungen* meist in so engen, fast mikroskopischen Grenzen eingeschlossen, dass wir kaum hoffen dürfen, durch dieselben elektrische Schwingungen in so weiten Grenzen hervoszubringen, als nothwendig sind, um auf das Dynamometer merklich zu wirken. Wenn man indessen die absoluten Geschwindigkeiten, mit welchen sich die schallenden Körper in der Mitte ihrer Schwingungen bewegen, berechnet, so ergiebt sich, dass diese, in Betracht der kurzen Schwingungsdauer, trotz des kleinen Schwingungsbogens, nicht ganz unbeträchtlich sind, sondern oft 1 Fuss und mehr in einer Secunde betragen. Hierauf bauend, habe ich einen Versuch so angestellt, wie er am ersten zu einem Resultate führen zu können schien. Ich habe einen

2. Taf. III.

Klangstab von Stahl *aaa* Fig. 13. anfertigen und härten lassen, habe denselben magnetisirt und ihn sodann in den Endpunkten *b, b, b', b'* seiner Knotenlinien

Fig. 13.



zwischen Schraubenspitzen als Drehungsaxen befestigt, wie ich es in Poggendorff's Annalen 1833. Bd. 28. S. 4 beschrieben habe, und zwar so, dass er in drei gleichzeitig nach entgegengesetzten Seiten schwingende Abtheilungen zerfiel. Die beiden Endabtheilungen machten folglich gleichzeitig ihre Schwingungen nach gleicher Richtung, abwechselnd aufwärts und abwärts. Der freie Magnetismus, welcher in diesen Stäben verbreitet ist, kann nach der von Gauss angegebenen idealen Vertheilung, welche in allen Wirkungen nach aussen die wirkliche Vertheilung vertritt, auf der Oberfläche des Stabes verbreitet gedacht werden, und zwar muss bei starker Magnetisirung der freie Nordmagnetismus fast gänzlich auf der Oberfläche der einen schwingenden Endabtheilung, der freie Südmagnetismus fast gänzlich auf der Oberfläche der andern schwingenden Endabtheilung, und zwar je näher am Ende, desto mehr concentrirt gedacht werden, d. h. gerade da am meisten, wo die Schallschwingungen am grössten sind. Daher umgab ich nun diese beiden schwingenden Endabtheilungen mit starken Inductoren *ccc* und *c'c'c'* von feinem Kupferdrahte, welche jedoch den Stab nirgends berührten, damit seine Schwingungen nicht gehemmt würden. Auch war an den einander zugekehrten Seiten der Inductoren zwischen ihren Drahtwindungen ein Durchgang frei geblieben, durch welchen der Stab mit seinen Enden in die Inductoren eingeschoben wurde. Die Windungen der Inductoren waren unter sich parallel und lagen in einer Ebene, gegen welche die Schallschwingungen des Klangstabes senkrecht geschahen. Die beiden Inductoren wurden mit zwei ihrer Drahtenden *dddd* unter sich verbunden, so, dass sie entgegesetzt gewundene Spiralen bildeten. Ihre beiden Drahtenden *ee* und *e'e'* wurden mit zwei Drahtenden der festen und drehbaren Rolle des Dynamometers in Verbindung gesetzt, deren beide andern Drahtenden unter sich verbunden waren. Das Dynamometer war vollkommen in Ruhe. Nachdem Alles so vorbereitet war, wurde der Klangstab durch einen starken Schlag mit einem weichen Klöppel auf seine Mitte in starke Schwingung gesetzt. Sogleich zeigte sich eine Ablenkung der Bifilarrolle, welche 20 bis 30 Skalentheile betrug, und zeichnete man alsdann die Maxima und Minima des Schwingungsbogens der von nun an schwingenden Bifilarrolle auf, so sah man, dass der daraus berechnete Ruhestand, um welchen die Schwingung geschah, geändert war, dass derselbe aber, wie die Schallschwingungen an Stärke abnahmen, schnell wieder zum ursprünglichen Stande zurückkehrte. Ich bemerke, dass ich die Elongation der Bifilarrolle auf mehrere hundert Skalentheile gebracht habe, indem ich den Klangstab nur so lange schwingen liess, als die Elongation

im Wachsen war, dagegen den Klangstab dämpfte, während die Bifilarrolle wieder rückwärts schwang, und den Klangstab von neuem anschlug, sobald die Bifilarrolle wieder in der ursprünglichen Richtung sich zu bewegen begann u. s. f.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass, wenn nach der angegebenen Methode wirklich genauere Bestimmungen über die Intensität der Schallschwingungen gewonnen werden sollen, der Klangstab nicht durch einen Klöppelschlag in Schwingung versetzt werden darf, weil die Intensität der so hervorgebrachten Schwingungen sehr schnell abnimmt und bald ganz verschwindet, sondern durch eine fortdauernde geregelte Einwirkung in einer constanten Schwingung längere Zeit erhalten werden muss.

Dass die elektrischen Schwingungen, welche hiedurch thatsächlich nachgewiesen werden, unter den Verhältnissen, unter welchen wir beobachteten, statt fänden, liess sich mit Sicherheit voraussetzen; es kam daher nur darauf an, die Methode, solche Schwingungen *wahrnehmbar* zu machen, daran zu prüfen. Nachdem nun diese Methode aber bewährt gefunden worden ist, so kann man darauf weiter bauen, und gewiss wird die Benutzung dieser Methode zur Entdeckung elektrischer Schwingungen unter bisher noch nicht geahneten Verhältnissen führen. Zum Beleg der Mannichfaltigkeit dieser Erscheinungen möge hier noch folgender Versuch angeführt werden. Wird nahe neben einer schwingenden Saite, die einen Theil einer in sich zurücklaufenden Drahtkette bildet, ein starker galvanischer Strom vorbeigeführt, so werden in Folge jener Schwingungen in der Drahtkette abwechselnd positive und negative Ströme inducirt, auf ähnliche Weise, wie von dem schwingenden Magnetstabe, deren Intensität mit dem Dynamometer gemessen werden kann.

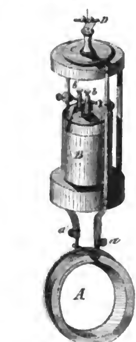
17.

Ueber verschiedene Einrichtungen des Dynamometers.

Es giebt *drei* wesentlich verschiedene Einrichtungen, welche man dem Dynamometer geben kann, die alle geeignet sind, zu genauen Messungen zu dienen, und unter verschiedenen Verhältnissen eigenthümliche Vorzüge gewähren. Ausser der *ersten* Einrichtung, welche bisher in Anwendung gebracht wurde, bietet sich nämlich zunächst eine *zweite* gleichsam von selbst dar, da sie ihrem wesentlichsten Bestandtheile nach schon häufig zur Beobachtung der Einwirkung des Erdmagnetismus auf einen Stromleiter benutzt worden ist. Man hat nämlich zu diesem Zwecke einen kreisförmig gewundenen Leiter sammt der Säule, von welcher der Strom ausgeht, an einem Faden oder Drahte, wie einen Magnet, aufgehangen und hat das Drehungsmoment beobachtet, welches die Erde auf einen solchen in sich geschlossenen Kreisstrom auf gleiche Weise wie auf eine aufgehangene Magnetnadel ausübt. In der That besitzt man in dieser Vorrichtung einen drehbaren Leiter, dessen Schwingungen und Ablenkungen eben so fein, wie die unserer Bifilarrolle beobachtet werden können,

und es ist nur nöthig, diese schwebende Säule mit einem festen Multiplikator zu umgeben, durch welchen ebenfalls ein Strom geht, um das Dynamometer zu vollenden. Dazu kommt nun, dass durch die Entdeckung der *constanten* Säulen von Daniell und Grove der Weg zu feineren Anwendungen eines solchen Instruments gebahnt worden ist, denen früher die Veränderlichkeit der Ströme entgegenstand. Besonders eignet sich hierzu ein kleiner Grove'scher Becher, der bei geringen Dimensionen und kleinem Gewichte, einen ziemlich starken und constanten Strom giebt. Fügt man Spiegel, Fernrohr und Skale hinzu, so lassen sich die feinsten Beobachtungen mit diesem Instrumente ausführen. Fig. 14. stellt ein solches Instrument, wie ich es zu diesem Zwecke

Fig. 14.



gebraucht habe, dar. *A* ist der ringförmig aufgewundene Draht, dessen Enden durch Verbindungsstücke von Messing *a b* und *a' b'* mit dem Platin- und Zinkpole eines kleinen Grove'schen Bechers *B* vom Mechanikus Kleinert in Berlin in Verbindung gesetzt wurde. Dieser Becher steht auf einem hölzernen Gestell, welches oberhalb mit einem Torsionskreise *C* versehen ist, an welchem bei *D* der Aufhängungsfaden befestigt wird.

So geeignet indess diese Einrichtung des Dynamometers für einige besondere Zwecke sein möge, so ist sie doch weit entfernt, die erstere Einrichtung ersetzen zu können, wovon der Grund in dem Mangel *zweier* Eigenschaften liegt, welche das Dynamometer mit der *Bifilarrolle* besitzt, und die darauf beruhen, dass der Strom, welcher durch die Bifilarrolle geht, sich weiter leiten lässt, sowohl durch die als Multiplikator dienende feste Rolle, als auch durch beliebige andere Leiter. Die *erste* Eigenschaft besteht darin, dass dieses *Dynamometer* mit einem *Galvanometer* zugleich gebraucht werden kann, wodurch eine unabhängige Intensitätsmessung des Stromes in der Bifilarrolle gewonnen wird, was bei jenem Intrumente nicht der Fall ist, weil bei ihm der Strom der schwebenden Säule nicht durch den Multiplikator eines *Galvanometers* abgeleitet werden kann. Die gleichzeitigen Beobachtungen am *Galvanometer* und

Dynamometer gestatten aber, die elektrodynamischen Wirkungen auf *gleiche Stromintensität* zu reduciren, wie dies im Vorhergehenden häufig geschehen ist. Der Mangel dieser Eigenschaft wird durch Anwendung constanter Säulen nicht gänzlich beseitigt, weil die Stromintensität auch solcher Säulen immer noch beträchtlichen Schwankungen unterworfen ist, welche bei genaueren Bestimmungen keineswegs vernachlässigt werden dürfen.

Die *zweite* Eigenschaft besteht darin, dass man, indem man die mit dem *Dynamometer* zu untersuchenden Ströme durch *beide* Rollen, durch die feste sowohl, als durch die drehbare, gehen lässt, das *Quadrat der Stromintensität* bestimmen kann, welches unabhängig ist von der *Richtung* des Stromes. Hierauf beruhte die Eigenthümlichkeit des Instrumentes, welche es fähig machte, in Verbindung mit dem elektromagnetischen Galvanometer die nothwendigen Elemente zur Kenntniss *momentaner* Ströme zu liefern. Siehe oben Art. 13.. Auch diese Eigenschaft mangelt dem andern Instrumente, dessen drehbare Rolle eine in sich abgeschlossene schwebende Säule bildet; denn die verschiedenen zu *untersuchenden* Ströme können hier blos durch den Leitungsdraht der *festen* Rolle geführt werden, während der Strom in der *drehbaren* Rolle unverändert bleibt, wo dann die Wirkung, wie beim elektromagnetischen Galvanometer, der Stromintensität selbst proportional ist, und folglich das Instrument blos die Dienste eines elektromagnetischen Galvanometers zu leisten, dieselben aber nicht zu ergänzen vermag.

Ich gehe zur *dritten* Einrichtung des Dynamometers über, welche, indem sie die wesentlichsten Eigenschaften der ersten theilt, geeignet ist, den elektrodynamischen Messungen eine noch grössere Ausdehnung zu geben, besonders in solchen Fällen, wo die *erste*, wegen der nothwendigen Feinheit der Aufhängungsdrähte, durch welche der Strom hindurch geleitet wird, den Dienst versagt.

Diese dritte Einrichtung beruht auf demselben Princip, welches ich in den Commentat. Soc. Reg. Sc. Gottingensis recentiores, Vol. VIII. zu dem Zwecke entwickelt habe, eine vollkommen drehbare, von der Reibung freie *Wage* darzustellen, nämlich auf dem Princip der Compensation zwischen *Schwerkraft* und *Federkraft*. Ich habe dort den horizontalen Wagbalken an zwei elastischen, verticalen Federn aufgehangen. Diese Federn beugten sich zwar, wenn der Wagbalken gedreht wurde, und suchten also durch ihre *Federkraft* die Drehung desto mehr zu *hemmen*, je mehr der Wagbalken gedreht worden war; fand aber dabei die Drehung des Wagbalkens um eine Axe statt, welche tiefer lag, als der Schwerpunkt desselben, so suchte die *Schwerkraft*, wenn der Wagbalken gedrehet wurde, die Drehung zu *fördern*, desto mehr, je mehr der Wagbalken gedrehet worden war, und es liess sich eine solche Einrichtung treffen, dass jene *hemmende* Einwirkung der *Federkraft* und diese *fördernde* Einwirkung der *Schwerkraft* einander das Gleichgewicht hielten, und der Wagbalken folglich nicht blos in horizontaler, sondern auch in geneigter Lage im Gleichgewicht beharren und ohne von der Reibung gehindert zu werden, beim geringsten Antriebe aus einer dieser Lagen zur andern übergehen konnte.

Einen solchen *compensirten* Wagbalken benutze ich nun für das Dynamometer und ersetze dadurch die drehbare Rolle, indem ich von den beiden Aufhängungsfedern hier denselben Gebrauch für die Zuleitung und Ableitung des

Stromes mache, wie dort von den beiden Aufhängungsdrähten. Diese Federn sind dann insbesondere jenen feinen Drähten vorzuziehen, wenn es sich um Ströme von grosser Intensität handelt, welche nicht durch feine Drähte geleitet werden dürfen. Bei solchen Strömen begnügt man sich, dieselben durch eine möglichst starke und kurze Kette zu führen; daher kann der Wagbalken, durch welchen dieser Strom gehen soll, aus einem von jenen beiden Federn getragenen, mässig langen Stabe bestehen, an welchem aber ein Spiegel für die feinere Beobachtung angebracht wird. Was endlich die *feste* Rolle betrifft, so wird dieselbe aus gleichem Grunde durch einen andern, mässig langen *festen* Stab ersetzt, durch welchen der galvanische Strom ebenfalls geleitet wird, und welcher dann auf jenen *drehbaren* Stab wirkt, und ihn, wie eine Wage, ablenkt. Die Empfindlichkeit dieses Instruments beruht hauptsächlich darauf, dass die beiden Stäbe (der feste und der drehbare) parallel in geringer Entfernung von einander gestellt werden. Ich habe dieses Instrument vorzüglich dazu bestimmt, um den elektrodynamischen Versuchen mit *gemeiner* Elektricität eine grössere Ausdehnung zu geben, indem die besondern Umstände entbehrlich werden, welche nöthig waren, um die Entladung einer Leidener Flasche durch die vielen Windungen der beiden Rollen des *ersten* Dynamometers wirklich sicher zu bewerkstelligen. Dieses letzte Instrument ist bisher noch nicht in derjenigen Vollkommenheit ausgeführt worden, wie es für eine solche Versuchsreihe nöthig sein würde.

Ehe ich diesen Abschnitt über die Einrichtung der Dynamometer beschliesse, will ich noch eine Bemerkung über die Verwandlung derselben in *magnetische Galvanometer* hinzufügen. Ich habe schon erwähnt, dass die für die oben beschriebene *zweite* Einrichtung benutzte, ganz in sich selbst abgeschlossene *schwebende* Säule ihre Anwendung zu *elektromagnetischen* Versuchen, nämlich um die Einwirkung des Erdmagnetismus auf einen Stromleiter zu beobachten, schon früher gefunden habe. Mit dieser in sich abgeschlossenen schwebenden Säule, wenn man auf die Unveränderlichkeit ihres Stromes vollkommen bauen könnte, würden sich alle Versuche und Messungen über den Erdmagnetismus gerade so, wie mit dem Magnetometer ausführen lassen, und es würde ihm in so fern der Name eines *galvanischen Magnetometers* zu geben sein. Unser erstes Dynamometer lässt sich dagegen zu einem *magnetischen Galvanometer* gebrauchen, welches sogar im Vergleiche mit einem mit Multiplikator versehenen Magnetometer grosse Vorzüge darbietet, wenn es sich nicht blos um relative, sondern um *absolute* Bestimmung der Stromintensitäten handelt. Bei dem mit Multiplikator versehenen Magnetometer steht der Stromleiter fest, und der Magnet ist drehbar; es ist aber ohne wesentlichen Einfluss auf die Wirkung, wenn man dies Verhältniss umkehrt und den Magnet feststellt, während der Stromleiter drehbar ist. Zu dem drehbaren Stromleiter kann nun die an zwei Aufhängungsdrähten schwebende Rolle unseres Dynamometers dienen, und zu dem festen Magnete (welcher hier die feste Rolle vertritt) kann man die Erde selbst benutzen. Soll die Erde nun aber diesen Dienst wirklich leisten, so muss die Bifilarrolle anders orientirt werden, nämlich statt wie früher, gleich einem *Declinationsmagnetometer*, so orientirt zu werden, dass ihre Axe dem magnetischen Meridian parallel ist, muss sie, gleich dem *Inten-*

sitätsmagnetometer, so orientirt werden, dass ihre Axe senkrecht auf dem magnetischen Meridiane steht. Man kann sie dann ein *magnetisches Bifilargalvanometer* nennen. Dieses einfache Instrument gewährt dann für *absolute* Bestimmung der Stromintensitäten grosse Vortheile, eben dadurch, dass die Lage und Entfernung der einzelnen Theile des Leitungsdrahtes gegen die einzelnen Theile des Magneten wegen der grossen Entfernung, aus welcher der Erdmagnetismus wirkt, nicht mehr einzeln in Rechnung gezogen zu werden braucht, und daher zum Zwecke dieser absoluten Bestimmung der Stromintensität ausser der Kenntniss des Erdmagnetismus, der Ablenkung, der Schwingungsdauer und des Trägheitsmoments nach absoluten Maassen, nur die Kenntniss eines einzigen Elementes erforderlich ist, nämlich die Kenntniss des vom Drahte umschlossenen *Flächenraums,* wie ich schon in den «Resultaten aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereines im Jahre 1840» S. 93 aus einander gesetzt habe, wo ich einige solche Intensitätsbestimmungen nach absolutem Maasse, welche mit diesem Instrumente gemacht worden, mitgetheilt habe.

Die bisherige Untersuchung hatte hauptsächlich den Zweck, auf *experimentellem* Wege zu Maassbestimmungen über die elektrodynamischen Kräfte zu führen, und dieselben nach den auf Raum-, Zeit- und Massenmaass reducirten *absoluten* Maassen auszudrücken. Hierdurch war die den Instrumenten gegebene Einrichtung motivirt, welche, wie bei den Magnetometern von Gauss, eine festere Aufstellung und einen grösseren Raum in Anspruch nimmt, als bei anderen physikalischen Apparaten erfordert wird, bei welchen der Maasstab an dem zu beobachtenden Instrumente unmittelbar angebracht ist. Bei einer auf jene Weise einmal zweckmässig getroffenen Einrichtung konnten einzelne grössere Versuchsreihen mit Genauigkeit ausgeführt werden; es liess sich aber diese Einrichtung nicht so leicht wieder ändern und verschiedenartigen Zwecken anpassen. Ich muss es dabei noch als einen besonders günstigen Umstand anerkennen, dass die Räumlichkeit des Leipziger physikalischen Instituts diesen Einrichtungen im Allgemeinen günstig war; dennoch musste ich zu manchen Zwecken, wie mehrfach erwähnt worden ist, für jetzt nur auf Probeversuche mich beschränken, weil nicht alle Einrichtungen auf gleich entsprechende Weise hergestellt werden konnten. Mit Rücksicht auf diese, anderwärts vielleicht noch mehr als hier, vorhandene äussere Beschränkung, und weil auch viele Experimentatoren mit solchen Instrumenten zu beobachten weniger gewohnt sind, habe ich den hiesigen Mechanikus Herrn Leyser veranlasst, dass er, zum leichteren und bequemeren Handgebrauche, kleinere portatife Instrumente, ohne katoptrische Vorrichtung, auf die gewöhnliche einfache Weise mit Zeiger und getheiltem Kreise ausführe, welche zur Anstellung der meisten Versuche und zu gewöhnlichen Messungen genügen. Auf diese kleineren Instrumente mache ich diejenigen aufmerksam, welche sich mit ähnlichen Versuchen beschäftigen wollen, unter Verhältnissen, welche die Anwendung der beschriebenen Instrumente nicht gestatten.

ÜBER DEN ZUSAMMENHANG DER ELEKTROSTATISCHEN UND DER ELEKTRODYNAMISCHEN ERSCHEINUNGEN,

NEBST ANWENDUNG AUF DIE ELEKTRODYNAMISCHEN MAASSBESTIMMUNGEN.

18.

Da das von Ampère aufgestellte elektrodynamische Fundamentalgesetz durch genaue Messungen vollkommen bestätigt gefunden wird, so könnten die *Fundamente der Elektrodynamik* vielleicht für abgeschlossen betrachtet werden. Es würde dies mit Recht geschehen, wenn alle weiteren Forschungen nur in der Entwickelung der Anwendungen und Folgen, welche sich auf jenes Fundamentalgesetz gründen lassen, beständen. Denn könnte man auch zwar noch nach dem *Zusammenhange* fragen, welcher zwischen dem *elektrodynamischen* und *elektrostatischen* Fundamentalgesetzte bestehe; so würde doch, so interessant es auch sein möge, und so wichtig für eine genauere Kenntniss der *Natur der Körper,* diesen Zusammenhang erforscht zu haben, sich daraus nichts mehr zur Erklärung der *elektrodynamischen Erscheinungen* ergeben können, wenn diese wirklich schon ihre vollständige Erklärung in dem Ampère'schen Fundamentalgesetze gefunden hätten. Kurz, ein wesentlicher Fortschritt für die Elektrodynamik selbst würde dadurch, dass man ihr Fundament wieder auf das Fundament der Elektrostatik zurückführte, nicht erreicht werden, so wichtig und interessant auch in andern Beziehungen eine solche Zurückführung sein möchte.

Diese Ansicht von dem Abschlusse, zu welchem die Fundamente der Elektrodynamik durch Ampère's Grundgesetz und dessen Bewährung gelangt seien, setzt aber wesentlich voraus, dass wirklich *alle* elektrodynamischen Erscheinungen in jenem Grundgesetze ihre Erklärung finden. Wäre dies nicht der Fall, gäbe es irgend eine Klasse von elektrodynamischen Erscheinungen, welche ihre Erklärung darin nicht fänden, so würde jenes Grundgesetz nur als ein provisorisches zu betrachten sein, welches durch ein wirklich allgemein gültiges und auf alle elektrodynamische Erscheinungen anwendbares definitives Grundgesetz künftig zu ersetzen wäre. Und es könnte dann wohl geschehen, dass man zu diesem definitiven Grundgesetze gelangte, indem man zunächst eine Zurückführung des Ampère'schen Gesetzes auf ein allgemeineres, die Elektrostatik mit umfassendes Grundgesetz versuchte. Es wäre nämlich mög-

lich, dass aus der nämlichen Quelle, aus welcher alsdann sowohl das elektrostatische als das Ampère'sche Gesetz abgeleitet würde, unter veränderten Verhältnissen sich auch das Gesetz der übrigen elektrodynamischen Erscheinungen ergäbe, die sich auf das Ampère'sche Gesetz unmittelbar nicht zurückführen lassen, und dass dann die Fundamente der Elektrodynamik in grösster Allgemeinheit nicht abgesondert für sich, sondern nur abhängig von dem allgemeinsten, die Fundamente der Elektrostatik mit umfassenden, elektrischen Grundgesetze dargestellt würden.

Es giebt nun in der That eine solche Klasse elektrodynamischer Erscheinungen, welche, wie ich hier immer voraussetze, von Wechselwirkungen abhängen, die die Elektricitäten *aus der Ferne* auf einander ausüben, und die unter dem Ampère'schen Gesetze nicht mit enthalten sind und nicht daraus erklärt werden können, nämlich die von Faraday entdeckten Erscheinungen der *Volta-Induction*, d. h. die *Entstehung eines Stromes* in einem Leitungsdrahte durch Einwirkung eines vorhandenen Stroms, welchem er genähert wird; oder die *Entstehung eines Stromes* in einem Leitungsdrahte, wenn die Intensität des Stroms in einem andern benachbarten, Leitungsdrahte zu- oder abnimmt.

Das Ampère'sche Gesetz lässt nichts zu wünschen übrig, sobald es sich um die Wechselwirkungen von Leitungsdrähten handelt, deren Ströme eine *unveränderliche Intensität* besitzen, und die selbst *in ihrer Lage* gegen einander *beharren*; sobald aber Aenderungen von Stromintensitäten eintreten, oder die Leitungsdrähte gegen einander bewegt werden, giebt das Ampère'sche Gesetz von den Erscheinungen keine vollständige und genügende Rechenschaft; es lehrt dann nämlich blos die Wirkungen kennen, welche auf das *ponderabele* Drahtelement, nicht aber die Wirkungen, welche auf die darin enthaltene *imponderable* Elektricität statt finden. Es geht also hieraus hervor, dass dieses Gesetz nur als ein Particulargesetz Gültigkeit besitzt, und nur provisorisch für ein Grundgesetz genommen werden darf, welches durch ein wirklich allgemein gültiges, auf alle elektrodynamischen Erscheinungen anwendbares definitives Grundgesetz noch zu ersetzen ist.

Nun ist man zwar im Stande, auch die Erscheinungen der *Volta-Induction* zum Theil voraus zu bestimmen; diese Bestimmung beruht aber nicht auf dem Ampère'schen Fundamentalgesetze, sondern auf dem Fundamentalgesetze der *Magneto-Induction*, welches unmittelbar aus der Erfahrung abgeleitet werden konnte, und welches bis jetzt noch ohne einen innern Zusammenhang mit dem Ampère'schen Fundamentalgesetze besteht. Und zwar kann jene Vorausbestimmung der Volta-Induction aus den Gesetzen der Magneto-Induction nicht durch eine strenge Schlussfolge, sondern nach einer blossen Analogie geschehen. Da nun eine solche Analogie zwar einen vortrefflichen Leitfaden für wissenschaftliche Untersuchungen geben kann, aber selbst zu einer theoretischen Erklärung der Erscheinungen ungenügend erachtet werden muss; so ergiebt sich hieraus, dass die Erscheinungen der Volta-Induction überhaupt noch der Erklärung aus einer Theorie entbehren, und insbesondere keine solche Erklärung aus dem Ampère'schen Grundgesetz erhalten haben. Hierzu kommt noch, dass jene Vorausbestimmung der Erscheinungen der Volta-Induction sich bloss auf diejenigen Fälle erstreckt, wo die inducirende Wirksamkeit eines Stromes,

nach Analogie mit seiner elektrodynamischen Wirksamkeit, durch die Wirksamkeit eines Magneten ersetzt werden kann. Dies setzt aber *geschlossene Ströme* von unveränderlicher Gestalt voraus. Man kann aber an das Fundamentalgesetz der Volta-Induction, mit gleichem Rechte, wie Ampère bei dem Fundamentalgesetz der Wechselwirkung constanter Stromelemente gethan hat, die Forderung stellen, dass es alle Fälle enhalte, indem es eine allgemeine Bestimmung für die Wechselwirkung je zweier kleinster Elemente gebe, aus denen alle messbaren Wirkungen zusammengesetzt seien und berechnet werden können.

Wenn man sich also mit dem Zusammenhange der *elektrostatischen* und *elektrodynamischen* Erscheinungen beschäftigt, so braucht man sich nicht blos von dem allgemeineren wissenschaftlichen Interesse leiten zu lassen, welches es hat, in die zwischen den verschiedenen Theilen der Physik existirenden Beziehungen einzudringen, sondern man kann sich dabei ausserdem einen näher bestimmten Zweck vor Augen stellen, welcher die *Maasbestimmungen der Volta-Induction aus einem allgemeineren Grundgesetze der reinen Elektricitätslehre* betrifft. Diese Maassbestimmungen der Volta-Induction gehören nun zu den *elektrodynamischen Maassbestimmungen*, welche den Hauptgegenstand dieser Abhandlung bilden, welche, wenn sie vollständig sein sollen, auch die Erscheinungen der *Volta-Induction* mit umfassen müssen. Es leuchtet aber von selbst ein, dass die Aufstellung solcher Maassbestimmungen mit der Aufstellung der *Gesetze*, denen die betreffenden Erscheinungen unterworfen sind, auf das innigste zusammenhängt, so, dass das eine von dem anderen nicht geschieden werden kann.

19.

Um einen auf Erfahrung beruhenden, möglichst sichern Leitfaden für diese Untersuchung zu gewinnen, sollen *drei specielle Thatsachen*, die theils mittelbar auf Beobachtung beruhen, theils unmittelbar in dem durch alle Messungen constatirten Ampère'schen Fundamentalgesetze enthalten sind, zu Grunde gelegt werden.

Die *erste Thatsache* ist, dass zwei Stromelemente, welche in einer geraden Linie liegen, mit welcher ihre Richtung zusammenfällt, einander *abstossen* oder *anziehen*, je nachdem sie von der Elektricität in *gleichem* oder *entgegengesetztem* Sinne durchflossen werden.

Die *zweite Thatsache* ist, dass zwei parallele Stromelemente, welche mit ihrer Verbindungslinie rechte Winkel bilden, einander *anziehen* oder *abstossen*, je nachdem sie von der Elektricität in *gleichem* oder *entgegengesetztem* Sinne durchflossen werden.

Die *dritte Thatsache* ist, dass ein Stromelement, welches mit einem Drahtelemente in einer geraden Linie liegt, mit welcher die Richtungen beider Elemente zusammenfallen, einen *gleich* oder *entgegengesetzt gerichteten Strom* in dem Drahtelemente inducirt, je nachdem seine eigene Stromintensität *abnimmt* oder *zunimmt*.

Diese drei Thatsachen sind zwar nicht unmittelbar durch die Erfahrung gegeben, weil sich die Wirkung eines *Elementes* auf ein anderes unmittelbar nicht beobachten lässt; sie hängen aber mit unmittelbar beobachteten Thatsachen so genau zusammen, dass sie fast gleiche Geltung als sie haben. Die beiden ersten Thatsachen sind schon unter Ampère's elektrodynamischem Fundamentalgesetze mit begriffen; die dritte ist durch Faraday's Entdeckung hinzugekommen.

Die angeführten drei Thatsachen werden als *elektrische* betrachtet, das heisst, man betrachtet die nachgewiesenen Kräfte als *Wirkungen elektrischer Massen auf einander.* Das *elektrische Gesetz* dieser Wechselwirkung ist aber noch unbekannt; denn wenn auch die beiden ersten Thatsachen unter dem Ampère'schen Gesetze mit begriffen sind, so ist doch, auch abgesehen von der dritten nicht darunter begriffenen Thatsache, das Ampère'sche Gesetz selbst in strengem Sinne *kein elektrisches Gesetz*, weil dadurch *keine elektrische Kraft* bestimmt wird, welche eine elektrische Masse auf die andere ausübe. Durch das Ampère'sche Gesetz wird blos eine auf die *ponderable Masse des Stromträgers* wirkende Kraft bestimmt. Mit den *elektrischen Kräften*, welche die durch die Stromträger strömenden *elektrischen Fluida* selbst auf einander ausüben, hat sich Ampère nicht beschäftigt, wenn er gleich wiederholt die Hoffnung ausgesprochen hat, dass die durch sein Fundamentalgesetz bestimmte Wechselwirkung der *ponderabelen Stromträger* aus den Wechselwirkungen der in ihnen enthaltenen *elektrischen Fluida* sich werde erklären lassen.

Richten wir nun unsere Aufmerksamkeit auf die *elektrischen Fluida* in den beiden Stromelementen selbst, so haben wir in denselben gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität, welche sich in jedem Elemente in entgegengesetztem Sinne bewegen. Diese gleichzeitige entgegengesetzte Bewegung positiver und negativer Elektricität, wie man sie in allen Theilen eines linearen Leitungsdrahtes anzunehmen pflegt, kann in der Wirklichkeit zwar nicht existiren, kann aber für unseren Zweck als eine *ideale* Bewegung angesehen werden, welche in den von uns betrachteten Fällen, wo es sich blos um Wirkungen *in der Ferne* handelt, die wirklich vorhandenen Bewegungen in Beziehung auf alle in Betracht zu ziehenden Wirkungen *vertritt*, und dabei den Vorzug hat, sich besser der Rechnung unterwerfen zu lassen. Die wirklich vorhandenen *Seitenbewegungen*, durch welche die sich begegnenden Theilchen in dem, *keine mathematische Linie* bildenden, Leitungsdrahte einander *ausweichen*, dürfen als ohne Einfluss auf die Wirkungen *in die Ferne* betrachtet werden, daher es für unsern Zweck zulässig erscheint, an obige einfache Ansicht der Sache uns zu halten (siehe Art. 31.).

Alsdann haben wir in den *zwei* Stromelementen, die wir betrachten, *vier Wechselwirkungen* elektrischer Massen zu betrachten, *zwei abstossende*, zwischen den beiden positiven und zwischen den beiden negativen Massen in den Stromelementen, und *zwei anziehende*, zwischen der positiven Masse in dem ersten und der negativen Masse in dem zweiten, und zwischen der negativen Masse in dem ersten und der positiven Masse in dem zweiten.

Jene beiden *abstossenden* Kräfte müssten, wenn die bekannten *elektrostatischen* Gesetze eine *unbedingte Anwendung auf unsern Fall* fänden, diesen bei-

den *anziehenden* Kräften *gleich* sein, weil die gleichartigen, sich abstossenden Massen den ungleichartigen, sich anziehenden Massen gleich sind und aus gleicher Entfernung auf einander wirken. Ob aber jene bekannten *elektrostatischen* Gesetze auf unsern Fall eine *unbedingte Anwendung* finden, lässt sich *a priori* nicht entscheiden, weil diese Gesetze sich zunächst nur auf solche elektrische Massen beziehen, die sich gegen einander im *Gleichgewicht* und in *Ruhe* befinden, während unsere elektrischen Massen sich gegen einander *bewegen*. Folglich kann nur die *Erfahrung* entscheiden, ob jene elektrostatischen Gesetze eine solche *Anwendung in weiterem Kreise* auch auf unsern Fall gestatten oder nicht.

Die beiden ersten der oben angeführten *Thatsachen* beziehen sich nun zwar zunächst auf Kräfte, welche auf die *ponderabeln Stromträger* wirken; es lassen sich diese Kräfte aber als die *Resultanten* derjenigen Kräfte betrachten, welche auf die in den ponderabeln Trägern enthaltenen *elektrischen Massen* wirken. Streng genommen ist diese Betrachtung zwar nur dann zulässig, wenn diese elektrischen Massen an ihrem gemeinschaftlichen ponderabeln Träger so gebunden sind, dass sie nicht ohne ihn bewegt werden können, und weil dies in der galvanischen Kette nicht der Fall ist, sondern die elektrischen Massen sich hier auch dann bewegen, wenn ihr Träger ruhet, so hat Ampère, wie in der Einleitung S. 213 angeführt worden ist, auf diesen Umstand besonders aufmerksam gemacht, in Betracht, dass dadurch die auf den ponderabelen Träger wirkende Kraft wesentlich modificirt werden könne. Wenn aber auch die elektrischen Massen in der Richtung des Leitungsdrahtes verschiebbar sind, so sind sie doch keineswegs in dieser Richtung *frei beweglich*, sonst würden sie in der ihnen nach dieser Richtung einmal mitgetheilten Bewegung ohne neuen Antrieb (d. i. ohne fortwirkende *elektromotorische Kraft*) *beharren* müssen, was nicht der Fall ist; denn kein galvanischer Strom dauert auch bei fortdauerndem Schluss der Kette *von selbst* fort, vielmehr entspricht seine Intensität in jedem Augenblicke nur der eben vorhandenen *elektromotorischen Kraft*, wie das Ohm'sche Gesetz es bestimmt, hört also von selbst auf, sobald diese Kraft verschwindet. Hieraus folgt, dass nicht blos diejenigen Kräfte, welche auf die elektrischen Massen in solchen Richtungen (senkrecht auf den Leitungsdraht) wirken, in denen sie nur mit dem ponderabelen Träger zugleich bewegt werden können, auf den letzteren übertragen werden müssen, sondern, dass das nämliche auch von solchen Kräften gelte, welche in der Richtung des Leitungsdrahtes wirken und die elektrischen Massen im Träger bewegen, nur mit dem Unterschiede, dass die letztere Uebertragung eine, wenn auch sehr kurze, Zeit erfordert, was bei der ersteren nicht der Fall ist. Die *unmittelbare* Wirkung der dem Leitungsdrahte parallelen Kräfte besteht zwar blos in einer Bewegung der elektrischen Massen nach dieser Richtung; die Wirkung dieser Bewegung ist aber ein *Widerstand* des ponderabelen Trägers, durch welchen sie in unmessbar kurzer Zeit wieder aufgehoben wird. Durch diesen *Widerstand* werden *mittelbar*, während der Zeit, wo diese Bewegung aufgehoben wird, alle Kräfte, welche zuvor diese Bewegung hervorgebracht hatten, an den Widerstand leistenden, ponderabelen Körper übertragen. Endlich, da es sich hier um Wirkungen der Kräfte handelt, welche dem *ponderabelen* Träger selbst

eine *messbare* Geschwindigkeit zu ertheilen vermögen, so können dagegen diejenigen Wirkungen der Kräfte, welche nur momentan die *imponderabelen* Massen ein wenig verrücken, mit gleichem Rechte vernachlässigt werden, mit welchem man die *Masse der Elektricität* gegen die *Masse ihres ponderabelen Trägers* vernachlässigt. Hieraus ergiebt sich aber, dass die Kraft, welche auf den *Stromträger* wirkt, wie oben angegeben worden ist, als die *Resultante* aller Kräfte betrachtet werden darf, welche auf die im Stromträger enthaltenen *elektrischen Massen* wirken.

Dies vorausgesetzt, so lehren die *beiden ersten oben angeführten Thatsachen*, dass die *Resultante* jener 4 Wechselwirkungen der in den beiden betrachteten Stromelementen enthaltenen elektrischen Massen, welche nach dem *elektrostatischen* Gesetze Null sein sollte, von Null desto mehr *verschieden* ist, je grösser die *Geschwindigkeit* ist, mit welcher die elektrischen Massen durch beide Stromelemente fliessen, d. i. je grösser die Stromintensitäten sind.

Es folgt also hieraus, dass die *elektrostatischen* Gesetze auf elektrische Massen, welche gegen einander *bewegt* werden, *keine unbedingte Anwendung* finden, sondern dass sie für die Kräfte, welche diese Massen wechselseitig auf einander ausüben, blos einen *Grenzwerth* geben, dem sich der *wahre Werth* dieser Kräfte desto mehr nähert, je geringer die gegenseitigen Bewegungen der Massen sind, von dem sich dagegen der *wahre Werth* desto mehr entfernt, je grösser die gegenseitigen Bewegungen sind. Zu dem Werthe, welchen die *elektrostatischen* Gesetze für die Kraft geben, welche *zwei elektrische Massen* auf einander ausüben, muss also noch eine *von ihrer gegenseitigen Bewegung abhängige Ergänzung* hinzukommen, wenn diese Kraft nicht blos für den Fall der gegenseitigen Ruhe und des Gleichgewichts, sondern allgemein auch für jede beliebige *Bewegung* beider Massen gegen einander richtig bestimmt werden soll. Diese *Ergänzung*, welche dem elektrostatischen Gesetze eine allgemeinere Anwendbarkeit, als es gegenwärtig besitzt, ertheilen soll, wird nun gesucht.

Die oben angeführte *erste Thatsache* lehrt ferner nun nicht blos, dass die Summe der abstossenden Kräfte der gleichartigen elektrischen Massen in den betrachteten Stromelementen von der Summe der anziehenden Kräfte der ungleichartigen Massen *verschieden* sei, sondern lehrt zugleich auch, wann die erstere Summe *grösser* und wann sie *kleiner* als die letztere sei, und es lassen sich alle daraus sich ergebenden Bestimmungen in dem einfachen Ausspruche vereinigen,

> *dass die elektrischen Massen, welche in entgegengesetztem Sinne bewegt werden, schwächer auf einander wirken, als diejenigen, welche in gleichem Sinne bewegt werden.*

Denn 1) wenn die Stromrichtung in den beiden Elementen *dieselbe* ist, so findet *Abstossung* statt, folglich müssen die *Anziehungskräfte der ungleichartigen Massen schwächer sein*, als die Abstossungskräfte der gleichartigen Massen. Es sind aber in diesem Falle die ungleichartigen Massen, welche *in entgegengesetztem Sinne* bewegt werden. Ist aber 2) die Stromrichtung in den beiden Elementen *entgegengesetzt*, so findet *Anziehung* statt; folglich müssen die *Abstossungskräfte*

der gleichartigen Massen schwächer sein, als die Anziehungskräfte der ungleichartigen Massen. Es sind aber in diesem Falle die gleichartigen Massen, welche *in entgegengesetztem Sinne* bewegt werden. In beiden Fällen sind es also die *in entgegengesetztem Sinne* bewegten Massen, welche *schwächer* auf einander wirken, wodurch der obige Ausspruch bestätigt wird.

Die *erste Thatsache,* auf welche obiger Ausspruch zu beziehen war, gestattet ferner noch folgende genauere Bestimmung beizufügen,

> *dass zwei elektrische Massen desto schwächer (abstossend oder anziehend, je nachdem sie gleichartig oder ungleichartig sind) auf einander wirken, je grösser das Quadrat ihrer relativen Geschwindigkeit sei.*

Die *relative Geschwindigkeit* zweier elektrischen Massen kann, wenn r den Abstand beider Massen bezeichnet, durch $\frac{dr}{dt}$ ausgedrückt werden, und ist positiv oder negativ, je nachdem dadurch eine gegenseitige Entfernung oder Annäherung beider Massen bewirkt wird; da aber dieser Unterschied der Annäherung und Entfernung, oder kurz, der Unterschied des Vorzeichens von $\frac{dr}{dt}$, keinen Einfluss auf die Grösse der Kraft hat, so war es nöthig, in der eben ausgesprochenen Regel statt der relativen Geschwindigkeit selbst, ihr *Quadrat* einzuführen.

Bezeichnen e und e' die positiven elektrischen Massen in beiden Elementen, und u und u' die zugehörigen *absoluten* Geschwindigkeiten, die je nach der Richtung des Stromes einen positiven oder negativen Werth haben, so werden $-e$ und $-e'$ die negativen Massen, und $-u$ und $-u'$ die ihnen zugehörigen *absoluten* Geschwindigkeiten sein. In den unter der *ersten Thatsache* enthaltenen Fällen, wo alle elektrischen Massen *in einer und derselben geraden Linie* sich bewegen, ergeben sich aber die *relativen* Geschwindigkeiten aus den *absoluten* durch blosse Subtraction, nämlich für die *gleichartigen* Massen:

$+e$ und $+e'$ die relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt} = u - u'$,

$-e$ und $-e'$ die relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt} = -u + u'$;

für die ungleichartigen Massen:

$+e$ und $-e'$ die relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt} = u + u'$,

$-e$ und $+e'$ die relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt} = -u - u'$.

Hieraus ergiebt sich nach obigem Satze für die Wechselwirkung *gleichartiger* (sowohl der beiden positiven, als der beiden negativen) Massen eine von

$$\frac{dr^2}{dt^2} = (u - u')^2$$

abhängige Schwächung, im Vergleich mit der in der Elektrostatik für den Fall der Ruhe und des Gleichgewichts betrachteten Kraft; für die Wechselwirkung *ungleichartiger* Massen dagegen eine von

$$\frac{dr^2}{dt^2} = (u + u')^2$$

abhängige Schwächung. Die einfachste Form, welche das Gesetz dieser Schwächung haben kann, ist die, wonach der Werth der Kraft für den Fall der Ruhe und des Gleichgewichts mit dem Faktor

$$\left(1 - aa\frac{dr^2}{dt^2}\right)$$

multiplicirt wird, wonach also folgender Ausdruck zur *vollständigeren Bestimmung der Kraft* dienen würde:

$$\frac{ee'}{rr}\left(1 - aa\frac{dr^2}{dt^2}\right),$$

worin e und e' positive oder negative Werthe haben, je nachdem die elektrischen Massen, welche sie bezeichnen, dem positiven oder dem negativen Fluidum angehören. aa ist eine Constante.

Für unsern Fall ergäben sich, wenn man von dieser einfachsten Form Anwendung zu machen versuchte, folgende 4 Wechselwirkungen zwischen den elektrischen Massen in den beiden Stromelementen:

1) zwischen $+e$ und $+e'$ die Kraft $+\frac{ee'}{rr}(1 - aa(u - u')^2)$

2) zwischen $-e$ und $-e'$ die Kraft $+\frac{ee'}{rr}(1 - aa(u - u')^2)$

3) zwischen $+e$ und $-e'$ die Kraft $-\frac{ee'}{rr}(1 - aa(u + u')^2)$

4) zwischen $-e$ und $+e'$ die Kraft $-\frac{ee'}{rr}(1 - aa(u + u')^2)$

Die Summe der beiden ersten Kräfte, d. i. die Summe der *Abstossungen gleichartiger Massen,* ist also

$$= + 2\frac{ee'}{rr}(1 - aa(u - u')^2);$$

die Summe der beiden letzteren Kräfte, d. i. die Summe der *Anziehungen ungleichartiger Massen,* ist

$$= - 2\frac{ee'}{rr}(1 - aa(u + u')^2).$$

Diese beiden Summen sind also, abgesehen von ihren (Abstossung und Anziehung unterscheidenden) Vorzeichen, ihrer Grösse nach verschieden. Ihre algebraische Summe, welche *die Resultante* aller 4 Wechselwirkungen, folglich die Kraft giebt, welche von den elektrischen Massen auf den *Stromträger* selbst übertragen wird, und auf welche sich das Ampère'sche Fundamentalgesetz bezieht, ist hiernach

$$= + 8\frac{ee'}{rr}aa.uu',$$

d. h. diese Kraft ergiebt sich hiernach, ganz in Uebereinstimmung mit dem Ampère'schen Fundamentalgesetze, direct proportional den Stromintensitäten

in beiden Stromelementen und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes beider Stromlemente.

Ferner ersieht man, dass obiger Ausdruck *positiv* ist, folglich eine *Abstossung der Stromelemente* bezeichnet, wenn u und u' *beide zugleich* entweder positive oder negative Werthe haben, d. h. wenn die beiden Stromelemente von der Elektricität in gleichem Sinne durchflossen werden; dass aber, wenn von beiden nur *der eine positiv, der andere negativ* ist, obiger Ausdruck *negativ* werde, was eine *Anziehung der Stromelemente* bezeichnet, wenn dieselben von der Elektricität in *entgegengesetztem* Sinne durchflossen werden. Alle diese Folgerungen entsprechen genau der oben angeführten *ersten Thatsache.*

Gehen wir nun zu der *zweiten oben angeführten Thatsache* über, so leuchtet ein, dass die eben gegebene Ergänzung des elektrostatischen Gesetzes hier nicht mehr ausreicht; denn es ergiebt sich für alle unter dieser zweiten Thatsache enthaltenen Fälle der Werth der relativen Geschwindigkeiten der elektrischen Massen

$$\frac{dr}{dt} = 0.$$

Verfolgt man nämlich zwei elektrische Theilchen in ihren Bahnen, so ergiebt sich, dass ihre relative Entfernung bis zu dem betrachteten Augenblicke abnimmt, und von dann an wieder zunimmt, in dem betrachteten Augenblicke selbst also weder Zunahme noch Abnahme der Entfernung statt findet; folglich würde darnach für alle diese Fälle zur Bestimmung der 4 Wechselwirkungen der elektrischen Massen in beiden Stromelementen das elektrostatische Gesetz selbst, ohne eine Ergänzung, in Anwendung zu bringen sein, wonach also die beiden Stromelemente gar keine Wirkung auf einander haben sollten, was nicht der Fall ist.

Es lässt sich aber leicht nachweisen, dass für diese *zweite* Klasse von Fällen, wo der Werth der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ verschwindet, der Werth der *relativen Beschleunigung* $\frac{ddr}{dt^2}$ desto bedeutender hervortritt, während für die *erste* Klasse, wo der letztere Werth $\frac{ddr}{dt^2}$ verschwand, der erstere $\frac{dr}{dt}$ desto bedeutender hervortrat.

Nimmt man also an, dass die Grösse der Wechselwirkung bewegter elektrischer Massen, wie sie durch das elektrostatische Gesetz bestimmt wird, einer Ergänzung bedarf, die aber nicht blos von dem *Quadrate der relativen Geschwindigkeit* beider Massen $= \frac{dr^2}{dt^2}$, sondern auch von ihrer *relativen Beschleunigung* $= \frac{ddr}{dt^2}$ abhängt, so ist die einfachste Form, welche das allgemeine Gesetz der Wechselwirkung zweier elektrischer Massen haben kann, diejenige, wonach der Werth der Kraft für den Fall der Ruhe und des Gleichgewichts, mit dem Factor

$$\left(1 - aa\frac{dr^2}{dt^2} + b\frac{ddr}{dt^2}\right)$$

multiplicirt wird, wonach also folgender Ausdruck zur vollständigen Bestimmung der Kraft dienen würde:

$$\frac{ee'}{rr}\left(1 - aa\frac{dr^2}{dt^2} + b\frac{ddr}{dt^2}\right),$$

worin e und e' positive und negative Werthe haben, je nachdem die elektrischen Massen, welche sie bezeichnen, dem positiven oder negativen elektrischen Fluidum angehören. aa ist dieselbe Constante wie früher, b ist eine andere von der Geschwindigkeit und Beschleunigung unabhängige Grösse, deren Werth und Vorzeichen näher zu bestimmen bleibt.

Bezeichnen nun, wie früher, e und e' die positiv elektrischen Massen in beiden Stromelementen, u und u' die zugehörigen *absoluten* Geschwindigkeiten, folglich $-e$ und $-e'$ die negativen Massen, und $-u$ und $-u'$ deren *absolute* Geschwindigkeiten, und bezeichnet R den Abstand der Stromelemente, r den Abstand der beiden *positiven* elektrischen Massen; so ist zwar für den ersten Augenblick $r = R$, aber weil die elektrischen Massen sich bewegen, ändert sich bald r, während R unverändert bleibt, und es ergiebt sich nach Verlauf des Zeitraums t, von jenem Augenblicke an gerechnet, zur Bestimmung des Werthes von r folgende Gleichung:

$$rr = RR + (u - u')^2 tt,$$

folglich, weil R, u und u' constant sind,

$$rdr = (u - u')^2 t\,dt$$

und

$$rddr + dr^2 = (u - u')^2 dt^2,$$

woraus sich die Werthe der *relativen Geschwindigkeit* und *Beschleunigung* am Ende des Zeitraums t ergeben, nämlich:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{(u-u')^2}{r}t$$

$$\frac{ddr}{dt^2} = \frac{(u-u')^2}{r}\left(1 - \frac{(u-u')^2}{rr}tt\right).$$

Wendet man diese allgemeinen Bestimmungen auf den betrachteten Augenblick an, für welchen $t = 0$ ist, so erhält man die in unserm Ausdruck einzuführenden Werthe der *relativen Geschwindigkeit und Beschleunigung der beiden positiven Massen:*

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

$$\frac{ddr}{dt^2} = \frac{(u-u')^2}{r},$$

folglich erhält man für die erste der 4 Wechselwirkungen, nämlich:

1) zwischen $+e$ und $+e'$ die Kraft $+\frac{ee'}{rr}\left(1 + \frac{b}{r}(u - u')^2\right)$.

Es leuchtet von selbst ein, dass die übrigen Wechselwirkungen aus dieser ersten abgeleitet werden können, durch Substitution der entsprechenden Massen und Geschwindigkeiten; man erhält dann

2) zwischen $-e$ und $-e'$ die Kraft $+\frac{ee'}{rr}\left(1 + \frac{b}{r}(u - u')^2\right)$

3) zwischen $+ e$ und $- e'$ die Kraft $-\frac{ee'}{rr}(1 + \frac{b}{r}(u + u')^2)$

4) zwischen $- e$ und $+ e'$ die Kraft $-\frac{ee'}{rr}(1 + \frac{b}{r}(u + u')^2)$.

Die Summe der beiden erstern Kräfte, d. i. die Summe der *Abstossungen gleichartiger Massen* ist also

$$= + 2\frac{ee'}{rr}(1 + \frac{b}{r}(u - u')^2);$$

Die Summe der beiden letztern Kräfte, d. i. die Summe der *Anziehungen ungleichartiger Massen* aber ist

$$= - 2\frac{ee'}{rr}(1 + \frac{b}{r}(u + u')^2).$$

Diese beiden Summen sind also, abgesehen von ihren (Abstossung und Anziehung unterscheidenden) Vorzeichen, ihrer Grösse nach *verschieden*. Ihre algebraische Summe, welche *die Resultante* aller 4 Kräfte, folglich die Kraft giebt, welche von den elektrischen Massen auf den *Stromträger* selbst übertragen wird, und auf welche sich das Ampère'sche Fundamentalgesetz bezieht, ist hiernach

$$= - 8\frac{ee'}{rr} \cdot \frac{b}{r} \cdot uu',$$

d. h. diese Kraft ergiebt sich hiernach, ganz in Uebereinstimmung mit dem Ampère'schen Fundamentalgesetze, direct proportional den Stromintensitäten in beiden Stromelementen, und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes beider Stromelemente.

Ferner ersieht man, falls b positiv ist, dass obiger Ausdruck *negativ* sei, folglich eine *Anziehung der Stromelemente* bezeichne, wenn u und u' beide zugleich entweder positive oder negative Werthe haben, d. h. wenn die beiden Stromelemente von der Elektricität in *gleichem* Sinne durchflossen werden; ist aber von beiden nur der eine positiv, der andere negativ, so wird obiger Ausdruck *positiv*, was eine *Abstossung* der Stromelemente bezeichnet, wenn dieselben von der Elektricität in *entgegengesetztem* Sinne durchflossen werden. Alle diese Folgerungen entsprechen genau der oben angeführten *zweiten Thatsache.*

Gehen wir endlich noch auf die Ampère'sche Formel selbst zurück, welche beide Thatsachen als specielle Fälle umfasst, wonach die Abstossung zweier Stromelemente folgende ist:

$$\frac{ii'}{rr}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta')\,ds\,ds',$$

worin die Buchstaben die S. 249 angegebene Bedeutung haben, so ergiebt sich, dass für die unter der *ersten Thatsache* enthaltenen Fälle

$$\varepsilon = 0 \text{ oder } = 180°$$

sei, je nachdem θ und θ' *beide zugleich*

$$= 0° \text{ oder } = 180°$$

sind, oder nur der *eine* von beiden

$= 0°$, der *andere* $= 180°$ ist.

Folglich ist der gesuchte Werth der Kraft für die unter der *ersten Thatsache* enthaltenen Fälle nach dem Ampère'schen Gesetze

$$= \mp \tfrac{1}{2} \cdot \frac{ii'}{rr} ds ds'.$$

Für die unter der *zweiten Thatsache* enthaltenen Fälle ist

$$\varepsilon = 0° \text{ oder } 180°$$

je nachdem θ und θ' *beide zugleich*

$$= 90° \text{ oder } = 270°$$

sind, oder nur der *eine* von beiden

$= 90°$, der *andere* $= 270°$ ist.

Folglich ist der gesuchte Werth der Kraft fur die unter der *zweiten Thatsache* enthaltenen Fälle nach dem Ampère'schen Gesetze

$$= \pm \frac{ii'}{rr} ds ds'.$$

Nach dem Ampère'schen Fundamentalgesetz erhält man also (abgesehen vom Vorzeichen) für die letzteren Fälle den doppelten Werth, wie für die ersteren.

Dies ergiebt sich auch aus unsern Bestimmungen, wenn man

$$aa = \frac{1}{2} \frac{b}{r}$$

setzt, wodurch also der Werth und das Vorzeichen von b näher bestimmt sind, nämlich:

$$b = 2raa.$$

Substituirt man diesen Werth von b in unserem allgemeinen Ausdruck für die Wechselwirkung zweier elektrischer Massen, so ergiebt sich ihre *Abstossungskraft*

$$= \frac{ee'}{rr}\left(1 - aa\frac{dr^2}{dt^2} + 2aa \cdot r\frac{ddr}{dt^2}\right).$$

Die *dritte oben angeführte Thatsache* bezieht sich endlich nicht, wie die beiden vorhergehenden, auf Kräfte, welche blos auf den *Stromträger* wirken, sondern vielmehr auf Kräfte, welche auf die *elektrischen Massen* selbst wirken und sie in ihrem Träger bewegen, indem sie ungleichartige Massen zu scheiden streben, d. i. auf *elektromotorische* Kräfte, welche von bewegten elektrischen Massen in einem galvanischen Leiter auf ruhende Elektricitäten in einem andern Leiter ausgeübt werden. Diese Kräfte werden aber nicht allein durch das *elektrostatische* Grundgesetz, sondern auch durch das Ampère'sche *elektrodynamische* Grundgesetz *nicht bestimmt*, weil *letzteres* blos auf die an die Stromträger übertragenen Kräfte Beziehung hat, *ersteres*, wenn es Anwendung fände, den Werth der elektromotorischen Kraft $= 0$ ergäbe. Es bilden also diese Kräfte eine wesentlich *neue Klasse*, die man erst durch *Faraday's Entdeckung* hat kennen lernen.

Betrachten wir auch hier wieder blos die *elektrischen Massen* sowohl in dem Stromelemente, als auch in dem stromlosen Elemente, so haben wir in

jedem derselben wiederum gleiche Massen positiver und negativer Elektricität, und zwar bewegen sich jederzeit in dem Stromelemente diese beiden Massen mit gleich grosser Geschwindigkeit in entgegengesetztem Sinne, und diese Geschwindigkeiten nehmen auch gleichzeitig um gleich viel zu oder ab; in dem stromlosen Elemente sind dagegen beide Massen noch in Ruhe und Gleichgewicht. Zwischen diesen 4 Massen sind nun ferner auch wieder 4 Wechselwirkungen zu unterscheiden, nämlich zwei abstossende und zwei anziehende, jene zwischen den *gleichartigen* Massen, diese zwischen den *ungleichartigen.*

Aus dem *Factum* nun, dass ein Strom in dem Elemente *entsteht,* in welchem bisher kein Strom vorhanden war, müssen wir schliessen, dass auf die *positive* elektrische Masse in diesem Elemente nach der Richtung des letzteren *eine andere Kraft* wirken müsse, als auf die *negative* Masse, weil jene Massen nur durch eine solche *Differenz* der auf sie wirkenden Kräfte diejenige *entgegengesetzte* Bewegung erhalten können, in welcher der zur Erscheinung kommende Strom wesentlich besteht. Wir sprechen hiernach das Factum zunächst so aus,

> *dass die Summe der beiden Kräfte, welche von der positiven und negativen elektrischen Masse in dem Stromelemente auf die ruhende positive Masse in dem stromlosen Elemente nach der Richtung des letzteren ausgeübt werden, verschieden sei von der Summe derjenigen beiden Kräfte, welche dieselben Massen in dem erwähnten Stromelemente auf die ruhende negative Masse in dem stromlosen Elemente nach der Richtung des letzteren ausüben; dass aber die Differenz beider Summen, d. i. die elektromotorische Kraft selbst, abhängig sei von der Geschwindigkeitsänderung der beiden elektrischen Massen in dem gegebenen Stromelemente und mit dieser Aenderung zugleich wachse oder abnehme und verschwinde.*

Auch diese *dritte Thatsache* führt also darauf, den durch das *elektrostatische* Gesetz bestimmten elektrischen Kräften noch *eine von ihrer Bewegung abhängige Ergänzung* beizufügen, und es fragt sich nur, ob hieraus gerade diejenige Ergänzung gerechfertigt werde, welche auf die beiden ersten Thatsachen gegründet worden ist. Diese *dritte Thatsache* giebt also einen *Prüfstein* für die schon gefundenen Resultate und ist zu deren Verwerfung oder festeren Begründung besonders geeignet.

Bezeichnen nun, wie früher, e und e' die positiven elektrischen Massen in beiden Drahtelementen, u und 0 die zugehörigen *absoluten* Geschwindigkeiten, folglich $-e$ und $-e'$ die negativen Massen, und $-u$ und 0 deren *absolute* Geschwindigkeiten, und bezeichnet R den Abstand der Drahtelemente, r den Abstand der beiden positiven elektrischen Massen: so ist zwar für den ersten Augenblick $r = R$, aber weil die Masse e sich mit veränderlicher Geschwindigkeit u von der ruhenden Masse e' entfernt, oder ihr nähert, so ändert sich bald r, während R unverändert bleibt, und es ergiebt sich nach Verlauf des Zeitraums t, von jenem Augenblicke an gerechnet, zur Bestimmung des Werths von r,

$$r = R \pm \int_0^t u\,dt,$$

wo das *obere* Vorzeichen gilt, wenn die Masse e auf der positiven Seite von der Masse e' liegt, und folglich durch eine positive Geschwindigkeit noch weiter von ihr entfernt wird; dagegen wenn die Masse e auf der negativen Seite von der Masse e' liegt, und folglich durch eine positive Geschwindigkeit ihr genähert wird, das untere Vorzeichen gilt.

Durch Differentiation erhält man hieraus:

$$\mathrm{d}r = \pm u \,\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{dd}r = \pm \mathrm{d}u \,\mathrm{d}t.$$

Hiernach sind also die Werthe der *relativen Geschwindigkeit* und *Beschleunigung* beider Massen am Ende des Zeitraums t:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm u$$
$$\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2} = \pm \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t};$$

worin u und $\mathrm{d}u$ Functionen von t sind. Wendet man nun diese allgemeinen Bestimmungen auf den betrachteten Augenblick an, und bezeichnet man die Werthe, welche u und $\mathrm{d}u$ annehmen, wenn $t = 0$ gesetzt wird, mit u_0 und $\mathrm{d}u_0$, so ergiebt sich nach dem allgemeinen Gesetze der Wechselwirkung zweier elektrischer Massen, zu welchem die *beiden ersten Thatsachen* geführt haben, als erste der 4 Wechselwirkungen:

1) zwischen $+e$ und $+e'$ die Kraft $+\frac{ee'}{rr}\left(1 - aa\,u_0u_0 \pm 2aar\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}\right)$.

Es leuchtet auch ein, dass die übrigen Wechselwirkungen aus dieser ersten abgeleitet werden können durch Substitution der entsprechenden Massen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen; man erhält dann:

2) zwischen $-e$ und $+e'$ die Kraft $-\frac{ee'}{rr}\left(1 - aa\,u_0u_0 \mp 2aar\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}\right)$

3) zwischen $+e$ und $-e'$ die Kraft $-\frac{ee'}{rr}\left(1 - aa\,u_0u_0 \pm 2aar\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}\right)$

4) zwischen $-e$ und $-e'$ die Kraft $+\frac{ee'}{rr}\left(1 - aa\,u_0u_0 \mp 2aar\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}\right)$.

Die Summe der beiden ersteren Kräfte, d. i. die Summe der auf die *positive Masse* $+e'$ in *dem stromlosen Elemente* wirkenden Kräfte, ist also

$$= \pm 4\frac{ee'}{r}aa\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}.$$

Die Summe der beiden letzteren Kräfte, d. i. die Summe der auf die *negative Masse* $-e'$ *in dem stromlosen Elemente* wirkenden Kräfte aber

$$= \mp 4\frac{ee'}{r}aa\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}.$$

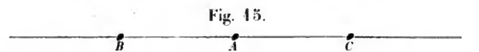
Diese beiden Summen sind dadurch verschieden, dass sie *entgegengesetzte* (Abstossung und Anziehung unterscheidende) *Vorzeichen* haben. Ihre *Differenz* giebt die *elektromotorische Kraft*, welche die positive und negative Masse in dem stromlosen Elemente zu scheiden sucht.

$$= \pm 8 \frac{ee'}{r} aa \frac{du_0}{dt},$$

d. h. die *elektromotorische Kraft* ist direct proportional der im betrachteten Augenblicke selbst eintretenden Aenderung der Stromgeschwindigkeit und umgekehrt proportional dem Abstande des Stromelementes von dem stromlosen Elemente.

Ferner was die doppelten Vorzeichen unsers Ausdruckes für die *elektromotorische Kraft* betrifft, so können diese dadurch beseitigt werden, dass man sie auf den Abstand r bezieht und also diesem selbst positive und negative Werthe beilegt, indem man r von der Stelle der ruhenden Masse e' als Anfangspunkt aus rechnet, und zwar als positive Grösse, wenn die Masse e von diesem Anfangspunkte aus gerechnet auf der positiven Seite (nach welcher die positiven Geschwindigkeiten gerichtet sind) liegt, als negative Grösse, wenn die Masse e von diesem Anfangspunkte aus auf der negativen Seite liegt. Bezeichnet z. B. Fig. 15. A die Stelle der ruhenden Masse e', ist BAC die ge-

Fig. 15.



gebene Richtungslinie und wird die Seite, auf welcher C liegt, als die positive Seite zum Grunde gelegt, so ist r positiv, wenn die Masse e im Punkte C, negativ, wenn die Masse e im Punkte B sich befindet.

Wenn also in B und C zwei gleiche Stromelemente sich befinden, welche von der Elektricität *in gleichem Sinne* durchflossen werden, und deren Stromintensität gleichzeitig um gleich viel wächst oder abnimmt; so werden diese beiden Stromelemente von entgegengesetzten Seiten auf die ruhenden elektrischen Massen in A entgegengesetzte elektrische Kräfte in der Art ausüben, dass diejenige Masse, welche von C aus abgestossen wird, von B aus angezogen wird und umgekehrt; die Kraft, welche die ruhende positive und negative elektrische Masse in A zu scheiden sucht, wird also durch Zusammenwirken der beiden Stromelemente in B und C *verdoppelt.*

Endlich, wenn r positiv ist, wenn z. B. das Stromelement in C sich befindet, und wenn ferner u und du beide zugleich entweder positive oder negative Werthe haben, d. h. wenn die absolute Stromgeschwindigkeit in C, abgesehen von der Richtung, welche sie hat, zunimmt, so hat obiger Ausdruck einen positiven oder negativen Werth, je nachdem u einen positiven oder negativen Werth hat, d. h. also, bei *wachsender* Stromintensität wirkt von C aus eine *elektromotorische Kraft* auf die positive elektrische Masse in A abstossend oder anziehend, je nachdem der Strom in C selbst nach vorwärts oder rückwärts gerichtet ist, und erregt also in A einen Strom *in entgegengesetztem Sinne* als den in C vorhandenen. Das entgegengesetzte findet statt, wenn von u und du nur der eine Werth positiv, der andere negativ ist, d. h. wenn die Stromintensität in C, abgesehen von der Richtung des Stroms, *abnimmt*, wo dann in A ein Strom *in gleichem Sinne* als der in C vorhandene, erregt wird, ganz entsprechend den in der oben angeführten *dritten Thatsache* enthaltenen Bestimmungen.

Es geht hieraus also hervor, dass diese *dritte Thatsache* das aus den beiden ersten abgeleitete Resultat bestätige, indem *dieselbe Ergänzung* des elektrostatischen Gesetzes zu einem allgemeinen Gesetze, welche zur Erklärung der beiden ersten Thatsachen diente, auch zur Erklärung der dritten genügt.

20.

Dem Leitfaden der Erfahrung folgend haben wir in dem vorigen Artikel den elektrostatischen Ausdruck für die abstossende oder anziehende Kraft, mit welcher zwei gleichartige oder ungleichartige elektrische Massen aus der Ferne auf einander wirken, so zu ergänzen gesucht, dass derselbe nicht blos dann, wenn beide Massen gegen einander ruhen, sondern auch wenn sie gegen einander bewegt sind, Anwendung finde. Wir haben diese Ergänzung an einzelnen Thatsachen geprüft und bestätigt gefunden und werden in den folgenden Artikeln diese Prüfung in grösserer Allgemeinheit ausführen.

Die Richtigkeit des Resultates, zu dem wir gelangt sind, vorausgesetzt, ergäbe sich hier ein Fall, wo die Kraft, mit welcher zwei Massen auf einander wirken, nicht blos von *der Grösse der Massen und ihrer Entfernung* von einander abhinge, sondern auch von ihrer *relativen Geschwindigkeit und Beschleunigung.* Die Berechnung dieser Kräfte wird dadurch in vielen Fällen auf grössere mathematische Schwierigkeiten stossen, als die Berechnung solcher Kräfte, welche blos von der Grösse der Massen und deren Entfernungen abhängen. Auch dürfte wohl erwartet werden, wenn diese Abhängigkeit der elektrischen Kräfte, nicht blos von der Grösse der elektrischen Massen und ihren Entfernungen, sondern auch von ihren relativen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, fest begründet wäre, dass die nämliche Abhängigkeit, wenn auch in geringerem Maasse, sich bei andern Kräften nach genauerer Untersuchung finden würde.

Es würde dadurch in die Abhängigkeit der Kräfte von gegebenen physischen Verhältnissen ein ganz neues Element eingeführt, und das Bereich der Kräfte, zu deren Bestimmung dies neue Element in Rechnung gezogen werden müsste, würde eine eigenthümliche Klasse bilden, die eine besondere Untersuchung erforderte.

Wenn es aber auch zum Zweck der Vereinfachung und Erleichterung unserer Untersuchungen sehr wünschenswerth erscheinen dürfte, dass das Bereich derjenigen Kräfte, welche blos von der Grösse der Massen und deren Entfernungen abhängen, möglichst weit ausgedehnt wäre, so kann doch *nur die Erfahrung* entscheiden, ob andere Kräfte, welche ausserdem auch von den gegenseitigen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Massen abhängig seien, als vorhanden angenommen werden müssen, oder nicht. *A priori* lässt sich diese Frage nicht entscheiden, weil formell in der Annahme solcher Kräfte weder ein Widerspruch, noch irgend etwas Unklares oder Unbestimmtes enthalten ist.

Man nennt die Gesetze der Abhängigkeit der Kräfte von gegebenen physischen Verhältnissen *physische Fundamentalgesetze,* und dieselben sollen, dem

Zwecke der Physik gemäss, nicht dazu dienen, eine *Erklärung* von den Kräften aus ihren wahren Gründen zu geben, sondern nur eine deutlich dargelegte und brauchbare allgemeine Methode zur *quantitativen* Bestimmung der Kräfte nach den in der Physik für Raum und Zeit festgesetzten Grundmaassen. Daher kann man vom physikalischen Standpunkte aus daran keinen Anstoss nehmen, dass eine Kraft zur Function *eines von der Zeit abhängigen Verhältnisses* gemacht wird, eben so wenig, wie dass sie zur Function einer *Entfernung* gemacht wird, weil ein von der Zeit abhängiges Verhältniss eine eben so messbare Grösse ist, wie eine Entfernung: beide also ihrer Natur nach zu scharfer *quantitativer* Bestimmung geeignet, wenn auch ungeeignet, den *inneren Grund* einer Kraft darin zu suchen.

Es lässt sich hiernach gegen die Einführung eines von der Zeit abhängigen Verhältnisses in dem allgemeinen Ausdrucke einer Kraft höchstens die *Analogie anderer Fundamentalgesetze* der Physik, z. B. des Gravitationsgesetzes, geltend machen, wo dies nicht geschieht. Jedoch kann eine solche Analogie nur dann als bindend angesehen werden, wenn sie Mittel und Wege darbietet, zum Ziele zu gelangen, wo aber die Analogie bekannter Fälle nicht ausreicht, müssen der Natur der Sache nach neue Wege versucht werden.

Wenn also die Einführung solcher *von der Zeit abhängiger Verhältnisse* in dem allgemeinen Ausdrucke einer Kraft überhaupt nicht verworfen werden kann, so dürfte dies um so weniger dann der Fall sein, wenn jene Verhältnisse zur vollständigen Bestimmung des *vorhandenen Zustandes* der auf einander wirkenden Massen wesentlich gehören, da doch jedenfalls die Kraft, welche zwei Massen auf einander ausüben, da sie *nicht immer* dieselbe bleibt, von dem *zur Zeit vorhandenen Zustande* beider Massen abhängig gedacht werden muss. Zur vollständigen Bestimmung des gegenwärtigen Zustandes zweier Massen gehört aber wesentlich ausser der Bestimmung ihrer *relativen Lage* durch ihre gegenseitige Entfernung r, auch die Bestimmung ihrer *relativen Bewegung* durch ihre relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$. Denn schon nach dem Principe der Beharrung kann man nicht umhin, die Geschwindigkeit eines Körpers wesentlich zu seinem gegenwärtigen Zustande zu rechnen, weil der Grund der Beharrung nach jenem Principe in dem Körper selbst liegt, und folglich dem Beharren in *verschiedener* Bewegung *verschiedene* innere Zustände des Körpers entsprechen müssen, die, unserer Beobachtung selbst unzugänglich, nur durch ihre mit der Zeit hervortretenden Wirkungen unterschieden werden können.

21.

Transformation des Ampère'schen Gesetzes.

Was in den vorhergehenden Artikeln an einigen speciellen Thatsachen, soll nun allgemeiner und genauer an allen unter dem Ampère'schen Gesetze enthaltenen Thatsachen nachgewiesen werden. Das Ampère'sche Gesetz bestimmt die *Totalwirkung*, welche ein Stromelement auf das andere ausübt, in

ihrer Abhängigkeit von dem *Abstande* beider Elemente von einander, von ihren beiden *Stromintensitäten* und von den 3 *Winkeln* ihrer beiden Stromrichtungen unter einander und mit der beide Elemente verbindenden Geraden. Soll nun eine Zurückführung dieser so bestimmten *Totalwirkung* auf *elektrische Elementarkräfte* möglich sein, so muss *erstens* die Ampère'sche Formel sich in mehrere Theile zerlegen lassen, welche den Wirkungen *je zweier elektrischer Massen* in beiden Stromelementen entsprechen, im Einzelnen nämlich der Wirkung der positiven Masse des einen Elements auf die positive des anderen, der negativen Masse des einen Elements auf die negative des anderen, der positiven Masse des ersteren auf die negative des letzteren, und endlich der negativen Masse des ersteren auf die positive des letzteren. *Zweitens* muss jeder dieser Theile, als *elektrische Elementarkraft*, ganz von solchen Grössen abhängig sein, welche ausschliesslich dem Wesen und den gegenseitigen Verhältnissen der beiden elektrischen Massen, auf die er bezogen wird, angehören und dadurch vollständig und unabhängig von anderen Umständen bestimmt sind. *Drittens* endlich müssten alle diese *elektrischen Elementarkräfte* unter ein *allgemeines Gesetz* gebracht werden können. Es ist aber nicht nöthig, über dieses allgemeine Gesetz im Voraus irgend eine Hypothese zu machen: vielmehr müsste das Ampère'sche Gesetz nach solcher Umgestaltung unmittelbar zum Ausspruch dieses allgemeinen Gesetzes führen und über Zulässigkeit oder Unzulässigkeit einer jeden darüber im voraus aufgestellten Hypothese entscheiden. Es soll zunächst folgende Frage beantwortet werden:

> ob die Ampère'sche Formel eine solche Transformation gestatte, dass die darin enthaltenen Stromintensitäten i und i', und die Winkel ε, θ und θ', welche die beiden Stromelemente unter sich und mit der beide Elemente verbindenden Geraden einschliessen, daraus verschwinden, und statt derselben nur solche neue Grössen eingeführt werden, welche sich ganz und ausschliesslich auf die elektrischen Massen selbst und deren gegenseitige Verhältnisse beziehen.

Diese Transformation wird hier nun wirklich ausgeführt und sodann geprüft werden, ob der auf solche Weise transformirte Ausdruck der elektrodynamischen Kraft die verlangte Zerlegung in 4 Theile, welche 4 partiellen Wirkungen entsprächen, aus denen die Totalwirkung zusammen gesetzt wäre, gestatte.

Die Ampère'sche Formel für die abstossende Kraft zweier Stromelemente ist folgende:

$$-\frac{ii}{rr}\left(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right).\,ds\,ds',$$

worin die Buchstaben die Art. 8. S. 11 angegebene Bedeutung haben.

Fig. 16.

A C B D

AB Fig. 16. sei ein Stück des einen Leitungsdrahts von der Länge $= 1$, und die Menge der darin gleichförmig vertheilten positiven Elektricität werde mit

e bezeichnet, so dass $e\,\mathrm{d}s$ die Masse der positiven Elektricität ist, welche das Stromelement enthält, dessen Länge $= \mathrm{d}s$ ist.

Mit der constanten Geschwindigkeit u, welche alle positiven Elektricitätstheile im Leitungsdrahte AB beim Durchgang eines constanten Stromes besitzen, legen in 1 Secunde die vordersten den Weg BD, die hintersten den Weg AC zurück, und die elektrische Masse e, welche im Anfang der Secunde im Stücke $AB = 1$ gleichförmig vertheilt war, befindet sich am Ende der Secunde im Stücke $CD = 1$ gleichförmig vertheilt. Durch den Querschnitt des Leitungsdrahts bei B ist folglich während der Secunde alle Elektricität durchgegangen, welche am Ende der Secunde auf der anderen Seite von B das Stück $BC = u$ des Leitungsdrahts erfüllt. Es kann nun diese Elektricität, der im Anfang von Art. 2. gegebenen Definition von der Stromintensität i gemäss (wonach dieselbe der Menge Elektricität proportional ist, welche während einer Secunde durch einen Querschnitt der Kette geht), $= \frac{i}{a}$ gesetzt werden, wo a eine Constante bezeichnet. Es ergiebt sich dann

$$\frac{i}{a} : e = u : 1,$$

folglich $i = aeu$. Der Werth von a ist ein anderer als Art. 19.

Ebenso ergiebt sich, wenn u' die Strömungsgeschwindigkeit der Elektricität im anderen Leitungsdrahte bezeichnet,

$$i' = ae'u'.$$

Substituirt man diese Werthe in der Ampère'schen Formel, so wird dieselbe

$$-\frac{e\mathrm{d}s \,.\, e'\mathrm{d}s'}{rr} \,.\, aauu'\left(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right),$$

wo also der erste Faktor $\frac{e\mathrm{d}s \,.\, e'\mathrm{d}s'}{rr}$ das Produkt zweier auf einander wirkender *elektrischer Massen* in den beiden Stromelementen dividirt durch das Quadrat ihrer *Entfernung* bezeichnet.

Ferner hat Ampère in seiner Abhandlung S. 207 schon gezeigt, dass

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}, \quad \cos\theta' = -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s'}$$

und

$$\cos\varepsilon = -r\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'} - \frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'}$$

sei. Substituirt man diese Werthe, so erhält die Ampère'sche Formel folgende Gestalt:

$$-\frac{e\mathrm{d}s \,.\, e'\mathrm{d}s'}{rr} \,.\, aauu'\left(\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'} - r\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'}\right).$$

Es liege das Element $\mathrm{d}s$ des Leitungsdrahts ABS Fig 17. bei B; in A werde der Anfangspunkt des Leitungsdrahts gesetzt, folglich $AB = s$. Das Element $\mathrm{d}s'$ des Leitungsdrahts $A'B'S'$ liege bei B, A' sei der Anfangspunkt

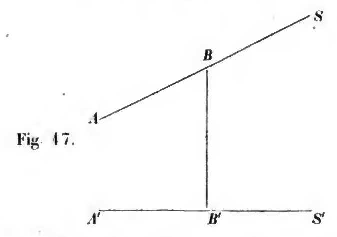


Fig. 17.

dieses Drahts, $A'B' = s'$ und $BB' = r$. Die letzte Grösse r ist, wenn die Leitungsdrähte ABS und $A'B'S'$ gegeben sind, eine Function von s und s', und man erhält für dr und dd$r$ folgende Ausdrücke:

$$dr = \frac{dr}{ds} ds + \frac{dr}{ds'} ds'$$

$$ddr = \frac{ddr}{ds^2} ds^2 + 2 \frac{ddr}{ds\,ds'} ds\,ds' + \frac{ddr}{ds'^2} ds'^2.$$

Bedeutet nun s und s' die Länge der Leitungsdrähte von ihren Anfangspunkten an bis zu den betrachteten Stromelementen selbst, so haben s und s' für zwei gegebene Stromelemente constante Werthe. s und s' können aber auch die Länge der Leitungsdrähte von ihren Anfangspunkten an bis zu den in den betrachteten Stromelementen gerade jetzt befindlichen, aber durch dieselben weiter strömenden *elektrischen Massen* bedeuten. In dieser letzteren Bedeutung sind s und s' veränderlich mit der Zeit t, und man hat dann

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{dr}{ds'} \cdot \frac{ds'}{dt},$$

$$\frac{ddr}{dt^2} = \frac{ddr}{ds^2} \cdot \frac{ds^2}{dt^2} + 2 \frac{ddr}{ds\,ds'} \cdot \frac{ds\,ds'}{dt^2} + \frac{ddr}{ds'^2} \cdot \frac{ds'^2}{dt^2}.$$

Hierin ist $\frac{ds}{dt}$ das Wegelement der elektrischen Masse dividirt durch das Zeitelement, in welchem es durchlaufen wird, d. i. die *Geschwindigkeit* der elektrischen Masse, und es ist also $\frac{ds}{dt} = u$, wenn die *positive* Masse zunächst betrachtet wird. Eben so ist dann $\frac{ds'}{dt} = u'$. Substituirt man diese Werthe, so ist

$$\frac{dr}{dt} = u \frac{dr}{ds} + u' \frac{dr}{ds'},$$

$$\frac{ddr}{dt^2} = uu \frac{ddr}{ds^2} + 2uu' \frac{ddr}{ds\,ds'} + u'u' \frac{ddr}{ds'^2}.$$

Aus der letzteren Gleichung und aus der von der ersteren abgeleiteten

$$\frac{dr^2}{dt^2} = uu \frac{dr^2}{ds^2} + 2uu' \frac{dr\,dr}{ds\,ds'} + u'u' \frac{dr^2}{ds'^2}$$

ergeben sich für $2uu' \frac{ddr}{ds\,ds'}$ und $2uu' \frac{dr\,dr}{ds\,ds'}$ folgende Werthe:

$$2uu'\frac{ddr}{ds\,ds'}=\frac{ddr}{dt^2}-uu\frac{ddr}{ds^2}-u'u'\frac{ddr}{ds'^2},$$

$$2uu'\frac{dr\,dr}{ds\,ds'}=\frac{dr^2}{dt^2}-uu\frac{dr^2}{ds^2}-u'u'\frac{dr^2}{ds'^2},$$

woraus folgt:

$$uu'\left(\frac{1}{2}\frac{dr\,dr}{ds\,ds'}-r\frac{ddr}{ds\,ds'}\right)=\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{dt^2}-\frac{1}{2}r\frac{ddr}{dt^2}\right)-\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds^2}-\frac{1}{2}r\frac{ddr}{ds^2}\right)uu-\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds'^2}-\frac{1}{2}r\frac{ddr}{ds'^2}\right)u'u'.$$

Substituirt man diesen Werth, so erhält die Ampère'sche Formel folgende Gestalt:

$$-\frac{eds.e'ds'}{rr}aa\left\{\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{dt^2}-\frac{1}{2}r\frac{ddr}{dt^2}\right)-\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds^2}-\frac{1}{2}r\frac{ddr}{ds^2}\right)uu-\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds'^2}-\frac{1}{2}r\frac{ddr}{ds'^2}\right)u'u'\right\}.$$

Bei dieser Transformation der Ampère'schen Formel sind zunächst blos die *positiven elektrischen Massen*, welche in ihren Bahnen mit den Geschwindigkeiten u und u' sich bewegten, eingeführt worden. Es leuchtet ein, dass man statt der positiven elektrischen Massen auch die *negativen* einführen könne. Es ergiebt sich dann, wenn dies für beide Stromelemente zugleich geschieht, beide eingeführten Massen also wiederum *gleichartig* sind, ihre Geschwindigkeiten aber, den für galvanische Ströme S. 103 gegebenen Bestimmungen gemäss, beide zugleich die entgegengesetzten Werthe, nämlich $-u$ und $-u'$, erhalten, wiederum der nämliche Ausdruck. Denn bezeichnet r_1, ς und ς' für die *negativen* Massen dasselbe, was r, s und s' für die *positiven*, so erhält man zunächst die Ampère'sche Formel in folgender Gestalt:

$$-\frac{eds.e'ds'}{r_1 r_1}.aa\left\{\left(\frac{1}{4}\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{1}{2}r_1\frac{ddr_1}{dt^2}\right)-\left(\frac{1}{4}\frac{dr_1^2}{d\varsigma^2}-\frac{1}{2}r_1\frac{ddr_1}{d\varsigma^2}\right)uu-\left(\frac{1}{4}\frac{dr_1^2}{d\varsigma'^2}-\frac{1}{2}r_1\frac{ddr_1}{d\varsigma'^2}\right)u'u'\right\}.$$

Für den betrachteten Augenblick, wo jene *positiven* (auf welche r, s und s' bezogen werden) und diese *negativen* (auf welche r_1, ς und ς' bezogen werden) Massen durch die nämlichen Stromelemente gehen, ist aber

$$r=r_1,\quad s=\varsigma,\quad s'=\varsigma'.$$

Ferner ist auch

$$\frac{dr_1}{d\varsigma}=\frac{dr}{ds},\quad \frac{ddr_1}{d\varsigma^2}=\frac{ddr}{ds^2},\quad \frac{dr_1}{d\varsigma'}=\frac{dr}{ds'},\quad \frac{ddr_1}{d\varsigma'^2}=\frac{ddr}{ds'^2},$$

weil alle diese Werthe blos von der Lage des von jenen *positiven* und diesen *negativen* Massen zugleich durchflossenen Stromelementen abhängig, von der Bewegung der Massen in diesen Stromelementen aber unabhängig sind. Endlich ist

$$\frac{d\varsigma}{dt}=-u=-\frac{ds}{dt},\qquad \frac{d\varsigma'}{dt}=-u'=-\frac{ds'}{dt},$$

folglich ist

$$\frac{dr_1}{dt}=\frac{dr_1}{d\varsigma}\cdot\frac{d\varsigma}{dt}+\frac{dr_1}{d\varsigma'}\cdot\frac{d\varsigma'}{dt}=-\left(\frac{dr}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}+\frac{dr}{ds'}\cdot\frac{ds'}{dt}\right)=-\frac{dr}{dt},$$

woraus sich

$$\frac{dr_1^2}{dt^2}=\frac{dr^2}{dt^2}$$

ergiebt. Ebenso findet man

$$\frac{\mathrm{dd}r_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}.$$

Durch Substitution dieser Werthe geht der letztere Ausdruck in den früheren über.

Anders verhält es sich aber bei Einführung einer *positiven* und einer *negativen* Masse, d. h. bei *ungleichartigen* Massen. Hält man sich bei dem ersten Stromelemente an die *positive*, bei dem zweiten an die *negative* Masse, und bezeichnet mit r_2 ihren Abstand, so erhält man die Ampère'sche Formel in folgender Gestalt:

$$+\frac{e\mathrm{d}s\,.\,e'\mathrm{d}s'}{r_2\,r_2}.aa\left\{\left(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}r_2^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{2}r_2\frac{\mathrm{dd}r_2}{\mathrm{d}t_2}\right)-\left(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}r_2^2}{\mathrm{d}s^2}-\frac{1}{2}r_2\frac{\mathrm{dd}r_2}{\mathrm{d}s^2}\right)uu-\left(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}r_2^2}{\mathrm{d}\varsigma'^2}-\frac{1}{2}r_2\frac{\mathrm{dd}r_2}{\mathrm{d}\varsigma'^2}\right)u'u'\right\}.$$

Hält man sich dagegen bei dem ersten Stromelemente an die *negative*, bei dem zweiten an die *positive* Masse, und bezeichnet mit r_3 ihren Abstand, so erhält man die Ampère'sche Formel in folgender Gestalt:

$$+\frac{e\mathrm{d}s\,.\,e'\mathrm{d}s'}{r_3\,r_3}.aa\left\{\left(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}r_3^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{2}r_3\frac{\mathrm{dd}r_3}{\mathrm{d}t^2}\right)-\left(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}r_3^2}{\mathrm{d}\varsigma^2}-\frac{1}{2}r_3\frac{\mathrm{dd}r_3}{\mathrm{d}\varsigma^2}\right)uu-\left(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}r_3^2}{\mathrm{d}s'^2}-\frac{1}{2}r_3\frac{\mathrm{dd}r_3}{\mathrm{d}s'^2}\right)u'u'\right\}.$$

Hierin ist nun ebenfalls $r_2 = r_3 = r$,

$$\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}\varsigma} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}, \qquad \frac{\mathrm{dd}r_2}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{dd}r_3}{\mathrm{d}\varsigma^2} = \frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}s^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}\varsigma'} = \frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}s'} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s'}, \qquad \frac{\mathrm{dd}r_2}{\mathrm{d}\varsigma'^2} = \frac{\mathrm{dd}r_3}{\mathrm{d}s'^2} = \frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}s'^2};$$

es ergiebt sich aber

$$\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}\varsigma'}\cdot\frac{\mathrm{d}\varsigma'}{\mathrm{d}t} = +\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s'}\cdot\frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}\varsigma}\cdot\frac{\mathrm{d}\varsigma}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}s'}\cdot\frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s'}\cdot\frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t},$$

folglich ist $\frac{\mathrm{d}r_2^2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}r_3^2}{\mathrm{d}t^2}$, von $\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}$ verschieden. Eben so findet man $\frac{\mathrm{dd}r_2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{dd}r_3}{\mathrm{d}t^2}$, von $\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}$ verschieden. Durch Substitution dieser Werthe erhält man, in beiden Fällen wo man *ungleichartige* Massen einführt, den nämlichen Ausdruck für die Ampère'sche Formel, nämlich:

$$+\,e\mathrm{d}s\,.\,e'\mathrm{d}s'.aa\left\{\frac{1}{r_2\,r_2}\left(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}r_2^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{2}r_2\frac{\mathrm{dd}r_2}{\mathrm{d}t^2}\right)-\left(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}s^2}-\frac{1}{2}r\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}s^2}\right)\frac{uu}{rr}-\left(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}s'^2}-\frac{1}{2}r\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}s'^2}\right)\frac{u'u'}{rr}\right\}.$$

Da nun beide Ausdrücke, sowohl der frühere, welcher durch Einführung *gleichartiger*, als dieser letztere, welcher durch Einführung *ungleichartiger* Massen erhalten wurde, die Kraft darstellen, mit welcher zwei Stromelemente auf einander wirken, beide mit der Ampère'schen Formel identisch, so wird man aus ihnen für die nämliche Kraft noch einen dritten, ebenfalls mit der Ampère'schen Formel identischen Ausdruck ableiten, wenn man ihre halbe Summe nimmt, das ist

$$-\frac{aa}{2}\frac{e\mathrm{d}s\,.\,e'\mathrm{d}s'}{rr}\left(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{2}r\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{aa}{2}\frac{.\,e\mathrm{d}s\,.\,e'\mathrm{d}s'}{r_2\,r_2}\left(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}r_2^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{1}{2}r_2\frac{\mathrm{dd}r_2}{\mathrm{d}t^2}\right).$$

Dieser letzte, der Ampère'schen Formel gleiche, Ausdruck ist die gesuchte *Transformation.* Denn es sind dadurch aus der Ampère'schen Formel die Grössen i, i', ε, θ und θ' eliminirt, und nur solche Grössen statt derselben eingeführt worden, welche theils die *gleichartigen*, theils die *ungleichartigen* elektrischen Massen selbst und ihre gegenseitigen Verhältnisse betreffen.

Dieser *transformirte* Ausdruck der Ampère'schen Formel lässt sich nun auch als eine Summe von 4 Theilen darstellen, welche als die *elektrischen Elementarkräfte* betrachtet werden können, nämlich auf folgende Weise

$$+\frac{eds.e'ds'}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r\frac{ddr}{dt^2}\right), \text{ als Wirkung von } + eds \text{ auf } + e'ds';$$

$$+\frac{eds.e'ds'}{r_1 r_1}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r_1\frac{ddr_1}{dt^2}\right), \text{ als Wirkung von } - eds \text{ auf } - e'ds';$$

$$-\frac{eds.e'ds'}{r_2 r_2}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r_2\frac{ddr_2}{dt^2}\right), \text{ als Wirkung von } + eds \text{ auf } - e'ds';$$

$$-\frac{eds.e'ds'}{r_3 r_3}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr_3^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r_3\frac{ddr_3}{dt^2}\right), \text{ als Wirkung von } - eds \text{ auf } + e'ds'.$$

Jede dieser 4 partiellen Wirkungen reducirt sich für den Fall der Ruhe, wo $\frac{dr}{dt}=\frac{dr_1}{dt}=\frac{dr_2}{dt}=\frac{dr_3}{dt}=0$ und ebenso $\frac{ddr}{dt^2}=\frac{ddr_1}{dt^2}=\frac{ddr_2}{dt^2}=\frac{ddr_3}{dt^2}=0$ ist, auf den nämlichen Werth, wie er für diesen Fall durch das Fundamentalgesetz der *Elektrostatik* bestimmt wird; jede dieser 4 Kräfte wird dann nämlich durch das Produkt der Massen, welche auf einander wirken, dividirt durch das Quadrat ihrer Entfernung ausgedrückt. Je nachdem jenes Produkt einen positiven oder negativen Werth hat, wirkt die Kraft abstossend oder anziehend.

Bezeichnet man, wie in der Elektrostatik, die elektrischen Massen schlechtweg durch e und e', und legt diesen Massen selbst positive oder negative Werthe bei, je nachdem sie dem positiven oder negativen Fluidum angehören, so können alle jene partiellen Wirkungen unter das *allgemeine Gesetz* gebracht werden, wonach die abstossende Kraft jener Massen dargestellt wird durch

$$\frac{ee'}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r\frac{ddr}{dt^2}\right).$$

Es folgt also aus dieser Analyse des Ampère'schen Gesetzes, welches ein präciser Ausdruck einer sehr umfangreichen Klasse von Thatsachen ist, das nämliche *elektrische Grundgesetz*, welches in den vorhergehenden Artikeln blos nach Anleitung einzelner Thatsachen aufgestellt wurde, und es ergiebt sich dieses ohne Hypothese.

22.

Theorie zweier constanter Stromelemente.

Zu dem im vorigen Artikel ausgesprochenen *elektrischen Grundgesetze* gelangt, können wir es an die Spitze der Elektricitätslehre stellen und daraus synthetisch ein System von Folgerungen ableiten, welches der letzte Zweck eines solchen Gesetzes ist.

Die Folgerungen, welche sich für *ruhende* Elektricität daraus ableiten lassen, findet man in Poisson's klassischer Abhandlung in den *Mémoires de l'academie des sciences de l'institut de France.* Année 1812 entwickelt, denn obiges Grundgesetz ist für den Fall der Ruhe mit demjenigen Gesetze, welches Poisson a. a. O. an die Spitze der Elektrostatik gestellt hat, identisch.

Für *bewegte* Elektricität ist zuerst die *gleichförmige* Bewegung der Elektricität galvanischer Ströme in ruhenden Leitern zu betrachten, auf welche sich das Ampère'sche Gesetz bezieht. Da nun aus Ampère's Gesetze analytisch das obige elektrische Grundgesetz entwickelt worden ist, so muss aus diesem Grundgesetze wieder synthetisch das Ampère'sche Gesetz folgen. Diese Folgerung soll wirklich hier gegeben werden.

In zwei Stromelementen α und α', welche mit der sie verbindenden Geraden in Ebenen liegen, welche den Winkel ω mit einander machen, sind 4 *elektrische Massen* gegeben, nämlich in jedem Stromelemente eine *positive* und eine *gleich grosse negative.*

Für das Element α bezeichne $+\alpha e$ die *positive* Masse, welche mit der constanten Geschwindigkeit $+u$ in der Richtung des Elements α sich bewegt, welche mit der vom ersten Elemente zum zweiten gerichteten Geraden r den Winkel θ einschliesst; für dasselbe Element bezeichne $-\alpha e$ die *negative* Masse, welche in der nämlichen Richtung mit der constanten Geschwindigkeit $-u$, das heisst rückwärts, sich bewegt.

Die accentuirten Buchstaben $\pm\alpha' e'$, $\pm u'$ und θ' bezeichnen dasselbe für das andere Element α', was die nicht accentuirten für das erstere Element α.

Zwischen diesen 4 Massen sind folgende 4 Wirkungen zu betrachten:

von $+\alpha e$ auf $+\alpha' e'$
von $-\alpha e$ auf $-\alpha' e'$
von $+\alpha e$ auf $-\alpha' e'$
von $-\alpha e$ auf $+\alpha' e'$.

Die 4 Entfernungen dieser auf einander aus der Ferne wirkenden Massen sind in dem betrachteten Augenblicke, wo alle diese Massen in den beiden gegebenen Elementen α und α' sich befinden, der gegebenen Entfernung dieser beiden Elemente r gleich. Diese 4 Entfernungen, weil sie nicht immer gleich bleiben, wegen der verschiedenen Bewegungen der Massen, werden durch r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet, und es ist also in dem betrachteten Augenblicke

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r.$$

Die Anwendung des am Ende des vorigen Artikels angegebenen Grundgesetzes giebt dann unmittelbar die Werthe dieser 4 partiellen Wirkungen, der Reihe nach,

$$+\frac{\alpha e.\alpha' e'}{r_1 r_1}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r_1\frac{ddr_1}{dt^2}\right)$$
$$+\frac{\alpha e.\alpha' e'}{r_2 r_2}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r_2\frac{ddr_2}{dt^2}\right)$$
$$-\frac{\alpha e.\alpha' e'}{r_3 r_3}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr_3^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r_3\frac{ddr_3}{dt^2}\right)$$
$$-\frac{\alpha e.\alpha' e'}{r_4 r_4}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr_4^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r_4\frac{ddr_4}{dt^2}\right)$$

Diese 4 Kräfte werden von den elektrischen Massen $+\alpha' e'$ und $-\alpha' e'$, auf welche sie unmittelbar wirken, nach Art. 19. S. 101 an die ponderable Masse des Elements α' übertragen, und setzen sich darin zu einer Resultante zusammen, welche der algebraischen Summe jener Kräfte gleich ist. Diese Summe ist, mit Rücksicht auf die schon erwähnte Gleichheit der Entfernungen,

$$-\frac{aa}{16}\cdot\frac{\alpha e.\alpha' e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Rückt nun die Masse $+\alpha e$ in dem Zeitelemente dt mit der Geschwindigkeit $+u$ um das Wegelement $+u dt$ in ihrer Bahn fort, welche mit der Geraden r_1 den Winkel θ einschliesst, während die Masse $+\alpha' e'$ in demselben Zeitelemente dt mit der Geschwindigkeit $+u'$ um das Wegelement $+u' dt$ in ihrer Bahn fortrückt, welche mit der verlängerten Geraden r_1 den Winkel θ' einschliesst, und projicirt man diese kleinen Verschiebungen auf die Richtung r_1, so ist

$$r_1+dr_1=r_1-u\,dt.\cos\theta+u'\,dt.\cos\theta',$$

worin dr_1 die Längenänderung der die beiden positiven Massen verbindenden Geraden während des Zeitelements dt bezeichnet. Hieraus folgt

$$\frac{dr_1}{dt}=-u\cos\theta+u'\cos\theta'.$$

Ebenso ergiebt sich für die beiden negativen Massen $-\alpha e$ und $-\alpha' e'$:

$$\frac{dr_2}{dt}=+u\cos\theta-u'\cos\theta';$$

ferner für die positive $+\alpha e$ und für die negative $-\alpha' e'$:

$$\frac{dr_3}{dt}=-u\cos\theta-u'\cos\theta';$$

endlich für die negative $-\alpha e$ und für die positive $+\alpha' e'$:

$$\frac{dr_4}{dt}=+u\cos\theta+u'\cos\theta'.$$

Es ist folglich

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)=-8uu'\cos\theta\cos\theta'.$$

Da nun ferner die Geschwindigkeiten u und u' constant sind, so ergiebt sich, wenn man die *Aenderungen* der Winkel θ und θ' (die selbst zwar in dem betrachteten Augenblicke für alle 4 Massenpaare gleichen Werth haben, der sich aber mit der Zeit ändert und ungleich wird) während des Zeitelements dt

für das erste Massenpaar mit $d\theta_1$ und $d\theta'_1$
für das zweite Massenpaar mit $d\theta_2$ und $d\theta'_2$
für das dritte Massenpaar mit $d\theta_3$ und $d\theta'_3$
für das vierte Massenpaar mit $d\theta_4$ und $d\theta'_4$

bezeichnet, durch Differentiation der ersten Differentialcoefficienten:

$$\frac{ddr_1}{dt^2}=+u\sin\theta.\frac{d\theta_1}{dt}-u'\sin\theta'.\frac{d\theta'_1}{dt},$$

$$\frac{ddr_2}{dt^2}=-u\sin\theta.\frac{d\theta_2}{dt}+u'\sin\theta'.\frac{d\theta'_2}{dt},$$

$$\frac{ddr_3}{dt^2} = + u \sin\theta . \frac{d\theta_3}{dt} + u' \sin\theta' . \frac{d\theta'_3}{dt},$$

$$\frac{ddr_4}{dt^2} = - u \sin\theta . \frac{d\theta_4}{dt} - u' \sin\theta' . \frac{d\theta'_4}{dt}.$$

Es ist folglich

$$\left(\frac{ddr_1}{dt^2} + \frac{ddr_2}{dt^2} - \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2}\right) = + u \sin\theta \left(\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} - \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right)$$
$$- u' \sin\theta' \left(\frac{d\theta'_1}{dt} - \frac{d\theta'_2}{dt} + \frac{d\theta'_3}{dt} - \frac{d\theta'_4}{dt}\right).$$

Nun stelle AB Fig. 18. die Linie r dar. In A befinde sich die Masse $+ \alpha e$



Fig. 18.

und bewege sich in der Richtung AC mit der Geschwindigkeit $+ u$ während des Zeitelements dt durch $AD = + u dt$. Der Winkel, welchen die Stromrichtung AC mit AB bildet, ist $BAC = \theta$. In Folge der Bewegung von A nach D geht der Winkel BAC in BDC über, und es ist

$$BDC = BAC + ABD = \theta + \frac{u dt}{r} \sin\theta.$$

Die Linie AB Fig. 19., welche wiederum r darstellt, werde nach B' verlängert.

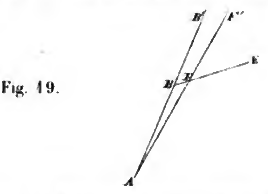


Fig. 19.

In B befinde sich die Masse $+ \alpha' e'$, und bewege sich in der Richtung BE mit der Geschwindigkeit $+ u'$ während des Zeitelements dt durch $BF = + u' dt$. Der Winkel, welchen die Stromrichtung BE mit BB' bildet, ist $B'BE = \theta'$. In Folge der Bewegung von B nach F geht der Winkel $B'BE$ in $F'FE$ über, und es ist

$$\theta' = B'BE = AFB + BAF = F'FE + \frac{u' dt}{r} \sin\theta',$$

folglich ist

$$F'FE = \theta' - \frac{u' dt}{r} \sin\theta'.$$

Zieht man endlich mit der Richtung AB und mit den beiden Stromrichtungen AC und BE Fig. 18. 19. Parallellinien durch den Mittelpunkt einer

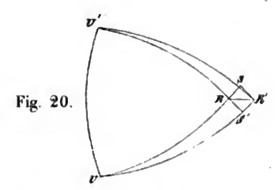


Fig. 20.

Kugel, welche die Oberfläche in R, U und U' Fig. 20. schneiden, und verbindet R mit U und U' durch grösste Kreisbögen, so ist die Ebene des Kreisbogens $UR = \theta$ der Ebene BAC Fig. 18., die Ebene des Kreisbogens $U'R = \theta'$ der Ebene $B'BE$ Fig. 19. parallel, und es ist der von beiden Ebenen eingeschlossene Winkel bei R der mit ω bezeichnete Winkel.

Man verlängere die Kreisbögen UR nach S, $U'R$ nach S', und mache

$$RS = + \frac{u dt}{r} \sin\theta', \quad RS' = - \frac{u' dt}{r} \sin\theta'.$$

Dann ist US der Bogen des Winkels BDC Fig. 18. und $U'S'$ der Bogen des Winkels $F'FE$ Fig. 19. Das Element der Kugeloberfläche, worin R, S und S' liegen, kann auch als ein Element der die Kugeloberfläche bei R berührenden Ebene, und die Bogenelemente RS und RS' als gerade Linien in dieser Ebene betrachtet werden. Vollendet man in dieser Ebene das Parallelogramm $RSR'S'$; so geht eine durch den Mittelpunkt der Kugel gezogene Parallele mit der Geraden, welche beide Massen am Ende des Zeitelements dt verbindet, durch den Punkt R'. Es ergiebt sich dies daraus, dass die Richtung dieser Geraden durch die gleichzeitige Bewegung beider Massen sich eben so ändert, wie sie sich ändern würde, wenn die eine Masse ruhete und ihre Bewegung, entgegengesetzt genommen, der anderen Masse beigelegt würde. Es lassen sich dann beide Bewegungen, so auf einen Punkt übertragen, nach dem Gesetze des Parallelogramms zusammen setzen und es ergiebt sich daraus das angeführte Resultat.

Verbindet man endlich R' mit U und U' durch grösste Kreisbögen, so ist

$$UR' = \theta + d\theta_1 = UR + d\theta_1$$
$$U'R' = \theta' + d\theta'_1 = U'R + d\theta'_1.$$

Hieraus folgt:

$$d\theta_1 = UR' - UR = RS + RS' \cos\omega$$
$$d\theta'_1 = U'R' - U'R = RS' + RS \cos\omega.$$

Da nun $RS = + \frac{u dt}{r} \sin\theta$, $\quad RS' = - \frac{u' dt}{r} \sin\theta'$ war, so ergiebt sich:

$$d\theta_1 = + \frac{u dt}{r} \sin\theta - \frac{u' dt}{r} \sin\theta' \cos\omega$$

$$d\theta'_1 = - \frac{u' dt}{r} \sin\theta' + \frac{u dt}{r} \sin\theta \cos\omega.$$

Es ist hiernach

$$r\frac{d\theta_1}{dt} = +\, u \sin\theta - u' \sin\theta' \cos\omega$$

$$r\frac{d\theta'_1}{dt} = -\, u' \sin\theta' + u \sin\theta \cos\omega.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich für die beiden *negativen* Massen $-\alpha e$ und $-\alpha' e'$:

$$r\frac{d\theta_2}{dt} = -\, u \sin\theta + u' \sin\theta' \cos\omega$$

$$r\frac{d\theta'_2}{dt} = +\, u' \sin\theta' - u \sin\theta \cos\omega,$$

ferner für die positive $+\alpha e$ und für die negative $-\alpha' e'$:

$$r\frac{d\theta_3}{dt} = +\, u \sin\theta + u' \sin\theta' \cos\omega$$

$$r\frac{d\theta'_3}{dt} = +\, u' \sin\theta' + u \sin\theta \cos\omega,$$

endlich für die negative $-\alpha e$ und für die positive $+\alpha' e'$:

$$r\frac{d\theta_4}{dt} = -\, u \sin\theta - u' \sin\theta' \cos\omega$$

$$r\frac{d\theta'_4}{dt} = -\, u' \sin\theta' - u \sin\theta \cos\omega.$$

Substituirt man nun diese Werthe, so erhält man folgende Gleichung:

$$r\left(\frac{ddr_1}{dt^2} + \frac{ddr_2}{dt^2} - \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2}\right) = -8\, uu' \sin\theta \sin\theta' \cos\omega$$ *).

---

*) Diese Gleichung kann auch aus den Gleichungen der Bewegung der vier elektrischen Massen abgeleitet werden. Man lege durch das Element α eine mit α' parallele Ebene. O sei derjenige Punkt dieser Ebene, in welchem die auf diese Ebene projicirte Richtung α' die Richtung α schneidet. Man nehme O zum Anfangspunkt der Coordinaten, die Richtung α zur Axe der x, die Axe der z senkrecht auf die erwähnte Ebene. Ferner denke man sich, dass beide Massen sich immer in den nämlichen Richtungen gleichförmig fortbewegten, und wähle denjenigen Augenblick zum Anfangspunkt der Zeit t, für welchen die Coordinaten der später in α' betrachteten Masse

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = c$$

sind. Bezeichnet dann ε den Winkel, welchen die Richtungen α und α' mit einander bilden, x, y, z die Coordinaten der später in α betrachteten Masse, und u und u' die Geschwindigkeiten beider Massen, so sind die Gleichungen der Bewegung

der einen Masse:	der anderen Masse:
$x = b + ut$	$x' = u't \,.\cos\varepsilon$
$y = 0$	$y' = u't \,.\sin\varepsilon$
$z = 0$	$z' = c$

b und c sind gegebene Constante. Hiernach ist

$$x' - x = (u' \cos\varepsilon - u).t - b$$
$$y' - y = u't \,.\sin\varepsilon$$
$$z' - z = c$$

und, da $r_1 r_1 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$ ist,

$$r_1 r_1 = [(u' \cos\varepsilon - u).t - b]^2 + u'u'tt.\sin\varepsilon^2 + cc.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach r_1 und t, so erhält man:

Substituirt man diesen Werth und den für $\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)$ gefundenen in obigem Ausdrucke für die Resultante der vier partiellen Wirkungen, so erhält man dafür folgenden Werth:

$$\frac{dr_1}{dt}=\frac{1}{r_1}.[((u'\cos\varepsilon-u)t-b)(u'\cos\varepsilon-u)+u'u't.\sin\varepsilon^2],$$

und durch wiederholte Differention,

$$r_1\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{dr_1^2}{dt^2}=uu+u'u'-2uu'\cos\varepsilon.$$

Für den Augenblick nun, wo die beiden Massen nach α und α' gelangen, ist, wenn θ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung von α nach α' mit der *ersten* Coordinatenaxe bildet,

$$x'-x=r_1\cos\theta.$$

Zieht man mit den 3 Coordinatenaxen, ferner mit der Richtung von α nach α' und endlich mit der Richtung α' selbst Parallellinien durch den Mittelpunkt einer Kugel, welche die Oberfläche in

$$X,\quad Y,\quad Z,\quad R \text{ und } P$$

schneiden, so ist RY der Bogen des Winkels, welchen die Richtung von α nach α' mit der *zweiten* Coordinatenaxe bildet, folglich für den Augenblick, wo die beiden Massen nach α und α' gelangen,

$$y'-y=r_1\cos RY.$$

Nun ist aber in den sphärischen Dreiecken PRX und PRY, weil der Radius P (welcher der Richtung α' parallel ist) mit den Radien X und Y (welche der Ebene der Coordinatenaxen x und y parallel sind) in demselben grössten Kreise liegt,

$$\cos RX\sin PY+\cos RY\sin PX=\cos PR\sin XY,$$

und es ist ferner

$$XY=90^0,\quad PX=\varepsilon,\quad RX=\theta,\quad PR=\theta',$$

wo θ' den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung von α nach α' mit der Richtung von α' selbst bildet. Substituirt man diese Werthe, so ergiebt sich:

$$\cos RY=\frac{\cos\theta'-\cos\theta\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon},$$

folglich

$$y'-y\ =r_1.\frac{\cos\theta'-\cos\theta\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}.$$

Bezeichnet nun t in den obigen Gleichungen für $x'-x$ und $y'-y$ denjenigen Werth, welcher dem Augenblicke entspricht, in welchem die beiden Massen nach α und α' gelangen, so sind die obigen Werthe von $x'-x$ und $y'-y$ den eben gefundenen gleichzusetzen, oder es ist:

$$(u'\cos\varepsilon-u)t-b=r_1\cos\theta$$
$$u't.\sin\varepsilon=r_1.\frac{\cos\theta'-\cos\theta\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}.$$

Substituirt man diese Werthe in dem Ausdrucke für $\frac{dr_1}{dt}$, so erhält man:

$$\frac{dr_1}{dt}=+u'\cos\theta'-u\cos\theta.$$

Subtrahirt man das Quadrat hiervon von dem gefundenen Werthe von $r_1\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{dr_1^2}{dt^2}$, so bleibt:

$$r_1\frac{ddr_1}{dt^2}=uu\sin\theta^2+u'u'\sin\theta'^2-2uu'(\cos\varepsilon-\cos\theta\cos\theta')$$

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}.\,aeu\,.\,ae'u'(\sin\theta\sin\theta'\cos\omega-\tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\theta').$$

Setzt man hierin nach S. 323

$$aeu=i,\qquad ae'u'=i',$$

so ergiebt sich nach dieser Ableitung aus dem aufgestellten elektrischen Grundgesetze, für die abstossende Kraft zweier Stromelemente derselbe Werth wie nach dem Ampère'schen Gesetze, nämlich:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'(\sin\theta\sin\theta'\cos\omega-\tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\theta'),$$

oder, wenn man den Winkel, welchen die beiden Elemente α und α' selbst machen, ε nennt, wo dann $\cos\varepsilon=\sin\theta\sin\theta'\cos\omega+\cos\theta\cos\theta'$ ist,

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'(\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta').$$

Hierdurch sind die Wirkungen *gleichförmiger* elektrischer Strömungen in *ruhenden* Leitungsdrähten in der Ferne vollständig bestimmt. Die bisherigen Folgerungen des aufgestellten Grundgesetzes sind sämmtlich durch die Erfahrung bestätigt.

Theorie der Volta-Induction.

23.

Es bleibt noch übrig, aus dem aufgestellten elektrischen Grundgesetze die Wirkungen *ungleichförmiger* elektrischer Strömungen in *bewegten* Leitern zu entwickeln, welche Entwickelung die *Theorie der Volta-Induction* umfasst.

Die *Volta-Induction* unterscheidet sich von Ampère's *Elektrodynamik* dadurch, dass sie die *Entstehung* von Strömen betrifft, welche von letzterer ganz ausgeschlossen ist.

Aus der *Erfahrung* ist über die *Volta-Induction* folgendes bekannt. Wir wissen *erstens*, dass sie auf zwei wesentlich verschiedene Arten hervorgebracht werden kann; es können nämlich Ströme inducirt werden durch *constante* Ströme und durch *veränderliche*. Durch *constante* Ströme wird inducirt, entweder wenn der Leitungsdraht, durch welchen der constante Strom geht, dem Leitungsdrahte, in welchem ein Strom inducirt werden soll, genähert oder davon entfernt wird, oder wenn umgekehrt der letztere dem ersteren genähert oder von ihm entfernt wird. Für die Wirkung scheint es gleichgültig, ob nur der eine,

---

oder, wenn man den Winkel ω, nach der Gleichung $\cos\varepsilon=\sin\theta\sin\theta'\cos\omega+\cos\theta\cos\theta'$, einführt,

$$r_1\frac{ddr_1}{dt^2}=uu\sin\theta^2+u'u'\sin\theta'^2-2uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega.$$

Auf dieselbe Weise findet man die den anderen Massenpaaren entsprechenden Differentialcoefficienten, die dann zusammen obige Gleichung geben.

oder nur der andere Draht, oder beide zugleich bewegt werden, vorausgesetzt dass ihre *relative* Bewegung die nämliche ist. Sind die beiden Drähte einander parallel, so wird durch Annährung ein entgegengesetzt gerichteter, durch Entfernung ein gleich gerichteter Strom inducirt. Durch *veränderliche* Ströme wird inducirt, auch wenn der Leitungsdraht, durch welche der veränderliche Strom geht, gegen denjenigen Draht, in welchem ein Strom inducirt werden soll, unverrückt bleibt. Sind die beiden Drähte einander parallel, so wird durch wachsende Stromintensität ein entgegengesetzt gerichteter, durch abnehmende Intensität ein gleich gerichteter Strom inducirt.

Wir wissen *zweitens* aus der Erfahrung, dass die Induction eines constanten Stroms auf einen gegen ihn bewegten Leitungsdraht dieselbe ist, wie die Induction eines Magnets auf denselben Leitungsdraht, wenn die elektrodynamische Abstossungs- oder Anziehungskraft, welche jener Strom auf diesen Leitungsdraht beim Durchgange eines bestimmten Stromes durch letzteren ausüben würde, der elektromagnetischen Kraft gleich ist, welche der Magnet auf denselben Draht unter den nämlichen Verhältnissen ausüben würde. Siehe Art. 11. S. 71.

Diese Erfahrungen können dazu dienen, die Richtigkeit der aufzustellenden Gesetze der *Volta-Induction* zu prüfen.

Uebrigens ist zu bemerken, dass die Theorie der *Volta-Induction* eine Theorie *elektromotorischer Kräfte* ist, durch welche die *inducirten Ströme* selbst noch nicht vollständig bestimmt werden. Um die *inducirten Ströme* selbst vollständig auch ihrer *Intensität* nach zu bestimmen, so wie auch die von ihnen selbst wieder hervorgebrachten elektrodynamischen Abstossungs- und Anziehungskräfte und *secundären* Inductionen, bedarf es ausser der aus der Theorie der *Volta-Induction* zu entnehmenden Bestimmung der *elektromotorischen Kraft,* noch einer Angabe über den *Widerstand* der ganzen Kette, zu welcher der inducirte Leitungsdraht gehört, wie dies aus der durch Ohm's Gesetze bestimmten Abhängigkeit der Stromintensität von der elektromotorischen Kraft und dem Gesammtwiderstande der Kette von selbst einleuchtet.

Die vollständige Entwickelung der Wirkungen *ungleichförmiger* elektrischer Strömungen in *bewegten* Leitern umfasst endlich nicht blos die *Theorie der Volta-Induction,* das heisst, sie giebt nicht blos von der Entstehung, Verstärkung und Schwächung von Strömen in den ponderabeln Leitern Rechenschaft, sondern sie umfasst auch alle *elektrodynamischen* Abstossungs- und Anziehungskräfte, welche Wirkungen obiger Ströme sind, und die ponderabeln Leiter selbst bewegen.

Wir wollen in den folgenden Artikeln *zuerst* die Betrachtung einzelner Fälle vorausschicken, und *alsdann* die allgemeine Entwickelung der Wirkungen *ungleichförmiger* elektrischer Strömungen, wie sie in *galvanischen Strömen* von veränderlicher Intensität statt finden, während die ponderabeln Leiter *bewegt* werden, folgen lassen.

24.

Gesetz der Stromerregung in einem Leiter, welcher einem ruhenden constanten Stromelemente genähert, oder von ihm entfernt wird.

Der einfachste Fall der *Volta-Induction*, auf welchen das aufgestellte Grundgesetz angewendet werden kann, ist derjenige, wo von den beiden Elementen blos das eine, nämlich das inducirende, schon einen Strom enthält, und zwar einen Strom von constanter Intensität, und die Entfernung beider Elemente blos durch die Bewegung des anderen Elements, nämlich des inducirten, geändert wird.

Bezeichnet nun α die Länge des inducirenden, α' die Länge des inducirten Elements, so sind in diesen beiden Elementen 4 elektrische Massen zu unterscheiden, nämlich:

$$+\alpha e, \quad -\alpha e, \quad +\alpha' e', \quad -\alpha' e'.$$

Die *erste* dieser Massen $+\alpha e$ bewege sich mit der *constanten* Geschwindigkeit $+u$ in der Richtung des *ruhenden* Elements α, welche mit der von α nach α' gezogenen Geraden den Winkel θ einschliesst; die *zweite* $-\alpha e$ bewege sich in der nämlichen Richtung mit der Geschwindigkeit $-u$, d. h. rückwärts; die *dritte* $+\alpha' e'$, welche zwar in dem Elemente α' ruhet, werde von demselben mit der Geschwindigkeit $+u'$ in derjenigen Richtung *fortgetragen*, welche mit der verlängerten von α nach α' gezogenen Geraden den Winkel θ' einschliesst; und mit derselben Geraden in einer Ebene liegt, welche mit der das Element α und jene Gerade enthaltenden Ebene den Winkel ω macht; die *vierte* endlich $-\alpha' e'$, welche ebenfalls im Elemente α' ruhet, wird von diesem Elemente mit der nämlichen Geschwindigkeit $+u'$ in der nämlichen Richtung wie die dritte Masse mit fortgeführt. Die Entfernungen der beiden ersteren Massen von den beiden letzteren sind sämmtlich in dem betrachteten Augenblicke der Entfernung r gleich, in welcher die Elemente α und α' in diesem Augenblicke sich befinden; da sie aber nicht gleich bleiben, sollen sie, wie S. 120, mit r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet werden.

Die Anwendung des Grundgesetzes giebt dann, wie Seite 328, zwischen diesen 4 Massen folgende 4 partielle Wirkungen:

$$+\frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r_1 r_1}\left(1 - \frac{aa}{16}\frac{dr_1^2}{dt^2} + \frac{aa}{8} r_1 \frac{ddr_1}{dt^2}\right)$$

$$+\frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r_2 r_2}\left(1 - \frac{aa}{16}\frac{dr_2^2}{dt^2} + \frac{aa}{8} r_2 \frac{ddr_2}{dt^2}\right)$$

$$-\frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r_3 r_3}\left(1 - \frac{aa}{16}\frac{dr_3^2}{dt^2} + \frac{aa}{8} r_3 \frac{ddr_3}{dt^2}\right)$$

$$-\frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r_4 r_4}\left(1 - \frac{aa}{16}\frac{dr_4^2}{dt^2} + \frac{aa}{8} r_4 \frac{ddr_4}{dt^2}\right)$$

Diese 4 partiellen Wirkungen lassen sich nun zunächst zu zwei Kräften vereinigen, von denen die eine die Wirkung der beiden Massen des inducirenden Elements $+\alpha e$ und $-\alpha e$ auf die *positive* Masse $+\alpha' e'$ des inducirten Ele-

ments, die andere die Wirkung der nämlichen Massen auf die *negative* $-\alpha'e'$ des inducirten Elements ist. Jene Kraft ist die Summe der ersten und vierten, diese ist die Summe der zweiten und dritten. Hieraus ergiebt sich, mit Rücksicht der Gleichheit von r_1, r_2, r_3 und r_4 mit r in dem betrachteten Augenblicke, jene Kraft

$$= -\frac{aa}{16}\cdot\frac{ae\,.\,\alpha'e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\};$$

diese Kraft ergiebt sich

$$= -\frac{aa}{16}\cdot\frac{ae\,.\,\alpha'e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}\right)\right\}.$$

In sofern nun die von diesen Kräften hervorgebrachten Bewegungen der beiden elektrischen Massen $+\alpha'e'$ und $-\alpha'e'$ in ihrem ponderabelen Träger α' fast augenblicklich durch den *Widerstand* des letzteren aufgehoben und dadurch alle auf jene Massen wirkenden Kräfte alsbald auf diesen Träger übertragen werden, giebt die *Summe* obiger beiden Kräfte, wie S. 329, die Kraft, welche den Träger α' selbst bewegt,

$$= -\frac{aa}{16}\cdot\frac{ae\,.\,\alpha'e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Vor dieser Uebertragung jener ursprünglich auf die elektrischen Massen wirkenden Kräfte auf ihren Träger, werden aber die elektrischen Massen selbst etwas in ihrem Träger verschoben, und wenn diese Verschiebung für die *positive* Masse $+\alpha'e'$ und für die *negative* $-\alpha'e'$ *verschieden* ist, beide also dadurch von einander *geschieden* werden, so entsteht im Träger α' ein galvanischer Strom, und die Kraft, welche diese Scheidung bewirkt, heisst die *elektromotorische Kraft*. Es leuchtet ein, dass diese *elektromotorische Kraft* von der *Differenz* obiger beiden Kräfte abhängt, d. i. von

$$-\frac{aa}{16}\cdot\frac{ae\,.\,\alpha'e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Nach den Art. 22. für *zwei ruhende constante* Stromelemente in Beziehung auf die Bewegung ihrer elektrischen Massen gegebenen Bestimmungen, ergab sich dort der Werth jener *Summe* gleich der durch Ampère's Gesetz bestimmten Kraft,

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{rr}\,ii'\left(\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right);$$

der Werth dieser *Differenz* würde sich dagegen dort

$$= 0$$

ergeben haben.

Nach den in diesem Artikel für *ein ruhendes constantes* Stromelement und für *ein bewegtes stromloses* Drahtelement in Beziehung auf ihre elektrischen Massen gegebenen Bestimmungen ergiebt sich dagegen der Werth jener *Summe*

$$= 0,$$

und der Werth dieser *Differenz*

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{rr}\,ae'u'i\left(\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right),$$

wie in Folgendem nachgewiesen werden soll.

Es ist hierzu blos nöthig, in den S. 121 bestimmten Differentialcoefficienten, für die Geschwindigkeit der *negativen* Masse, $+u'$ statt $-u'$ zu setzen; man erhält dann:

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{dr_3}{dt} = -u\cos\theta + u'\cos\theta'$$

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{dr_4}{dt} = +u\cos\theta + u'\cos\theta'.$$

Folglich ist dann:

$$\frac{dr_1^2}{dt^2} + \frac{dr_2^2}{dt^2} - \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2} = 0.$$

Dagegen ist:

$$\frac{dr_1^2}{dt^2} - \frac{dr_2^2}{dt^2} + \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2} = -8uu'\cos\theta\cos\theta'.$$

Ferner erhält man:

$$\frac{ddr_1}{dt^2} = +u\sin\theta.\frac{d\theta_1}{dt} - u'\sin\theta'.\frac{d\theta'_1}{dt}$$

$$\frac{ddr_2}{dt^2} = -u\sin\theta.\frac{d\theta_2}{dt} - u'\sin\theta'.\frac{d\theta'_2}{dt}$$

$$\frac{ddr_3}{dt^2} = +u\sin\theta.\frac{d\theta_3}{dt} - u'\sin\theta'.\frac{d\theta'_3}{dt}$$

$$\frac{ddr_4}{dt^2} = -u\sin\theta.\frac{d\theta_4}{dt} - u'\sin\theta'.\frac{d\theta'_4}{dt},$$

folglich ist:

$$\frac{ddr_1}{dt^2} + \frac{ddr_2}{dt^2} - \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2} = +u\sin\theta\left(\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} - \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right)$$
$$- u'\sin\theta'\left(\frac{d\theta'_1}{dt} + \frac{d\theta'_2}{dt} - \frac{d\theta'_3}{dt} + \frac{d\theta'_4}{dt}\right).$$

Dagegen ist:

$$\frac{ddr_1}{dt^2} - \frac{ddr_2}{dt^2} + \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2} = +u\sin\theta\left(\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right)$$
$$- u'\sin\theta'\left(\frac{d\theta'_1}{dt} - \frac{d\theta'_2}{dt} + \frac{d\theta'^3}{dt} - \frac{d\theta'_4}{dt}\right).$$

Ferner ergiebt sich nach S. 123 f., wenn man daselbst auch der *negativen* Masse des inducirten Element $-\alpha'e'$ die Geschwindigkeit $+u'$ beilegt,

$$r\frac{d\theta_1}{lt} = r\frac{d\theta_3}{dt} = +u\sin\theta - u'\sin\theta'\cos\omega$$

$$r\frac{d\theta_2}{dt} = r\frac{d\theta_4}{dt} = -u\sin\theta - u'\sin\theta'\cos\omega$$

$$r\frac{d\theta'_1}{dt} = r\frac{d\theta'_3}{dt} = -u'\sin\theta' + u\sin\theta\cos\omega$$

$$r\frac{d\theta'_2}{dt} = r\frac{d\theta'_4}{dt} = -u'\sin\theta' - u\sin\theta\cos\omega,$$

woraus sich ergiebt:

$$r\left(\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} - \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right) = r\left(\frac{d\theta'_1}{dt} + \frac{d\theta'_2}{dt} - \frac{d\theta'_3}{dt} - \frac{d\theta'_4}{dt}\right) = 0;$$

dagegen aber

$$r\left(\frac{d\theta_1}{dt}+\frac{d\theta_2}{dt}+\frac{d\theta_3}{dt}+\frac{d\theta_4}{dt}\right)=-4\,u'\sin\theta'\cos\omega$$

$$r\left(\frac{d\theta'_1}{dt}-\frac{d\theta'_2}{dt}+\frac{d\theta'_3}{dt}-\frac{d\theta'_4}{dt}\right)=+4\,u\sin\theta\cos\omega$$

Es folgt hieraus:

$$r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)=0$$

$$r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)=-8\,uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega.$$

Substituirt man diese Werthe, so findet man die *Summe* der beiden Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Masse des inducirten Elements wirken,

$$=0,$$

ihre *Differenz* dagegen

$$=-\frac{\alpha\alpha'}{rr}aeu\,.\,ae'u'(\sin\theta\sin\theta'\cos\omega-\tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\theta'),$$

oder, da nach S. 126 $\cos\varepsilon=\sin\theta\sin\theta'\cos\omega+\cos\theta\cos\theta'$ und nach S. 115 $aeu=i$, ist,

$$=-\frac{\alpha\alpha'}{rr}i\,.\,ae'u'(\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'),$$

was zu beweisen war.

Die hierdurch bestimmte Kraft sucht nun die *positive* und *negative* Elektricität im inducirten Elemente α' nach der Richtung der Geraden r von einander zu scheiden. In der Wirklichkeit kann diese Scheidung aber nur nach der Richtung von α' erfolgen, weil in einem linearen Leiter ein galvanischer Strom nur in der Richtung des Leiters statt finden kann. Zerlegt man daher obige Kraft nach der Richtung des Elements α' und senkrecht darauf, so kommt nur der erstere Theil als *elektromotorische Kraft* in Betracht, und dieser ist, wenn φ den Winkel bezeichnet, welchen das Element α' mit der verlängerten Geraden r macht,

$$=-\frac{\alpha\alpha'}{rr}i(\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta').ae'u'\cos\varphi.$$

Gewöhnlich versteht man unter *elektromotorischer Kraft* die beschleunigende Kraft, welche die angegebene absolute Kraft auf die in der Längeneinheit des inducirten Leitungsdrahts enthaltene elektrische Masse e' ausübt, welche durch Division des obigen Werths mit e' erhalten wird. Hiernach würde endlich die *elektromotorische Kraft* eines ruhenden constanten Stromelements auf ein bewegtes Drahtelement erhalten werden.

$$=-\frac{\alpha\alpha'}{rr}i(\cos\varepsilon-\tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta').au'\cos\varphi.$$

Je nachdem nun dieser Ausdruck einen *positiven* oder *negativen* Werth hat, ist der inducirte Strom *positiv* oder *negativ*, wo unter positivem Strome ein solcher verstanden wird, dessen positive Elektricität in derjenigen Richtung des

Elements α' sich bewegt, welche mit der verlängerten Geraden r den Winkel φ einschliesst.

Sind z. B. die Elemente α und α' einander parallel, und ist die Richtung, nach welcher das letztere mit der Geschwindigkeit $+u'$ bewegt wird, in der Ebene beider Elemente senkrecht auf dieselben, so ist, wenn α' durch seine Bewegung von α sich *entfernt*,

$$\theta = \varphi, \quad \cos\theta' = \sin\theta, \quad \cos\varepsilon = 0,$$

folglich die *elektromotorische Kraft*

$$= + \tfrac{3}{2}\frac{\alpha\alpha'}{rr} i \sin\theta \cos\theta^2 . au'.$$

Dieser Werth ist immer *positiv*, wenn $\theta < 180°$ genommen wird, und dieser *positive* Werth bezeichnet hier einen inducirten Strom von gleicher Richtung, wie der inducirende, übereinstimmend mit dem, was die Erfahrung für diesen Fall ergeben hat.

Unter gleichen Verhältnissen, blos mit dem Unterschiede, dass das Element α' durch seine Bewegung dem Elemente α sich *nähert*, ist

$$\theta = \varphi, \quad \cos\theta' = -\sin\theta, \quad \cos\varepsilon = 0,$$

folglich die *elektromotorische Kraft*

$$= - \tfrac{3}{2}\frac{\alpha\alpha'}{rr} i \sin\theta \cos\theta^2 . au'.$$

Der *negative* Werth dieser Kraft bezeichnet einen inducirten Strom von entgegengesetzter Richtung, wie der inducirende, ebenfalls übereinstimmend mit dem, was die Erfahrung für diesen Fall ergeben hat.

25.

Vergleichung mit dem Erfahrungssatze Art. 11.

Auf den im vorigen Artikel betrachteten Fall der *Volta-Induction* beziehen sich die Art. 10. 11. mitgetheilten Versuche. Zur *quantitativen* Bestimmung der *Volta-Induction* in diesem Falle ist dort der Satz aufgestellt und an der Erfahrung geprüft worden,

> *dass die Induction eines ruhenden constanten Stroms auf einen gegen ihn bewegten Leitungsdraht die nämliche sei, wie die Induction eines Magnets auf denselben Leitungsdraht, wenn die elektrodynamische Kraft, welche jener constante Strom auf jenen von einem Strome durchflossenen Leitungsdraht ausüben würde, der elektromagnetischen Kraft gleich wäre, welche der Magnet auf den von demselben Strome durchflossenen Draht ausüben würde.*

Um diesen Satz erfahrungsmässig zu begründen, wurden folgende Versuche gemacht:

1) wurde die *elektrodynamische* Kraft gemessen, welche ein geschlossener Strom A auf einen anderen geschlossenen Strom B ausübte;

2) wurde der geschlossene Strom A mit einem Magnete C vertauscht, und die *elektromagnetische* Kraft gemessen, welche C auf B ausübte;

3) wurde der geschlossene Leiter B, ohne Strom, in eine bestimmte Bewegung gesetzt, und der Strom gemessen, welcher dann vom Strome A in dem bewegten Leiter durch *Volta-Induction* entstand;

4) wurde bei derselben Bewegung des geschlossenen Leiters B der Strom gemessen, welcher von dem für den Strom A substituirten Magneten C durch *Magneto-Induction* entstand.

Diesen 4 Versuchen entsprechend sollen nun zur Vergleichung folgende 4 Gesetze zusammengestellt werden:

1) das Gesetz der *elektrodynamischen* Wirkung eines geschlossenen Stroms auf ein Stromelement;

2) das Gesetz der *elektromagnetischen* Wirkung eines Magneten auf ein Stromelement;

3) das Gesetz der *Volta-Induction* eines geschlossenen Stromes auf ein Element eines bewegten Leiters;

4) das Gesetz der *Magneto-Induction* eines Magneten auf ein Element eines bewegten Leiters.

1. *Das Gesetz der elektrodynamischen Wirkung eines geschlossenen Stroms auf ein Stromelement.*

Dieses Gesetz ist S. 55 in der Note unter (3) für den Fall entwickelt worden, wo der geschlossene Strom eine Ebene begrenzt und in die Ferne wirkt. Statt auf dieses besondere Gesetz soll hier auf das allgemeinere zurückgegangen werden, welches Ampère S. 214 seiner Abhandlung gegeben hat, und welches S. 12 dieser Abhandlung angeführt worden ist. Es wird darnach die auf das Stromelement α' wirkende elektrodynamische Kraft nach 3 rechtwinkeligen Coordinatenaxen, deren Anfangspunkt im Mittelpunkte des Elements α' liegt, in die Componenten X, Y, Z zerlegt, welche folgendermaassen bestimmt werden:

$$X = -\frac{ii'}{2}\alpha'(C\cos\mu - B\cos\nu)$$

$$Y = -\frac{ii'}{2}\alpha'(A\cos\nu - C\cos\lambda)$$

$$Z = -\frac{ii'}{2}\alpha'(B\cos\lambda - A\cos\mu),$$

worin $A = \int\frac{ydz - zdy}{r^3}$, $B = \int\frac{zdx - xdz}{r^3}$, $C = \int\frac{xdy - ydx}{r^3}$ ist, α' die Länge des Stromelements, auf welches gewirkt wird, bezeichnet, λ, μ, ν die Winkel welche α' mit den 3 Coordinàtenaxen bildet, und i und i' die Intensitäten des geschlossenen Stroms und des Stromelements.

2. *Das Gesetz der elektromagnetischen Wirkung eines Magneten auf ein Stromelement.*

Nach dem Grundgesetze des Elektromagnetismus wird die elektromagnetische Kraft, welche eine Masse nördlichen oder südlichen magnetischen Fluidums $\pm\mu$ auf ein Stromelement von der Länge α' und von der Stromintensität

i' in der Entfernung r ausübt, wenn φ den Winkel bezeichnet, welchen α' mit r bildet, durch

$$\pm \frac{i'\alpha'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu \sin\varphi}{rr}$$

dargestellt, worin $i'\sqrt{\frac{1}{2}}$ für $\varkappa'$ nach S. 264 gesetzt worden ist, und diese Kraft sucht das Stromelement in einer auf α' und r senkrechten Richtung zu bewegen. Hieraus ergiebt sich also die Grösse und Richtung der beiden Kräfte, welche die beiden in einem *kleinen* Magnete enthaltenen Massen des nördlichen und südlichen magnetischen Fluidums auf das Stromelement ausüben. Diese beiden Kräfte lassen sich nach dem Gesetze des Parallelogramms zusammensetzen, und es ergiebt sich daraus die *Grösse* der Resultante, wenn m das magnetische Moment und ψ den Winkel bezeichnet, welchen die magnetische Axe mit der Geraden r macht, und ε den Winkel, welchen die Richtung α' mit der in der Ebene der magnetische Axe und der Geraden r liegenden Richtung D macht, von deren Winkel mit der Geraden r der Sinus sich zu $\sin\psi$ wie $1 : \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}$ verhält, und wenn man endlich Kürze halber $\frac{1}{r^3}\sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}$ mit $\mathfrak{d}$ bezeichnet,

$$= \frac{i'}{\sqrt{2}}\alpha' m' \mathfrak{d} \sin\varepsilon.$$

Die *Richtung* dieser Resultante ist gegen die Richtungen α' und D senkrecht. Bezeichnet man nun mit

$$a, \quad b, \quad c$$

die Cosinus der Winkel, welche die so bestimmte Resultante mit 3 rechtwinkeligen Coordinatenaxen bildet, deren Anfangspunkt im Mittelpunkte des Elements α' liege, und zerlegt die Resultante nach der Richtung der letzteren, so erhält man folgende 3 Componenten:

$$\frac{i'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' m' \cdot a\mathfrak{d} \sin\varepsilon$$

$$\frac{i'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' m' \cdot b\mathfrak{d} \sin\varepsilon$$

$$\frac{i'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' m' \cdot c\mathfrak{d} \sin\varepsilon$$

und für a, b, c folgende Gleichungen, wenn die Winkel, welche die Richtung des Elements α' mit jenen Coordinatenaxen bildet, mit

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu,$$

und die Cosinus der Winkel, welche die Richtung D mit den nämlichen Coordinatenaxen bildet, mit

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}, \quad \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}, \quad \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}},$$

bezeichnet werden, nämlich:

$$a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + c\mathfrak{c} = 0$$

$$a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu = 0$$

$$aa + bb + cc = 1$$

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}\cos\lambda + \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}\cos\mu + \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}\cos\nu = \cos\varepsilon.$$

Durch Elimination von b und c ergiebt sich aus diesen Gleichungen der Werth von a

$$a = \frac{\mathfrak{b}\cos\nu - \mathfrak{c}\cos\mu}{\mathfrak{d}\sqrt{\left(1-\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}\cos\lambda+\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}\cos\mu+\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}\cos\nu\right)^2\right)}} = \frac{\mathfrak{b}\cos\nu - \mathfrak{c}\cos\mu}{\mathfrak{d}\sin\varepsilon},$$

und auf gleiche Weise folgende Werthe von b und c:

$$b = \frac{\mathfrak{c}\cos\lambda - \mathfrak{a}\cos\nu}{\mathfrak{d}\sin\varepsilon}$$

$$c = \frac{\mathfrak{a}\cos\mu - \mathfrak{b}\cos\lambda}{\mathfrak{d}\sin\varepsilon}.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die der 3 Componenten der elektromagnetischen Kraft, so erhält man für die letzteren folgende Werthe:

$$-\frac{i'}{\sqrt{2}}.\alpha' m' (\mathfrak{c}\cos\mu - \mathfrak{b}\cos\nu)$$

$$-\frac{i'}{\sqrt{2}}.\alpha' m' (\mathfrak{a}\cos\nu - \mathfrak{c}\cos\lambda)$$

$$-\frac{i'}{\sqrt{2}}.\alpha' m' (\mathfrak{b}\cos\lambda - \mathfrak{a}\cos\mu).$$

Für einen grösseren Magnet, welcher aus vielen kleinen zusammengesetzt ist, werden hiernach die 3 Componenten X', Y', Z' der von ihm auf das Stromelement α' ausgeübten elektromagnetischen Kraft folgendermassen bestimmt:

$$X' = -\frac{i'}{\sqrt{2}}.\alpha' (C'\cos\mu - B'\cos\nu)$$

$$Y' = -\frac{i'}{\sqrt{2}}.\alpha' (A'\cos\nu - C'\cos\lambda)$$

$$Z' = -\frac{i'}{\sqrt{2}}.\alpha' (B'\cos\lambda - A'\cos\mu),$$

worin $A' = S(\mathfrak{a}m')$, $B' = S(\mathfrak{b}m')$, $C' = S(\mathfrak{c}m')$ ist.

3. *Das Gesetz der Volta-Induction eines geschlossenen Stroms auf ein Element eines bewegten Leiters.*

Das im vorigen Artikel entwickelte Elementargesetz dieser Induction, welches für jedes inducirende *Element* α gilt, giebt folgenden Werth der *elektromotorischen* Kraft, mit welcher ein solches Element α die positive und negative elektrische Masse in dem inducirten Elemente α' nach der Richtung der Geraden r von einander zu scheiden sucht:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr} i(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta').au',$$

worin $+u'$ die Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher das inducirte Element α' bewegt wird, und ε und θ' die Winkel, welche die Richtung dieser Bewegung mit der Richtung, nach welcher im inducirenden Stromelemente α die positive Elektricität strömt, und mit der verlängerten Geraden r bildet. θ bezeichnet, wie in der Theorie zweier constanter Stromelemente Art. 22 den Winkel, welchen die Richtung, nach welcher im ersteren Elemente α die positive Elektricität strömt, mit der Geraden r bildet.

Vergleicht man diesen Werth der *eletromotorischen* Kraft mit dem in der Theorie zweier constanter Stromelemente, übereinstimmend mit Ampère's Gesetze, S. 126 gefundenen Werthe der *elektrodynamischen* Kraft, so ergiebt sich folgende einfache Relation zwischen beiden, dass nämlich die erstere Kraft aus der letzteren durch Multiplication mit dem constanten Factor $\frac{au'}{i'}$ erhalten wird, vorausgesetzt, dass die Richtung, nach welcher im Elemente α' die positive Elektricität strömt, in der letzteren Kraft, der Richtung gleich sei, nach welcher das inducirte Element α' selbst bewegt wird, in der ersteren Kraft, d. i.

$$\beta = \lambda, \quad \gamma = \mu, \quad \delta = \nu,$$

wenn die von beiden Richtungen mit 3 rechtwinkeligen Coordinatenaxen gebildeten Winkel respective mit

$$\lambda, \mu, \nu \quad \text{und} \quad \beta, \gamma, \delta$$

bezeichnet werden; denn alsdann sind die Werthe von ε und θ' in beiden Ausdrücken gleich.

Hieraus leuchtet nun unter der gemachten Voraussetzung von selbst ein, dass die unter (1) angeführten Werthe der *elektrodynamischen* Kraft X, Y, Z auch nur mit dem constanten Factor $\frac{au'}{i'}$ multiplicirt zu werden brauchen, um die Componenten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ der *elektromotorischen* Kraft zu erhalten, welche ein *geschlossener Strom* auf das inducirte Element α' ausübt. Es folgt hieraus

$$\mathfrak{X} = -\frac{au'}{2} \cdot i\alpha' (C\cos\gamma - B\cos\delta)$$

$$\mathfrak{Y} = -\frac{au'}{2} \cdot i\alpha' (A\cos\delta - C\cos\beta)$$

$$\mathfrak{Z} = -\frac{au'}{2} \cdot i\alpha' (B\cos\beta - A\cos\gamma)$$

worin A, B, C dieselbe Bedeutung haben wie unter (1.).

4. *Das Gesetz der Magneto-Induction eines Magneten auf ein Element eines bewegten Leiters.*

Aus der nach dem Grundgesetze des Elektromagnetismus bestimmten *elektromagnetischen Elementarkraft,* welche eine Masse nördlichen oder südlichen magnetischen Fluidums $\pm \mu$ auf ein Stromelement von der Länge α' und von der Stromintensität i' in der Entfernung r ausübt, wenn φ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung, nach welcher die positive Elektricität in α' strömt, mit der Geraden r bildet, nämlich aus der unter (2) angeführten, normal auf die mit r und α' parallelen Ebene wirkenden Kraft

$$\pm \frac{i'\alpha'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu \sin\varphi}{rr},$$

wird nach dem Grundgesetze der Magneto-Induction die *elektromotorische Elementarkraft* erhalten, mit welcher dieselbe magnetische Masse die positive und negative Elektricität in dem inducirten Elemente α', in normaler Richtung auf die mit r und α' parallele Ebene, zu scheiden sucht, wenn das inducirte

Element α' hier mit der Geschwindigkeit u' in der nämlichen Richtung bewegt wird, nach welcher dort die positive Elektricität im Elemente α' strömte, durch Multiplication mit dem constanten Faktor $\frac{ku'}{i}$. Es ist also diese *elektromotorische Elementarkraft*

$$=\pm\frac{k\alpha'u'}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\mu\sin\varphi}{rr}.$$

Hierin bezeichnet k einen von u' unabhängigen constanten Faktor, dessen Werth jedoch bisher durch keine Messung näher bestimmt worden ist.

Bezeichnet man die Winkel, welche im einen Falle die Richtung, nach welcher die positive Elektricität im Elemente α', im anderen Falle die Richtung, nach welcher das inducirte Element α' selbst bewegt wird, mit 3 rechtwinkeligen Coordinatenaxen bildet, respective mit

$$\lambda,\ \mu,\ \nu \quad \text{und} \quad 6,\ \gamma,\ \delta,$$

so ist, unter der eben vorausgesetzten Gleichheit genannter Richtungen,

$$6=\lambda,\quad \gamma=\mu,\quad \delta=\nu.$$

Es leuchtet auch hier von selbst ein, dass, unter vorausgesetzter Gleichheit der beiden erwähnten Richtungen, die unter (2) angeführten Werthe von X', Y', Z' nur mit dem constanten Facter $\frac{ku'}{i}$ multiplicirt zu werden brauchen, um die Componenten $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ der elektromotorischen Kraft zu erhalten, welche ein *ganzer Magnet* auf das inducirte Element α' ausübt. Es folgt hieraus

$$\mathfrak{X}'=-\frac{ku'}{\sqrt{2}}\cdot\alpha'(C'\cos\gamma-B'\cos\delta)$$

$$\mathfrak{Y}'=-\frac{ku'}{\sqrt{2}}\cdot\alpha'(A'\cos\delta-C'\cos6)$$

$$\mathfrak{Z}'=-\frac{ku'}{\sqrt{2}}\cdot\alpha'(B'\cos6-A'\cos\gamma),$$

worin A', B', C' dieselbe Bedeutung haben wie unter (2).

Es sollen nun die Relationen zwischen den hier aufgestellten Gesetzen an dem im Anfang erwähnten Erfahrungssatze geprüft werden. Es ergiebt sich nun aus den vorhergehenden Gesetzen, wenn die *elektrodynamischen* Kräfte zu den *elektromagnetischen* in dem Verhältnisse $1:n$ stehen, d. h. wenn

$$\frac{X'}{X}=\frac{Y'}{Y}=\frac{Z'}{Z}=n$$

ist, oder, indem man für X, Y, Z und X' Y' Z' ihre oben gefundenen Werthe substituirt, wenn

$$\frac{C'\cos\mu-B'\cos\nu}{C\cos\mu-B\cos\nu}=\frac{A'\cos\nu-C'\cos\lambda}{A\cos\nu-C\cos\lambda}=\frac{B'\cos\lambda-A'\cos\mu}{B\cos\lambda-A\cos\mu}=\frac{i}{\sqrt{2}}\cdot n,$$

folglich

$$A'=\frac{i}{\sqrt{2}}\cdot nA,\qquad B'=\frac{i}{\sqrt{2}}\cdot nB,\qquad C'=\frac{i}{\sqrt{2}}\cdot nC$$

ist, folgendes Verhältniss der durch *Volta-Induction* und durch *Magneto-Induction* gewonnenen *elektromotorischen* Kraft:

$$\frac{\mathfrak{X}'}{\mathfrak{X}} = \frac{k\sqrt{2}}{ai} \cdot \frac{C \cos\gamma - B \cos\delta}{C \cos\gamma - B \cos\gamma} = \frac{k}{a} \cdot n$$

$$\frac{\mathfrak{Y}'}{\mathfrak{Y}} = \frac{k\sqrt{2}}{ai} \cdot \frac{A' \cos\delta - C' \cos\beta}{A \cos\delta - C \cos\beta} = \frac{k}{a} \cdot n$$

$$\frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{Z}} = \frac{k\sqrt{2}}{ai} \cdot \frac{B' \cos\beta - A' \cos\gamma}{B \cos\beta - A \cos\gamma} = \frac{k}{a} \cdot n$$

Hieraus ergiebt sich endlich folgendes Resultat:

$$\frac{X'}{X} : \frac{\mathfrak{X}'}{\mathfrak{X}} = \frac{Y'}{Y} : \frac{\mathfrak{Y}'}{\mathfrak{Y}} = \frac{Z'}{Z} : \frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{Z}} = a : k,$$

was mit dem im Aufang erwähnten Erfahrungssatze übereinstimmt, weil das Verhältniss $a : k$ *constant* ist. Jener Erfahrungssatz lehrt aber noch mehr als die Vergleichung obiger Gesetze, indem er dieses constante Verhältniss der *Einheit* gleich macht, wodurch sich der bisher noch durch keine Messung bestimmte constante Faktor im Grundgesetze der Magneto-Induction k dem constanten Faktor a im elektrischen Grundgesetze gleich ergiebt. Das nämliche müsste auch statt finden, wenn es in den Magneten keine magnetischen Fluida gäbe, sondern alle Wirkungen der Magnete nach Ampère von elektrischen Strömungen in ihnen herrührten.

26.

Vergleichung mit den von Fechner und Neumann aufgestellten Sätzen.

Fechner ist der erste gewesen, welcher eine *Erklärung* der Faraday'schen Inductionserscheinungen aus den Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen, die mit einander vorher von Lenz blos durch eine empirische Regel in Beziehung gesetzt waren, durch Entwickelung ihres inneren Zusammenhangs zu geben versucht, und dieselbe in Poggendorff's Annalen 1845. Bd. 64. S. 337 veröffentlicht hat. Fechner hat sich dabei auf diejenige Art der *Volta-Induction* beschränkt, von welcher die vorhergehenden Artikel handeln, nämlich auf die eines ruhenden constanten Stromes auf einen gegen ihn bewegten Leitungsdraht. Für diese Art der *Volta-Induction* ist es Fechnern wirklich gelungen, ihren *inneren Zusammenhang* mit den Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen zu entdecken, und eine Erklärung derselben auf das für letztere Erscheinungen geltende etwas *verallgemeinerte* Ampère'sche Gesetz zu begründen. — Jener *innere Zusammenhang* besteht wesentlich darin, dass man bei jener Induction, auch abgesehen von dem durch die Induction erst erregten Strome, gleichwie bei den Ampère'schen Erscheinungen, mit *Wechselwirkungen elektrischer Ströme* zu thun habe, die Erklärung von beiderlei Erscheinungen folglich auf den Gesetzen dieser Wechselwirkungen beruhen müsse. Die Elektricität in dem inducirten Leitungsdrahte, sagt nämlich Fechner, befinde sich auch in Strömung, sobald dieser Leitungsdraht *fortbewegt* werde, weil sie nämlich an der Bewegung ihres Trägers Theil nehme.

Es unterscheiden sich nur die elektrischen Ströme solcher inducirten Leitungsdrähte von den galvanischen Strömen der inducirenden Drähte darin, dass gleiche Massen *positiver* und *negativer* Elektricität gleichzeitig mit gleicher Geschwindigkeit in letzteren nach *entgegengesetzten* Richtungen, in ersteren nach *gleichen* Richtungen bewegt werden. — Die *Verallgemeinerung,* welche Fechner dem Ampère'schen Gesetze gegeben hat, besteht *erstens* darin, dass die nach Ampère auf den ponderabelen Träger wirkende Kraft in gleicher Stärke und nach gleicher Richtung ursprünglich auf die im Träger befindlichen elektrischen Massen wirke, und von diesen erst dem Träger mitgetheilt werde; *zweitens* darin, dass das Ampère'sche Gesetz nicht blos für die Totalwirkung eines galvanischen Stroms auf einen anderen gelte, sondern auch für die beiden partiellen Wirkungen, welche der erstere Strom auf die *positive* und auf die *negative* Elektricität des letzteren ausübe.

Diese Erklärung stimmt mit der in den vorigen Artikeln entwickelten Theorie dieser Induction überein; denn man findet in letzterer das Recht zu der Verallgemeinerung des Ampère'schen Gesetzes begründet, auf welcher jene Erklärung bauet. Es lässt sich dies nachweisen, wenn man die beiden auf die *positive* oder *negative* Elektricität wirkenden Kräfte, wie sie S. 328 angegeben worden sind, besonders betrachtet, wo man findet, dass das Ampère'sche Gesetz nicht blos für alle 4 Kräfte, sondern auch für diese oder jene beiden gültig ist.

Uebrigens hat Fechner selbst schon bemerkt, dass der Gesichtspunkt, unter welchem er den Zusammenhang der Faraday'schen Inductionserscheinungen mit den Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen aufgefasst hat, kein so allgemeiner ist, dass er über alle Faraday'schen Inductionserscheinungen erstreckt werden könnte. Sobald der inducirte Draht *ruhet,* können die Inductionserscheinungen nicht unter diesem Gesichtspunkte gefasst werden, weil dann von keiner Bewegung der Elektricität im inducirten Drahte die Rede sein kann. Fechner sagt hierüber a. a. O. S. 341: «Anstatt bei den Inductionsversuchen den (neutralen) Draht $a'b'$ nach dem ruhenden (erregten) Draht ab hin zu bewegen, könnte man umgekehrt verfahren, und die Induction würde immer noch bestehen Dies muss als ein *Erfahrungsdatum* zum Beweise angenommen werden, dass es hiebei blos auf die Relation der Bewegungen ankommt, und dass es erlaubt ist, für Bewegung des erregten Drahts und Ruhe des neutralen Drahts das Umgekehrte zu substituiren, um das Princip in der angegebenen Form anwenden zu können.»

Neumann hat die empirische Regel, durch welche Lenz die Faraday'schen Inductionserscheinungen mit den Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen in Beziehung gesetzt hat, seiner Untersuchung zum Grunde gelegt, und hat eine Ergänzung derselben in dem Satze gefunden, dass die Stärke der Induction proportional mit der Geschwindigkeit der Bewegung des inducirten Leiters sei, wenn die Induction durch eine Bewegung des letzteren hervorgebracht werde. Diese beiden empirischen Regeln ergänzen einander so, dass Neumann daraus die *Allgemeinen Gesetze der inducirten Ströme* hat ableiten können, indem die daraus zunächst für den Fall hervorgehenden Gesetze, wo die Induction durch eine Bewegung des inducirten Leiters hervorgebracht wird, von der Art sind, dass sie unmittelbar, ohne eine Modification zu erleiden, in

weiterem Kreise Anwendung finden und auf alle Arten der Induction ausgedehnt werden können. Diese von Neumann aufgestellten *Allgemeinen Gesetze der inducirten Ströme* dürften in Betracht sowohl ihres inneren Zusammenhangs unter einander, als auch der mit ihnen verflochtenen empirischen Regeln kaum einem Zweifel unterliegen, und es ist darum interessant, die Resultate der oben entwickelten Theorie mit diesen auf ganz anderen Wegen von Neumann abgeleiteten Gesetzen zu vergleichen.

Da Neumann's der k. Akademie der Wissenschaften in Berlin übergebene Abhandlung noch nicht gedruckt ist, kann ich mich nur auf den so eben in Poggendorff's Annalen, im ersten Hefte dieses Jahres, erschienenen Auszug berufen, aus dem ich folgende Stelle anführe:

«§. 1. Aus dem Lenz'schen Satze: dass die Wirkung, welche der inducirende Strom oder Magnet auf den inducirten Leiter ausübt, immer, wenn die Induction durch eine Bewegung des letzteren hervorgebracht ist, einen hemmenden Einfluss auf diese Bewegung ausübt, in Verbindung mit dem Satze: dass die Stärke der momentanen Induction proportional mit der Geschwindigkeit dieser Bewegung ist, wird das allgemeine Gesetz der linearen Induction abgeleitet:

$$E\,\mathrm{d}s = -\varepsilon v C\,\mathrm{d}s.$$

Hierin bedeutet $\mathrm{d}s$ ein Element des inducirten Drahts, und $E\mathrm{d}s$ die in dem Elemente $\mathrm{d}s$ inducirte elektromotorische Kraft; v ist die Geschwindigkeit, mit welcher $\mathrm{d}s$ bewegt ist, C die nach der Richtung, in welcher $\mathrm{d}s$ bewegt wird, zerlegte Wirkung des Inducenten auf $\mathrm{d}s$, dieses Element durchströmt gedacht von der Einheit des Stroms. Die Grösse ε, unabhängig von der Beschaffenheit des inducirten Leiters, kann bei der linearen Induction als eine Constante behandelt werden, ist aber eine solche Function der Zeit, die sehr rasch abnimmt, wenn ihr Argument einen merklichen Werth hat, und muss als solche bei der Flächeninduction und der Induction in Körpern behandelt werden.»

Aus der oben entwickelten Theorie hat sich am Schlusse des 24. Artikels folgender Ausdruck für die in dem Elemente α' inducirte *elektromotorische* Kraft ergeben, worin u' die Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher α' bewegt wird:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}i(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta').au'\cos\varphi.$$

Dieser Ausdruck war der nach der Richtung des Elements α' zerlegte Werth der ganzen von dem Inducenten α nach der Richtung der verbindenden Geraden r ausgeübten scheidenden Kraft, aus dem durch Weglassung des Factors $\cos\varphi$ die ganze Kraft wieder erhalten wird. Diese ganze Kraft nun ist im 25. Artikel unter (3) mit der durch Ampère's Gesetz bestimmten *elektrodynamischen* Kraft verglichen worden, welche der Inducent α auf das Element α' ausüben würde, wenn α' der Richtung parallel wäre, nach welcher das Element α' zum Zwecke der Induction bewegt wurde, und in dieser Richtung von einem Strome durchflossen würde, dessen Intensität $= i'$ wäre. Man erhält nämlich jene ganze nach der Richtung der verbindenden Geraden r ausgeübte *elektromotorische* Kraft durch Multiplication dieser *elektrodynamischen* Kraft mit dem Faktor

$\frac{a u'}{i'}$. Obigen Ausdruck selbst erhält man durch Multiplication derselben, *nach der Richtung des inducirten Elements* α' *zerlegten, elektrodynamischen* Kraft mit dem Factor $\frac{a u'}{i'}$. Bezeichnet man also diese, nach Richtung des inducirten Elements α' zerlegte, elektrodynamische Kraft mit

$$i'\alpha'.D,$$

so ist obiger Ausdruck

$$= -au'D\alpha'$$

zu setzen. Hierin ist für u' und α' nach der Neumann'schen Bezeichnung v und ds zu schreiben; folglich giebt die oben entwickelte Theorie nach dieser Bezeichnung die Gleichung:

$$E\mathrm{d}s = -avD\mathrm{d}s,$$

worin a einen von der Beschaffenheit des inducirten Leiters unabhängigen constanten Faktor bezeichnet, ebenso wie ε in der Neumann'schen Gleichung, weil hier von linearer Induction gehandelt wird. Beide Gleichungen stimmen also mit einander bis auf die Faktoren C und D überein. Auch haben diese Faktoren das mit einander gemein, dass sie, mit ds multiplicirt, die nach einer bestimmten Richtung zerlegte *elektrodynamische* Kraft ausdrücken, welche der Inducent auf ein an der inducirten Stelle befindliches von der Einheit des Stroms durchflossen gedachtes Element ds ausüben würde. Doch unterscheiden sich beide Faktoren von einander 1) durch die Richtung, welche dem an der inducirten Stelle gedachten Elemente ds zu geben sei, 2) durch die Richtung, nach welcher die auf dieses Element geübte elektrodynamische Kraft zerlegt werden soll. Es sind nämlich diese beiden Richtungen in dem Neumann'schen Gesetze *vertauscht.*

Das Neumann'sche Gesetz würde, wie man hieraus sieht, dem unsrigen *widersprechen,* wenn man es auf ein einzelnes Stromelement als Inducenten anwenden wollte, weil die Faktoren C und D dann ganz verschiedene Werthe haben. Es leuchtet aber ein, dass das Neumann'sche Gesetz seiner Herleitung gemäss zunächst nicht für jedes einzelne inducirende Stromelement, sondern nur für einen geschlossenen Strom oder für einen Magneten als Inducenten gelte, weil nämlich der Lenz'sche Satz, aus dem es hergeleitet worden ist, blos für geschlossene Ströme und Magnete als experimentell begründet gelten kann. Jener *scheinbare Widerspruch* löst sich nun von selbst, sobald man die Anwendung des Neumann'schen Gesetzes auf geschlossene, durch Magnete ersetzbare, Ströme als Inducenten beschränkt, wo sich dann die Idendität der Faktoren C und D auf folgende Weise beweisen lässt.

Nach Ampère sind die 3 Componenten X, Y, Z derjenigen Kraft, welche ein geschlossener Strom von der Intensität i, für welchen durch die Coordinaten x, y, z die Lage der Elemente bestimmt ist, auf irgend ein anderes Stromelement ds' von der Stromintensität i' ausübt, dessen Richtung mit den Coordinatenaxen die Winkel λ, μ, ν macht, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten in der Mitte des Elements ds' liegt,

$$X = -\tfrac{1}{2} ii' ds' (\cos\mu . \int \frac{xdy - ydx}{r^3} - \cos\nu . \int \frac{zdx - xdz}{r^3})$$

$$Y = -\tfrac{1}{2} ii' ds' (\cos\nu . \int \frac{ydz - zdy}{r^3} - \cos\lambda . \int \frac{xdy - ydx}{r^3})$$

$$Z = -\tfrac{1}{2} ii' ds' (\cos\lambda . \int \frac{zdx - xdz}{r^3} - \cos\mu . \int \frac{ydz - zdy}{r^3}).$$

Hieraus lassen sich nun die Werthe der Faktoren C und D für geschlossene Ströme als Inducenten ableiten.

Denn *erstens* den Faktor C in dem Neumann'schen Gesetze erhält man, wenn man mit X_1, Y_1, Z_1 die Werthe bezeichnet, welche X, Y, Z annehmen, wenn man $i' = 1$, und für λ, μ, ν die Winkel setzt, welche das inducirte Element mit den Coordinatenaxen bildet. Sind nämlich α, β, γ die Winkel, welche die Richtung, nach welcher das inducirte Element bewegt wird, mit den 3 Coordinatenaxen bildet, so ist

$$Cds' = X_1 \cos\alpha + Y_1 \cos\beta + Z_1 \cos\gamma.$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich, wenn man ein solches Coordinatensystem wählt, in welchem die Richtung der Axe der x mit der Richtung zusammenfällt, *nach welcher das inducirte Element bewegt wird.* Es ist dann nämlich

$$\cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = 0,$$

folglich

$$Cds' = X_1 = -\tfrac{1}{2} ids' (\cos\mu \int \frac{xdy - ydx}{r^3} - \cos\nu \int \frac{zdx - xdz}{r^3}).$$

Zweitens den Faktor D erhält man, wenn man mit X', Y', Z' die Werthe bezeichnet, welche X, Y, Z annehmen, wenn man $i' = 1$ und $\lambda = \alpha'$, $\mu = \beta'$, $\nu = \gamma'$ setzt, wo α', β', γ' die Winkel sind, welche die Richtung, nach welcher das inducirte Element bewegt wird, mit den 3 Coordinatenaxen bildet (die also mit α, β, γ identisch wären, wenn das nämliche Coordinatensystem gewählt würde). Sind nämlich nach dem jetzigen Coordinatensysteme λ', μ', ν' die Winkel, welche das inducirte Element mit den 3 Coordinatenaxen bildet (die also mit λ, μ, ν identisch wären, wenn das jetzige Coordinatensystem dem früheren gleich wäre) so ist:

$$Dds' = X' \cos\lambda' + Y' \cos\mu' + Z' \cos\nu'.$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich, wenn man ein anderes Coordinatensystem wie früher wählt, nämlich ein solches, in welchem die Richtung der Axe der x mit der Richtung *des inducirten Elements selbst* zusammenfällt, weil dann

$$\cos\lambda' = 1, \quad \cos\mu' = 0, \quad \cos\nu' = 0$$

ist, folglich:

$$Dds' = X' = -\tfrac{1}{2} ids' (\cos\beta' \int \frac{xdy - ydx}{r^3} - \cos\gamma' \int \frac{zdx - xdz}{r^3}).$$

Nun können die beiden Coordinatensysteme, nämlich dasjenige, in welchem die Axe der x der Richtung parallel ist, *nach welcher das inducirte Element bewegt wird*, und dasjenige, in welchem die Axe der x der Richtung *des inducirten Elements selbst* parallel ist, die Axe der y gemein haben, wenn die-

selbe auf beiden Richtungen, des inducirten Elements und seiner Bewegung, normal ist. Dies vorausgesetzt wird

$$\cos\mu = 0, \quad \cos 6' = 0, \quad \cos\nu = \cos\gamma',$$

und da man ausserdem beweisen kann, dass

$$\int \frac{z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z}{r^3}$$

nach beiden Coordinatensystemen gleichen Werth habe, so ergiebt sich

$$C = D,$$

was zu beweisen war. Dass $z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z$ nach allen rechtwinkeligen Coordinatensystemen, denen, wie den beiden obigen, der Anfangspunkt und die Axe der y gemein ist, gleichen Werth habe, leuchtet daraus ein, dass $\frac{1}{2}(z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z)$ den auf eine gegen die gemeinsame Axe y normale Ebene projicirten Flächenraum desjenigen Dreiecks darstellt, welches von dem gemeinsamen Coordinaten-Anfangspunkt und von dem betrachteten Stromelemente gebildet wird. Die Gerade r, welche das betrachtete Stromelement mit dem inducirten Elemente verbindet, hat einen von dem gewählten Coordinatensysteme ganz unabhängigen Werth. Hieraus ergiebt sich der Werth des Quotienten $\frac{z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z}{r^3}$ für die beiden oben angenommenen Coordinatensysteme überall gleich, folglich auch der Werth des auf den ganzen geschlossenen Strom zu erstreckenden Integrals $\int \frac{z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z}{r^3}$.

Es geht hieraus hervor, dass das Neumann'sche Gesetz für den Kreis der Erscheinungen, auf den es sich seiner Herleitung nach bezieht, wo nämlich alle Inducenten entweder Magnete oder geschlossene Ströme sind, mit dem aus der oben entwickelten Theorie abgeleiteten Gesetze zusammenfalle; dass aber die Anwendung des Neumann'schen Gesetzes ausser jenem Kreise auf ungeschlossene Ströme als Inducenten nicht gestattet sei.

27.

Gesetz der Stromerregung in einem ruhenden Leiter, wenn ein constantes Stromelement ihm genähert oder von ihm entfernt wird.

Das Gesetz der *Volta-Induction* für diesen Fall, wo der inducirte Leiter ruhet, und das inducirende Stromelement bewegt wird, lässt sich eben so wie für den ersten Fall aus dem aufgestellten elektrischen Grundgesetze ableiten. Es ist aber nicht nöthig, diese Ableitung zu geben, weil eine einfache Betrachtung lehrt, dass sie für den zweiten Fall wieder zu demselben Gesetze wie für den ersten führen müsse.

Das elektrische Grundgesetz, aus welchem alle Gesetze der *Volta-Induction* abgeleitet werden sollen, macht nämlich die Wirkung einer elektrischen Masse auf eine andere blos von ihrer *relativen* Entfernung, Geschwindigkeit

und Beschleunigung abhängig. Diese bleiben aber durch eine beiden Massen beigelegte *gemeinschaftliche* Bewegung unverändert; folglich wird auch durch eine solche *gemeinschaftliche* Bewegung die Wirkung einer elektrischen Masse auf eine andere nicht verändert. Man kann daher allen elektrischen Massen ohne Aenderung ihrer Wirkungen, folglich auch ohne Aenderung der von ihnen abhängigen Induction, eine solche *gemeinschaftliche* Bewegung beilegen. Hat man also ein inducirendes Stromelement α, welches mit der *absoluten* Geschwindigkeit u' nach irgend einer Richtung bewegt wird, während das inducirte Element α' in *absoluter* Ruhe ist, so kann man, ohne die Induction zu ändern, beiden Elementen nebst den in ihnen enthaltenen elektrischen Massen noch eine *gemeinschaftliche* Bewegung von der Geschwindigkeit u' nach derjenigen Richtung beilegen, welche der Richtung gerade entgegengesetzt ist, nach welcher das Stromelement α sich wirklich bewegt Durch Hinzufügen dieser gemeinschaftlichen Bewegung wird das inducirende Element α zur Ruhe gebracht, während nun das inducirte Element α' sich mit gleicher Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung bewegt, als in der Wirklichkeit das Stromelement. Es muss sich also aus dem aufgestellten Grundgesetze für gleiche *relative* Bewegung der beiden Elemente die nämliche Induction ergeben, unabhängig davon, ob bei dieser relativen Bewegung das eine oder das andere oder keines von beiden Elementen in *absoluter* Ruhe sich befinde. Mit diesem Resultate stimmt bekanntlich auch die Erfahrung überein.

28.

Gesetz der Stromerregung in einem Leiter durch Aenderung der Stromintensität in einem benachbarten Leiter.

Bezeichnet α und α' die Länge des inducirenden und des inducirten Elements, so sind in beiden Elementen wieder 4 elektrische Massen zu unterscheiden:

$$+\alpha e, \quad -\alpha e, \quad +\alpha' e', \quad -\alpha' e'.$$

Die *erste* dieser Massen $+\alpha e$ bewege sich mit der *veränderlichen* Geschwindigkeit u in der Richtung des ruhenden Elements α, welche mit der von α nach α' gezogenen Geraden den Winkel θ macht, du bezeichne die Aenderung von u während des Zeitelements dt; die *zweite* $-\alpha e$ bewege sich, den Bestimmungen eines galvanischen Stroms gemäss, in der nämlichen Richtung mit der Geschwindigkeit $-u$, d. h. rückwärts, und $-$du bezeichne die Aenderung dieser Geschwindigkeit während des Zeitelements dt; die *dritte* $+\alpha' e'$ bewege sich mit der constanten Geschwindigkeit $+u'$ in der Richtung des ruhenden Elements α', welche mit der von α nach α' gezogenen und verlängerten Geraden den Winkel θ' macht; die *vierte* $-\alpha' e'$ bewege sich endlich, wiederum den Bestimmungen eines galvanischen Stroms gemäss, in der nämlichen Richtung mit der Geschwindigkeit $-u'$, d. h. rückwärts. Die Entfernungen der beiden ersteren Massen von den beiden letzteren sind sämmtlich

in dem betrachteten Augenblicke der Entfernung r der beiden Elemente α und α' selbst gleich; da sie aber nicht gleich bleiben, sollen sie mit r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet werden.

Man erhält dann für die *Summe* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente α' wirken, d. i. für die Kraft, welche das Element α' selbst bewegt, denselben Ausdruck wie Art. 24, nämlich:

$$-\frac{aa}{16}\cdot\frac{\alpha e.\alpha' e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Für die *Differenz* jener Kräfte aber, von welcher die Induction abhängt,

$$-\frac{aa}{16}\cdot\frac{\alpha e.\alpha' e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Ferner gelten hierin für die ersten Differentialcoefficienten die nämlichen Werthe, welche Art. 22. gefunden wurden, nämlich:

$$\frac{dr_1}{dt}=-\frac{dr_2}{dt}=-u\cos\theta+u'\cos\theta'$$

$$\frac{dr_3}{dt}=-\frac{dr_4}{dt}=-u\cos\theta-u'\cos\theta'.$$

Es ist also $\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)=-8uu'\cos\theta\cos\theta'$,

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)=0.$$

Da die Geschwindigkeit u jetzt aber veränderlich ist, so ergeben sich für die zweiten Differentialcoefficienten andere Werthe als Art. 22., wo sie constant war, nämlich:

$$\frac{ddr_1}{dt^2}=+u\sin\theta.\frac{d\theta_1}{dt}-u'\sin\theta'.\frac{d\theta'_1}{dt}-\cos\theta.\frac{du}{dt}$$

$$\frac{ddr_2}{dt^2}=-u\sin\theta.\frac{d\theta_2}{dt}+u'\sin\theta'.\frac{d\theta'_2}{dt}+\cos\theta.\frac{du}{dt}$$

$$\frac{ddr_3}{dt^2}=+u\sin\theta.\frac{d\theta_3}{dt}+u'\sin\theta'.\frac{d\theta'_3}{dt}-\cos\theta.\frac{du}{dt}$$

$$\frac{ddr_4}{dt^2}=-u\sin\theta.\frac{d\theta_4}{dt}-u'\sin\theta'.\frac{d\theta'_4}{dt}+\cos\theta.\frac{du}{dt}.$$

Es ergiebt sich also für

$$\left(\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)=+u\sin\theta\left(\frac{d\theta_1}{dt}-\frac{d\theta_2}{dt}-\frac{d\theta_3}{dt}+\frac{d\theta_4}{dt}\right)$$
$$-u'\sin\theta'\left(\frac{d\theta'_1}{dt}-\frac{d\theta'_2}{dt}+\frac{d\theta'_3}{dt}-\frac{d\theta'_4}{dt}\right)$$

derselben Werth wie Art. 22., nämlich, wenn man die dort S. 124 entwickelten Werthe von $\frac{d\theta_1}{dt}$, $\frac{d\theta'_1}{dt}$ u. s. w. substituirt,

$$r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)=-8uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega.$$

Dagegen ist

$$\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)=+u\sin\theta\left(\frac{d\theta_1}{dt}+\frac{d\theta_2}{dt}+\frac{d\theta_3}{dt}+\frac{d\theta_4}{dt}\right)$$
$$-u'\sin\theta'\left(\frac{d\theta'_1}{dt}+\frac{d\theta'_2}{dt}-\frac{d\theta'_3}{dt}-\frac{d\theta'_4}{dt}\right)$$
$$-4\cos\theta\,.\frac{du}{dt}$$

Da aber nach S. 124 die Werthe

$$\frac{d\theta_1}{dt}+\frac{d\theta_2}{dt}=\frac{d\theta_3}{dt}+\frac{d\theta_4}{dt}=\frac{d\theta'_1}{dt}+\frac{d\theta'_2}{dt}=\frac{d\theta'_3}{dt}+\frac{d\theta'_4}{dt}=0$$

sind, so ist

$$\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)=-4\cos\theta\,.\frac{du}{dt}.$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man die *Summe* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente α' wirken, wie Art. 22.

$$=-\frac{\alpha\alpha'}{rr}.aeu.ae'u'(\sin\theta\sin\theta'\cos\omega-\tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\theta'),$$

d. h. die auf das Element α' wirkende Kraft wird bei veränderlicher Stromintensität eben so wie bei unveränderlicher bestimmt, und das Ampère'sche Gesetz findet in dieser Beziehung auch bei veränderlichen Strömen Anwendung.

Die *Differenz* jener beiden auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente α' wirkenden Kräfte, von welcher die *Induction* abhängt, ergiebt sich dagegen

$$=-\tfrac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}.aaee'.\cos\theta.\frac{du}{dt},$$

oder, da nach S. 115 $aeu=i$, folglich, weil u veränderlich, $ae.du=di$ ist,

$$=-\tfrac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}.ae'.\cos\theta.\frac{di}{dt}.$$

Die hierdurch bestimmte Kraft sucht nun die *positive* und *negative* Elektricität im inducirten Elemente α' nach der Richtung der Geraden r zu scheiden. In dieser Richtung kann die Scheidung nicht erfolgen, sondern nur in der Richtung des inducirten Elements α' selbst, die mit der verlängerten Geraden r den Winkel θ' einschliesst. Zerlegt man also jene ganze Kraft, welche die beiden Elektricitäten in α' zu scheiden sucht, nach dieser Richtung, d. h. multiplicirt man obige *Differenz* mit $\cos\theta'$, so erhält man die Kraft, welche die wirkliche Scheidung bewirkt,

$$=-\tfrac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}.ae'.\cos\theta\cos\theta'.\frac{di}{dt}.$$

Dividirt man diesen Werth noch mit e', so ergiebt sich die vom inducirenden Elemente α auf das inducirte Element α' ausgeübte *elektromotorische* Kraft in dem gewöhnlichen Sinne (siehe Art. 24. S. 131)

$$=-\frac{a}{2}.\frac{\alpha\alpha'}{r}.\cos\theta\cos\theta'.\frac{di}{dt}.$$

Die *Induction* während des Zeitelements dt, d. h. das Product dieses Zeitelements in die wirkende elektromotorische Kraft, ist also

$$= -\frac{a}{2} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r} \cdot \cos\theta \cos\theta' \,.\, di,$$

folglich die *Induction* für irgend einen Zeitraum, in welchem die Intensität des inducirenden Stroms um i zunimmt, während r, θ und θ' unverändert bleiben,

$$= -\frac{a}{2} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r} i \cos\theta \cos\theta' \,.$$

Der *positive* Werth dieses Ausdrucks bezeichnet einen im Elemente α' inducirten Strom nach der Richtung von α', welche mit der verlängerten Geraden r den Winkel θ' macht, der *negative* Werth einen inducirten Strom von entgegengesetzter Richtung.

Wenn die beiden Elemente α und α' einander parallel sind, und $\theta = \theta'$, so hat obiger Ausdruk für *wachsende* Stromintensität, oder für einen positiven Werth von i, einen *negativen* Werth, d. h. bei wachsender Stromintensität in α wird in α' ein Strom in entgegengesetzter Richtung erregt, als der inducirende Strom ist. Das Umgekehrte findet bei abnehmender Stromintensität statt. Beide Resultate stimmen mit bekannten Thatsachen überein. Auch die Proportionalität der Induction mit der Intensitätsänderung i des inducirenden Stroms entspricht der Erfahrung, so weit Schätzung ohne genaue Messung reicht.

29.

Vergleichung der Inductionswirkungen constanter Ströme auf bewegte Leiter mit denen variabeler Ströme auf ruhende Leiter.

Es sind in den vorhergehenden Artikeln aus dem elektrischen Grundgesetze die Gesetze der *Volta-Induction*, übereinstimmend mit der Erfahrung, nicht allein für den Fall abgeleitet worden, wo dieselbe durch *constante* Ströme in *bewegten* Leitern, sondern auch für den Fall, wo dieselbe durch *variabele* Ströme in *ruhenden* Leitern hervorgebracht wird. Die *Inductionsgesetze* für diese beiden Fälle sind sehr verschieden, und es ist darum sehr interessant, dass sich daraus dennoch sehr einfache Relationen zwischen den Wirkungen beider Inductionen ergeben.

Eine solche einfache Relation zwischen der Inductionswirkung *constanter* Ströme auf *bewegte* Leiter und der Inductionswirkung *variabeler* Ströme auf *ruhende* Leiter ergiebt sich aus den Art. 24. und 28. entwickelten Gesetzen selbst schon für einzelne inducirende und inducirte *Elemente*, wenn die Bewegung des inducirten Elements im ersteren Falle nach der Richtung der Geraden r geschieht. Denn berechnet man unter dieser Voraussetzung die gesammte Inductionswirkung, welche ein Stromelement von der *constanten* Intensität i hervorbringt, während das inducirte Element aus einer gegebenen Lage parallel mit sich selbst nach der Richtung der Geraden r unendlich weit entfernt wird,

oder aus unendlicher Entfernung bis zu jener Lage genähert wird, so findet man, dass diese gesammte Inductionswirkung derjenigen gleich ist, welche das inducirende Element, wenn seine Stromintensität um i abnähme oder zunähme, auf das inducirte Element hervorbringen würde, wenn es in der gegebenen Lage beharrte. Es ergiebt sich also, zunächst für diesen speciellen Fall, die Regel, *dass durch Entstehen oder Verschwinden eines Stroms in der Nähe eines Leiters in diesem Leiter derselbe Strom inducirt werde, wie wenn jener Strom gleichförmig fortgedauert hätte, aber entweder aus grosser Entfernung in jene Nähe des Leiters, oder umgekehrt aus jener Nähe in grosse Entfernung versetzt worden wäre.*

Für den angeführten speciellen Fall ergiebt sich dieser Satz leicht, wie folgt. Der am Ende des 24. Artikels gefundene Ausdruck der elektromotorischen Kraft ist mit dem Zeitelemente dt zu multipliciren, um die diesem Zeitelemente dt, oder dem in demselben durchlaufenen Wegelemente $u'dt$, entsprechende *Inductionswirkung* zu erhalten. Der Werth des Integrals von diesem Producte zwischen bestimmten Zeit- oder Wegegrenzen giebt dann die gesammte der Zwischenzeit oder dem in derselben durchlaufenen Wege entsprechende *Inductionswirkung*

$$= -ai\int\frac{\alpha\alpha'}{rr}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta')\cos\varphi\,.u'\,dt.$$

In unserem Falle, wo die Bewegung in der Geraden r geschieht, ist nun

$$u'dt = dr, \text{ und } \cos\theta' = 1.$$

Nach Art. 24. ist $\cos\varepsilon = \sin\theta\,\sin\theta'\,\cos\omega + \cos\theta\,\cos\theta'$, also hier:

$$\cos\varepsilon = \cos\theta.$$

Da endlich die Winkel θ und φ bei der Bewegung des mit sich stets parallelen Elements α' in der Richtung der Geraden r constante Werthe haben; so ist jene *Inductionswirkung*

$$= +\frac{ai}{2}.\alpha\alpha'\cos\theta\cos\varphi\,.\int\frac{dr}{rr}$$

Der Werth dieses Integrals zwischen den Grenzen $r = r$ bis $r = \infty$, d. h. die *Inductionswirkung*, während das inducirte Element aus einer gegebenen Lage unendlich weit *entfernt* wird, ist

$$= +\frac{ai}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\theta\cos\varphi\,;$$

zwischen den Grenzen $r = \infty$ bis $r = r$, d. h. die *Inductionswirkung*, während das inducirte Element aus unendlicher Ferne bis zu einer gegebenen Lage *genähert* wird, ist dagegen

$$= -\frac{ai}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\theta\cos\varphi.$$

Beachtet man, dass φ hierin nach Art. 24. denselben Winkel bezeichnet, welchen θ' Art. 28., nämlich den Winkel, welchen das inducirte Element α' mit der verlängerten Geraden r macht; so sieht man, dass die gefundene Inductionswirkung derjenigen gleich ist, welche nach dem Art. 28. gegebenen Ge-

setze erhalten wird, wenn das inducirte Element α' in der gegebenen Lage beharrt und die Stromintensität i in dem inducirenden Elemente α verschwindet oder entsteht.

Die gefundene Relation beider Inductionswirkungen lässt sich allgemeiner aussprechen, zwar nicht für einzelne Elemente, aber für *geschlossene Ströme und Leiter*. Es möge zunächst der Fall betrachtet werden, wo alle Elemente des inducirten geschlossenen Leiters gleich und parallel bewegt werden.

Die *Inductionswirkung* des Stromelements α auf das inducirte Element α' ist wie vorher

$$= -ai\int\frac{\alpha\alpha'}{rr}(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta')\cos\varphi\,.\,u'\mathrm{d}t.$$

Bezeichnet man nun mit ϑ und ϑ' die Winkel, welche die beiden Elemente α und α' mit der von der Geraden r bei der Bewegung des Elements α' erzeugten Ebene machen, ferner mit γ und γ' die Winkel, welche die Projectionen von α und α' auf jene Ebene mit der Richtung der Bewegung machen, so ist

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos\vartheta\,\cos(\theta'-\gamma)\\ \cos\varphi &= \cos\vartheta'\,\cos(\theta'-\gamma')\\ \cos\varepsilon &= \cos\vartheta\,\cos\gamma.\end{aligned}$$

Die Projection des Wegelements $u'\mathrm{d}t$ auf die Gerade r giebt den Werth von $\mathrm{d}r$ für das Zeitelement $\mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}r = u'\mathrm{d}t\,.\cos\theta' \text{ oder } u'\mathrm{d}t = \sec\theta'\,.\,\mathrm{d}r.$$

Substituirt man diese Werthe, so wird die *Inductionswirkung* von α auf α'

$$= -\int ai\alpha\alpha'\cos\vartheta\cos\vartheta'\,(\cos\gamma\sec\theta' - \tfrac{3}{2}\cos(\theta'-\gamma))\cos(\theta'-\gamma')\,.\,\frac{\mathrm{d}r}{rr},$$

oder, wenn $\cos(\theta'-\gamma)$ und $\cos(\theta'-\gamma')$ entwickelt werden,

$$= +\frac{ai}{2}\int\alpha\alpha'\cos\vartheta\cos\vartheta'\,.\,\mathrm{d}R,$$

worin Kürze halber mit $\mathrm{d}R$ folgender Ausdruck bezeichnet ist:

$$(\cos\gamma\cos\gamma' - 2\cos\gamma\sin\gamma'\tang\theta' - 3\cos(\gamma+\gamma')\sin\theta'^2 + 3\sin(\gamma+\gamma')\sin\theta'\cos\theta')\,.\,\frac{\mathrm{d}r}{rr}.$$

Beachtet man, dass bei der gleichen und parallelen Bewegung aller Elemente jedes derselben *parallel mit sich selbst* verschoben wird, folglich die Winkel ϑ, ϑ', γ, γ' constant sind, und setzt man

$$\sin\theta' = \frac{b}{r},\quad \cos\theta' = \frac{\sqrt{(rr-bb)}}{r},\quad \tang\theta' = \frac{b}{\sqrt{(rr-bb)}},$$

worin b das Penpendikel von α auf die Bahn des inducirten Elements α' bezeichnet, so lässt sich die Integration ausführen, und man erhält als *unbestimmtes Integral* folgenden Ausdruck:

$$-\frac{ai}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\theta\cos\varphi - \frac{ai}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\vartheta\cos\vartheta'\sin(\gamma'-\gamma)\cot\theta'.$$

Die gesuchte *Inductionswirkung* ist das *bestimmte Integral* oder die Differenz der beiden Werthe, welche dieser Ausdruck annimmt, wenn man darin die beiden Grenzwerthe von r, θ, φ und θ' substituirt.

Bildet man den nämlichen Ausdruck, wie für die Elemente α und α', für *alle* Combinationen der inducirenden und inducirten Elemente, welche in dem geschlossenen Strome und Leiter enthalten sind, und bezeichnet die *Summe* aller mit

$$-\frac{ai}{2}\mathsf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\theta\cos\varphi-\frac{ai}{2}\mathsf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos 6\cos 6'\sin(\gamma'-\gamma)\cot\theta',$$

so ist die Inductionswirkung des geschlossenen Stroms auf den geschlossenen Leiter der Differenz der beiden Werthe gleich, welche diese Summe annimmt, wenn man darin die dem Anfang und dem Ende der Induction entsprechenden Werthe von r, θ, φ und θ' substituirt.

Obige *Summe* besteht nun aus zwei Theilen, und es soll bewiesen werden, dass der *letztere Theil* für alle Werthe von r und $6'$ Null sei. Alsdann reducirt sich die *Inductionswirkung* eines *geschlossenen* Stroms auf einen *geschlossenen* Leiter auf die Differenz der beiden Werthe, welche der *erstere Theil* obiger Summe annimmt, wenn man darin die dem Anfang und die dem Ende der Induction entsprechenden Werthe von r, θ, φ substituirt.

Dass der *letztere Theil* obiger Summe, nämlich

$$-\frac{ai}{2}\mathsf{S}\ \frac{\alpha\alpha'}{r}\cos 6\cos 6'\sin(\gamma'-\gamma)\cot\theta'=0$$

sei, lässt sich leicht nachweisen, wenn man die inducirenden und die inducirten Elemente dem Satze gemäss zerlegt, dass zur Bestimmung der Wechselwirkung zweier Elemente für jedes derselben 3 andere gesetzt werden können, welche die 3 Kanten eines Parallelopipedums bilden, dessen Diagonale von dem gegebenen Elemente eingenommen wird. Ueber diesen Satz siehe unten Art. 31.

Zerlegt man hiernach die Elemente α und α', jedes in 3 Elemente, deren *erstes* der Richtung der Bewegung parallel sei, das *zweite* senkrecht gegen r, in der von r bei der Bewegung von α' erzeugten Ebene, das *dritte* senkrecht auf die beiden ersteren, und bezeichnet sie mit

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\quad \text{und}\quad \alpha'_1,\quad \alpha'_2,\quad \alpha'_3,$$

so geht $\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos 6\cos 6'\sin(\gamma'-\gamma)\cot\theta'$ in eine Summe von 9 Theilen über. Für die beiden mit $\alpha_3\alpha'_2$ und mit $\alpha_3\alpha'_2$ proportionalen Theile ist der Faktor $\cos 6=0$; für die beiden mit $\alpha_1\alpha'_3$ und mit $\alpha_2\alpha'_3$ proportionalen Theile ist der Faktor $\cos 6'=0$; für den mit $\alpha_3\alpha'_3$ proportionalen Theil sind die beiden Faktoren $\cos 6=\cos 6'=0$; endlich ist für den mit $\alpha_1\alpha'_1$ und mit $\alpha_2\alpha'_2$ proportionalen 6ten und 7ten Theil der Faktor $\sin(\gamma'-\gamma)=0$. Es bleiben also nur 2 Theile übrig, welche nämlich mit $\alpha_1\alpha'_2$ und mit $\alpha_2\alpha'_1$ proportional sind, für welche $\cos 6=1$, $\cos 6'=1$, $\sin(\gamma'-\gamma)=\mp\cos\theta'$ ist: diese beiden Theile sind also:

$$\pm\frac{ai}{2}\cdot\frac{\alpha_1\alpha'_2}{r}\cos\theta'\cot\theta'\ \text{und}\ \pm\frac{ai}{2}\cdot\frac{\alpha_2\alpha'_1}{r}\cos\theta'\cot\theta',$$

und mögen Kürze halber mit A und B bezeichnet werden. Verfährt man nun gleichermaassen mit je zwei Elementen des geschlossenen Stroms und Leiters, so findet man, dass, unter den übrigen eben so gebildeten Theilen, zwei Theile

sich befinden, von welchen A und B aufgehoben werden, und die mit A' und B' bezeichnet werden sollen. Gilt dies allgemein, so geht daraus hervor, dass

$$-\frac{ai}{2}\mathsf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\vartheta\cos\vartheta'\sin(\gamma'-\gamma)\cot\theta'=0$$

sei, was bewiesen werden sollte.

Den Theil A' nun, von welchem A aufgehoben wird, findet man auf folgende Weise. Durch die Mitte des *inducirenden* Elements α als Scheitel lege man zwei Kegelflächen, deren gemeinschaftliche Axe der Richtung der Bewegung, d. i. mit α_1, parallel sei. Diese beiden Kegelflächen sollen das *inducirte* Element α' begrenzen. Es leuchtet ein, dass wenigstens noch ein *zweites* Element $\mathfrak{a}'$ des *geschlossenen Leiters* von den nämlichen Kegelflächen begrenzt sein müsse. Und zwar muss ein Strom, welcher in α' *von der äusseren Kegelfläche zur inneren* geht, in $\mathfrak{a}'$ umgekehrt *von der inneren zur äusseren gehen.* Der Werth von θ' ist für beide Elemente gleich. Zerlegt man nun das zweite Element $\mathfrak{a}'$ eben so, wie das erste α', und bezeichnet mit $\mathfrak{a}'_2$ dasjenige Seitenelement, welches, senkrecht auf der $\mathfrak{a}'$ mit α verbindenden r', in der von r' bei der Bewegung von $\mathfrak{a}'$ erzeugten Ebene liegt, so soll der mit $\alpha_1\mathfrak{a}'_2$ proportionale Theil der Theil A' sein, durch welchen A aufgehoben wird. Es ist aber

$$A'=\mp\frac{ai}{2}\cdot\frac{\alpha_1\mathfrak{a}'_2}{r'}\cdot\cos\theta'\cot\theta',$$

und es verhalten sich $\alpha'_2:\mathfrak{a}'_2$ wie ihre Entfernungen von dem beiden Kegelflächen gemeinschaftlichen Scheitel, d. i. wie $r:r'$, folglich ist:

$$\frac{\mathfrak{a}'_2}{r'}=\frac{\alpha'_2}{r}.$$

Substituirt man diesen Werth, so ist

$$A'=\mp\frac{ai}{2}\frac{\alpha_1\alpha'_2}{r}.\cos\theta'\cot\theta',$$

und ist, abgesehen vom Vorzeichen, dem Werthe von A gleich. Aus der *entgegengesetzten Richtung*, nach welcher, wie oben angegeben worden ist, die Elemente α' und $\mathfrak{a}'$, oder α'_2 und $\mathfrak{a}'_2$, von dem nämlichen Strome durchflossen werden, lässt sich leicht erkennen, dass wenn in A, $\sin(\gamma'-\gamma)=\mp\cos\theta'$ ist, in A', $\sin(\gamma'-\gamma)=\pm\cos\theta'$ sei, dass also die Werthe von A und A' immer entgegengesetzte Vorzeichen haben; folglich heben beide einander auf.

Es kann vorkommen, dass ausser α' und $\mathfrak{a}'$ noch ein *drittes* Element des Leiters von den nämlichen Kegelflächen begrenzt wird; es muss dann aber nothwendig, wenn der Leiter *geschlossen* ist, auch noch ein *viertes* existiren, und es gilt vom dritten und vierten das nämliche wie vom ersten und zweiten u. s. w.

Auf ähnliche Weise findet man B', wodurch B aufgehoben wird, wenn man die Mitte des *inducirten* Elements α' zum Scheitel zweier Kegelflächen macht, deren gemeinschaftliche Axe der Richtung der Bewegung parallel ist, und welche das *inducirende* Element α begrenzen. Dieselben Kegelflächen begrenzen dann von dem *geschlossenen Inducenten* noch ein zweites Element, aus dessen Zerlegung sich B' ebenso ergiebt, wie vorher A' aus der Zerlegung des Elements $\mathfrak{a}'$.

Aus der wechselseitigen Aufhebung aller mit A, A', B, B' u. s. w. bezeichneten Theile geht nun hervor, dass für *geschlossene Ströme und Leiter* die Gleichung gelte:

$$-\frac{ai}{2}\mathsf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos 6\cos 6'\sin(\gamma'-\gamma)\cot\theta'=0.$$

Hieraus folgt nun *erstens*, wenn ein geschlossener Leiter mit allen seinen Theilen gleich und parallel *immer nach einerlei Richtung* bewegt wird, die *Inductionswirkung*

$$=\frac{ai}{2}\mathsf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_0}\cos\theta_0\cos\varphi_0-\frac{ai}{2}\mathsf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_1}\cos\theta_1\cos\varphi_1,$$

worin die Werthe von r, θ, φ für den Anfang der Induction mit r_0, θ_0, φ_0, für das Ende mit r_1, θ_1, φ_1 bezeichnet sind. Setzt man hierin $r_1=\infty$, d. h. wird der geschlossene Leiter von einer gegebenen Lage unendlich weit vom inducirenden Strome entfernt, so ist die gesammte dadurch hervorgebrachte Inductionswirkung,

$$=\frac{ai}{2}\mathsf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_0}\cos\theta_0\cos\varphi_0,$$

die nämliche, welche sich nach dem vorhergehenden Artikel für denselben *inducirenden* Stromleiter und für denselben *inducirten* Leiter ergiebt, wenn sie in ihrer anfänglichen gegenseitigen Lage *beharren* und der Strom i im ersteren *verschwindet*.

Zweitens, wenn ein geschlossener Leiter mit allen seinen Theilen gleich und parallel nach irgend einer bestimmten Richtung nur wenig verschoben wird, darauf nach einer etwas *veränderten* Richtung wieder ein wenig, u. s. f., und wenn die Werthe von r, θ, φ beim Anfang der Induction mit r_0, θ_0, φ_0, am Ende der ersten oder Anfang der zweiten Wegstrecke mit r_1, θ_1, φ_1, am Ende der zweiten oder Anfang der dritten Wegstrecke mit r_2, θ_2, φ_2 u. s. w. bezeichnet werden, folgt die *ganze Inductionswirkung*

$$\begin{aligned}=&+\frac{ai}{2}\mathsf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_0}\cos\theta_0\cos\varphi_0-\frac{ai}{2}\mathsf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_1}\cos\theta_1\cos\varphi_1\\&+\frac{ai}{2}\mathsf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_1}\cos\theta_1\cos\varphi_1-\frac{ai}{2}\mathsf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_2}\cos\theta_2\cos\varphi_2\\&+\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Bezeichnet man mit r_n, θ_n, φ_n die Werthe von r, θ, φ am Ende aller dieser nach einander in *verschiedenen* Richtungen ausgeführten Bewegungen, so reducirt sich der angegebene Werth der ganzen Inductionswirkung, weil alle Glieder mit Ausnahme des ersten und letzten sich aufheben, auf

$$\frac{ai}{2}\mathsf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_0}\cos\theta_0\cos\varphi_0-\frac{ai}{2}\mathsf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_n}\cos\theta_n\cos\varphi_n,$$

woraus man ersieht, wenn $r_n=\infty$ gesetzt wird, dass die *Inductionswirkung* dieselbe ist, wenn ein geschlossener Leiter von einer gegebenen Lage zu einem geschlossenen Strome durch eine beliebig *gekrümmte* Bahn, aber so, dass alle Theile sich immer parallel bleiben, unendlich weit vom inducirenden Strome entfernt wird, wie wenn das nämliche durch eine *geradlinige* Bahn geschähe,

oder wie wenn der geschlossene Leiter in seiner ursprünglichen Lage *beharrte* und der Strom i im inducirenden Leiter *verschwände*, nämlich

$$= \frac{ai}{2} \mathbf{S} \frac{\alpha\alpha'}{r_0} \cos\theta_0 \cos\varphi_0.$$

Wird *drittens* endlich der geschlossene Leiter ganz willkührlich bewegt, so lässt sich die Bewegung eines jeden seiner Elemente in irgend einem Augenblicke in eine *Drehung* um seinen Mittelpunkt und in eine parallele *Verschiebung* des ganzen Elements auflösen. Die Inductionswirkung der *Drehung* eines Elements um seinen Mittelpunkt ist $= 0$, weil r dabei unverändert bleibt, folglich $dr = 0$ ist. Die *Verschiebung* jedes Elementes lässt sich in 3 Verschiebungen nach den Richtungen von 3 Coordinatenaxen zerlegen. Für die parallelen Verschiebungen aller Elemente des geschlossenen Leiters nach *jeder* dieser Richtungen ist dann

$$\mathbf{S} \frac{\alpha\alpha'}{r} \cos 6 \cos 6' \sin(\gamma' - \gamma) \cot\theta' = 0,$$

woraus man leicht sieht, dass auch bei *willkührlicher Bewegung* des geschlossenen Leiters die *Inductionswirkung*

$$= \frac{ai}{2} \mathbf{S} \frac{\alpha\alpha'}{r_0} \cos\theta_0 \cos\varphi_0 - \frac{ai}{2} \mathbf{S} \frac{\alpha\alpha'}{r_n} \cos\theta_n \cos\varphi_n$$

folgt, worin r_0, θ_0, φ_0 und r_n, θ_n, φ_n die Werthe von r, θ, φ im Anfange und am Ende der Induction bezeichnen.

Die hier erörterte Relation zwischen der Inductionswirkung eines geschlossenen *constanten* Stroms auf einen geschlossenen *bewegten* Leiter, und zwischen der Inductionswirkung eines geschlossenen *variabelen* Stroms auf einen geschlossenen *ruhenden* Leiter ist schon von Neumann a. a. O. in grosser Allgemeinheit aufgestellt worden. Neumann bauet nämlich auf die Art. 26. angeführte *empirische* Grundlage die Folgerung, dass die gesammte Inductionswirkung, welche der Versetzung des inducirten Leiters aus einer Lage in eine andere entspricht, unabhängig von den Zwischenlagen sei, welche er durchläuft, und von der Geschwindigkeit, mit welcher er sie durchläuft, und blos von der Differenz der *Potentialwerthe* des Inducenten im Anfang und am Ende der Bahn abhänge. Nachdem Neumann diesen Satz für die Inductionswirkung *constanter* Ströme auf *bewegte* Leiter festgestellt hat, fährt er a. a. O. S. 39 fort: «Aus der Unabhängigkeit der inducirten elektromotorischen Kraft von der Bewegung an sich wird gefolgert, dass *jede Ursache*, welche eine Veränderung im Werthe des *Potentials* eines geschlossenen Stroms in Beziehung auf einen geschlossenen Leiter hervorbringt, einen Strom inducirt, dessen elektromotorische Kraft durch die *Veränderung*, welche das *Potential* erlitten hat, ausgedrückt wird.» Mit Hülfe dieses Satzes hat Neumann die Bestimmung der zweiten Art der *Volta-Induction*, nämlich die eines *variabelen* Stroms auf einen ruhenden Leiter, auf die der ersten Art, nämlich eines *constanten* Stroms auf einen *bewegten* Leiter zurückgeführt. Die oben erwähnte Relation zwischen beiden Inductionswirkungen ergiebt sich daraus von selbst. Der letzte Grund aller dieser Verhältnisse lässt sich nun nach Obigem unmittelbar

in dem *elektrischen Grundgesetze* nachweisen, nach welchem je zwei elektrische Massen aus der Ferne auf einander wirken.

30.

Allgemeines Gesetz der Volta-Induction.

Nach der Betrachtung der beiden Hauptfälle der *Volta-Induction*, wo nämlich entweder der Strom *constant*, der Leiter aber *bewegt*, oder wo der Strom *variabel*, der Leiter aber *unbewegt* war, lässt sich das allgemeine Gesetz zur Bestimmung der Wirkungen *beliebig bewegter und nach den Gesetzen des Galvanismus durchströmter* Leiter leicht entwickeln.

α und α' bezeichnen wieder die Länge zweier Elemente, von denen das erstere α *ruhend* angenommen wird. Diese Annahme beschränkt nach Art. 27. die Allgemeinheit der Betrachtung nicht, weil jede Bewegung des Elements α auf α' übertragen werden kann, indem man ihr in α' die entgegengesetzte Richtung beilegt. In diesen beiden Elementen werden, wie früher, folgende 4 elektrische Massen unterschieden:

$$+\alpha e, \quad -\alpha e, \quad +\alpha' e', \quad -\alpha' e'.$$

Die *erste* dieser Massen $+\alpha e$ bewege sich mit der Geschwindigkeit $+u$ in der Richtung des ruhenden Elements α, welche mit der von α nach α' gezogenen Geraden den Winkel θ macht. Diese Geschwindigkeit ändere sich während des Zeitelements dt um $+du$. Die *zweite* Masse $-\alpha e$ bewege sich, den für einen galvanischen Strom gegebenen Bestimmungen gemäss, in der nämlichen Richtung, mit der Geschwindigkeit $-u$, d. h. rückwärts, und diese Geschwindigkeit ändere sich während des Zeitelements dt um $-du$. Die *dritte* Masse $+\alpha' e'$ bewege sich mit der Geschwindigkeit $+u'$ in der Richtung des Elements α', welche mit der von α nach α' gezogenen und verlängerten Geraden den Winkel θ' macht. Diese Geschwindigkeit ändere sich in dem Zeitelemente dt um $+du'$. Ausserdem theile aber diese elektrische Masse die Bewegung des Elements α' selbst, welche mit der Geschwindigkeit v in einer Richtung geschieht, die mit der von α nach α' gezogenen und verlängerten Geraden den Winkel η macht, und in einer durch diese Gerade gelegten Ebene enthalten ist, welche mit der durch dieselbe Gerade parallel mit dem Elemente α gelegten Ebene den Winkel ϑ einschliesst. Die Geschwindigkeit v ändere sich während des Zeitelements dt um dv. Die *vierte* Masse $-\alpha' e'$ bewege sich, den Bestimmungen eines galvanischen Stroms gemäss, in derselben Richtung des Elements α' mit der Geschwindigkeit $-u'$, die sich in dem Zeitelement dt um $-du'$ ändert; theile aber ausserdem mit der vorigen Masse die Geschwindigkeit v des Elements α' selbst in der schon bezeichneten Richtung. Die Entfernungen der beiden ersteren Massen von den beiden letzteren sind sämmtlich, in dem betrachteten Augenblicke, der Entfernung r der beiden Elemente selbst gleich; da sie aber nicht gleich bleiben, sollen sie mit r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet werden. Legt man durch die von α nach α' gezogene Gerade zwei Ebenen.

die eine mit α, die andere mit α' parallel, so bezeiche ω den von diesen beiden Ebenen eingeschlossenen Winkel.

Man erhält dann für die *Summe* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente α' wirken, d. i. für die Kraft, welche das Element α' selbst bewegt, denselben Ausdruck wie Art. 24. nämlich:

$$-\frac{aa}{16}\cdot\frac{\alpha e\,.\,\alpha' e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Für die *Differenz* jener Kräfte aber, von welcher die *Induction* abhängt,

$$-\frac{aa}{16}\cdot\frac{\alpha e\,.\,\alpha' e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Ferner findet man, wenn man ausser den Bewegungen der elektrischen Massen in ihren Leitern auch die ihnen mit ihren Leitern gemeinschaftlichen Bewegungen in Rechnung bringt, die ersten Differentialcoëfficienten auf die Art. 22. angegebene Weise, indem man zu den dort gefundenen Werthen die nach der Richtung der Geraden r zerlegte Geschwindigkeit des Elements α', nämlich $v\cos\eta$, hinzugefügt. Man erhält dann

$$\frac{dr_1}{dt}=-u\cos\theta+u'\cos\theta'+v\cos\eta$$

$$\frac{dr_2}{dt}=+u\cos\theta-u'\cos\theta'+v\cos\eta$$

$$\frac{dr_3}{dt}=-u\cos\theta-u'\cos\theta'+v\cos\eta$$

$$\frac{dr_4}{dt}=+u\cos\theta+u'\cos\theta'+v\cos\eta.$$

Es ist also:

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)=-8uu'\cos\theta\cos\theta',$$

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)=-8uv\cos\theta\cos\eta.$$

Die zweiten Differentialcoefficienten erhält man wie Art. 22., wenn man dabei noch die Variabilität der Geschwindigkeiten u, u', v berücksichtigt, nämlich:

$$\frac{ddr_1}{dt^2}=+u\sin\theta\frac{d\theta_1}{dt}-u'\sin\theta'\frac{d\theta'_1}{dt}-v\sin\eta\frac{d\eta_1}{dt}-\cos\theta\frac{du}{dt}+\cos\theta'\frac{du'}{dt}+\cos\eta\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{ddr_2}{dt^2}=-u\sin\theta.\frac{d\theta_2}{dt}+u'\sin\theta'.\frac{d\theta'_2}{dt}-v\sin\eta\frac{d\eta_2}{dt}+\cos\theta\frac{du}{dt}-\cos\theta'\frac{du'}{dt}+\cos\eta\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{ddr_3}{dt^2}=+u\sin\theta.\frac{d\theta_3}{dt}+u'\sin\theta'.\frac{d\theta'_3}{dt}-v\sin\eta\frac{d\eta_3}{dt}-\cos\theta\frac{du}{dt}-\cos\theta'\frac{du'}{dt}+\cos\eta\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{ddr_4}{dt^2}=-u\sin\theta.\frac{d\theta_4}{dt}-u'\sin\theta'.\frac{d\theta'_4}{dt}-v\sin\eta\frac{d\eta_4}{dt}+\cos\theta\frac{du}{dt}+\cos\theta'\frac{du'}{dt}+\cos\eta\frac{dv}{dt}.$$

Es ist folglich

$$\left(\frac{ddr_1}{dt^2}+\frac{ddr_2}{dt^2}-\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)=+u\sin\theta\left(\frac{d\theta_1}{dt}-\frac{d\theta_2}{dt}-\frac{d\theta_3}{dt}+\frac{d\theta_4}{dt}\right)$$
$$-u'\sin\theta'\left(\frac{d\theta'_1}{dt}-\frac{d\theta'_2}{dt}+\frac{d\theta'_3}{dt}-\frac{d\theta'_4}{dt}\right).$$
$$-v\sin\eta\left(\frac{d\eta_1}{dt}+\frac{d\eta_2}{dt}-\frac{d\eta_3}{dt}-\frac{d\eta_4}{dt}\right)$$

und

$$\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)=+u\sin\theta\left(\frac{d\theta_1}{dt}+\frac{d\theta_2}{dt}+\frac{d\theta_3}{dt}+\frac{d\theta_4}{dt}\right)$$
$$-u'\sin\theta'\left(\frac{d\theta'_1}{dt}+\frac{d\theta'_2}{dt}-\frac{d\theta'_3}{dt}-\frac{d\theta'_4}{dt}\right)$$
$$-v\sin\eta\left(\frac{d\eta_1}{dt}-\frac{d\eta_2}{dt}+\frac{d\eta_3}{dt}-\frac{d\eta_4}{dt}\right)$$
$$-4\cos\theta\,.\,\frac{du}{dt}\,.$$

Zur Bestimmung der Differentialcoefficienten $\frac{d\theta_1}{dt}$, $\frac{d\theta'_1}{dt}$, $\frac{d\eta_1}{dt}$ u. s. w. verfahre man nun wie S. 121 ff. oder wie in der Note S. 124. Es ergiebt sich nämlich die Aenderung der Richtung der Geraden r_1

in der Ebene des Winkels $\theta = +\frac{udt}{r_1}\,.\sin\theta$

in der Ebene des Winkels $\theta' = -\frac{u'dt}{r_1}\,.\sin\theta'$

in der Ebene des Winkels $\eta = -\frac{vdt}{r_1}\,.\sin\eta$.

Zieht man nun mit der Linie r_1 und mit den Richtungen der Geschwindigkeit u, u' und v Parallellinien durch den Mittelpunkt einer Kugel, welche die Oberfläche Fig. 21. in R, U, U' und V schneiden, und verbindet R mit U, U' und

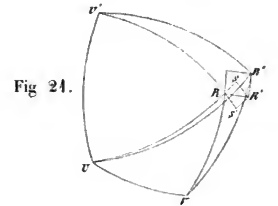


Fig 21.

V durch grösste Kreisbögen; so bildet die Ebene, welche den Bogen $UR = \theta$ enthält, mit der Ebene des Bogens $U'R = \theta'$ den mit ω bezeichneten Winkel, mit der Ebene des Bogens $VR = \eta$ den mit ε bezeichneten Winkel.

Man verlängere den Kreisbogen UR nach S, $U'R$ nach S' und VR nach T und mache

$$RS = + \frac{u\,dt}{r_1}\sin\theta, \quad RS' = -\frac{u'dt}{r_1}\sin\theta', \quad RT = -\frac{v\,dt}{r_1}\sin\eta.$$

Das Element der Kugeloberfläche, worin R, S, S' und T liegen, kann nun, wie S. 123, als ein Element der die Kugel bei R berührenden Ebene, und die Bogenelemente RS, RS' und RT als gerade Linien in dieser Ebene betrachtet werden. Vollendet man in dieser Ebene das Parallelogramm $RSR'S'$, zieht die Diagonale RR' und vollendet das zweite Parallelogramm $RR'R''T$; so geht eine durch den Mittelpunkt gezogene Parallellinie mit der Geraden r_1, welche die beiden *positiven* Massen $+\alpha e$ und $+\alpha'e'$ am Ende des Zeitelements dt verbindet, durch den Punkt R''.

Verbindet man endlich R'' mit U, U' und V durch grösste Kreisbögen, so ist

$$\begin{aligned} UR'' &= \theta + d\theta_1 = UR + d\theta_1 \\ U'R'' &= \theta' + d\theta'_1 = U'R + d\theta'_1 \\ VR'' &= \eta + d\eta' = VR + d\eta_1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} d\theta_1 &= UR' - UR = RS + RS'\cos\omega + RT\cos\vartheta \\ d\theta'_1 &= U'R' - U'R = RS' + RS\cos\omega + RT\cos(\omega+\vartheta) \\ d\eta_1 &= VR'' - VR = RT + RS\cos\vartheta + RS'\cos(\omega+\vartheta). \end{aligned}$$

Substituirt man hierin die oben angegebenen Werthe von RS, RS' und RT, so erhält man:

$$\begin{aligned} r_1\frac{d\theta_1}{dt} &= + u\sin\theta - u'\sin\theta'\cos\omega - v\sin\eta\cos\vartheta \\ r_1\frac{d\theta'_1}{dt} &= - u'\sin\theta' + u\sin\theta\cos\omega - v\sin\eta\cos(\omega+\vartheta) \\ r_1\frac{d\eta_1}{dt} &= - v\sin\eta + u\sin\theta\cos\vartheta - u'\sin\theta'\cos(\omega+\vartheta). \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich für die beiden *negativen* Massen $-\alpha e$ und $-\alpha'e'$:

$$\begin{aligned} r_2\frac{d\theta_2}{dt} &= - u\sin\theta + u'\sin\theta'\cos\omega - v\sin\eta\cos\vartheta \\ r_2\frac{d\theta'_2}{dt} &= + u'\sin\theta' - u\sin\theta\cos\omega - v\sin\eta\cos(\omega+\vartheta) \\ r_2\frac{d\eta_2}{dt} &= - v\sin\eta - u\sin\theta\cos\vartheta + u'\sin\theta'\cos(\omega+\vartheta); \end{aligned}$$

ferner für die *positive* $+\alpha e$ und für die *negative* $-\alpha'e'$:

$$\begin{aligned} r_3\frac{d\theta_3}{dt} &= + u\sin\theta + u'\sin\theta'\cos\omega - v\sin\eta\cos\vartheta \\ r_3\frac{d\theta'_3}{dt} &= + u'\sin\theta' + u\sin\theta\cos\omega - v\sin\eta\cos(\omega+\vartheta) \\ r_3\frac{d\eta_3}{dt} &= - v\sin\eta + u\sin\theta\cos\vartheta + u'\sin\theta'\cos(\omega+\vartheta); \end{aligned}$$

endlich für die *negative* $-\alpha e$ und für die *positive* $+\alpha' e'$:

$$r_4 \frac{d\theta_4}{dt} = -u \sin\theta - u' \sin\theta' \cos\omega - v \sin\eta \cos\vartheta$$

$$r_4 \frac{d\theta'_4}{dt} = -u' \sin\theta' - u \sin\theta \cos\omega - v \sin\eta \cos(\omega + \vartheta)$$

$$r_4 \frac{d\eta_4}{dt} = -v \sin\eta - u \sin\theta \cos\vartheta - u' \sin\theta' \cos(\omega + \vartheta).$$

Da nun für den betrachteten Augenblick $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r$ ist, so erhält man hieraus:

$$r\left(\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} - \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right) = -4u' \sin\theta' \cos\omega$$

$$r\left(\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right) = -4v \sin\eta \cos\vartheta;$$

ferner:

$$r\left(\frac{d\theta'_1}{dt} - \frac{d\theta'_2}{dt} + \frac{d\theta'_3}{dt} - \frac{d\theta'_4}{dt}\right) = +4u \sin\theta \cos\omega$$

$$r\left(\frac{d\theta'_1}{dt} + \frac{d\theta'_2}{dt} - \frac{d\theta'_3}{dt} - \frac{d\theta'_4}{dt}\right) = 0,$$

endlich:

$$r\left(\frac{d\eta_1}{dt} + \frac{d\eta_2}{dt} - \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt}\right) = 0$$

$$r\left(\frac{d\eta_1}{dt} - \frac{d\eta_2}{dt} + \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt}\right) = +4u \sin\theta \cos\vartheta.$$

Substituirt man diese Werthe in den oben angegebenen Aggregaten der zweiten Differentialcoefficienten, so erhält man

$$r\left(\frac{ddr_1}{dt^2} + \frac{ddr_2}{dt^2} - \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2}\right) = -8uu' \sin\theta \sin\theta' \cos\omega$$

$$r\left(\frac{ddr_1}{dt^2} - \frac{ddr_2}{dt^2} + \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2}\right) = -8uv \sin\theta \sin\eta \cos\vartheta - 4r \cos\theta . \frac{du}{dt}.$$

Mit diesen Werthen endlich ergiebt sich die *Summe* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente α' wirken,

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr} . aeu . ae'u' (\sin\theta \sin\theta' \cos\omega - \tfrac{1}{2} \cos\theta \cos\theta'),$$

d. h. die auf das ponderabele Element α' wirkende elektrodynamische Kraft wird bei bewegten Leitern und veränderlichen Stromintensitäten ebenso wie bei ruhenden Leitern und constanten Stromintensitäten bestimmt, und das Ampère'sche Gesetz findet in Beziehung auf diese Kräfte für gegebene Lage der Stromelemente und gegebene Stromintensitäten allgemeine Anwendung. Nur erfordert die Anwendung dieses Gesetzes, dass die Stromintensitäten *für jeden einzelnen Augenblick* gegeben seien, mit Einschluss des in Folge der *Induction* hinzugekommenen Theiles.

Ebenso ergiebt sich die *Differenz* der Kräfte, welche auf die *positive* und *negative* Elektricität im Elemente α' wirken,

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr} . aeu . ae'v (\sin\theta \sin\eta \cos\vartheta - \tfrac{1}{2} \cos\theta \cos\eta) - \tfrac{1}{2} \frac{\alpha\alpha'}{r} aaee' . \cos\theta . \frac{du}{dt},$$

oder, da nach S. 115 $aeu = i$, und, weil u veränderlich, $ae.du = di$ ist,

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{rr} i(\sin\theta\sin\eta\cos\varkappa - \tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\eta).ae'v - \tfrac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}ae'.\cos\theta.\frac{di}{dt}.$$

Die hierdurch bestimmte Kraft sucht nun die *positive* und *negative* Elektricität im inducirten Elemente α' nach der Richtung der Geraden r zu scheiden. In dieser Richtung kann die Scheidung nicht erfolgen, sondern nur in der Richtung des inducirten Elements α' selbst, die mit der verlängerten Geraden r den Winkel θ' macht. Zerlegt man also jene ganze Kraft nach dieser Richtung, d. h. multiplicirt man obigen Werth mit $\cos\theta'$, so erhält man die Kraft, welche die wirkliche Scheidung bewirkt,

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{rr} i(\sin\theta\sin\eta\cos\varkappa - \tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\eta).ae'v\cos\theta' - \tfrac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}ae'.\cos\theta\cos\theta'.\frac{di}{dt}.$$

Dividirt man diesen Werth mit e', so ergiebt sich die vom inducirenden Elemente α auf das inducirte Element α' ausgeübte *elektromotorische* Kraft im gewöhnlichen Sinne (siehe Art. 24. S. 131)

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{rr} i(\sin\theta\sin\eta\cos\varkappa - \tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\eta).av\cos\theta' - \tfrac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}a\cos\theta\cos\theta'\frac{di}{dt}.$$

Setzt man hierin die Aenderung der Stromintensität

$$\frac{di}{dt} = 0,$$

so findet man dasselbe Gesetz wieder, welches Art. 24. für die Induction eines *constanten* Stromelements auf das *bewegte* Element eines Leiters gefunden worden ist, die *elektromotorische* Kraft ist dann nämlich

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{rr} i(\sin\theta\sin\eta\cos\varkappa - \tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\eta).av\cos\theta',$$

worin dieselben Winkel, welche Art. 24. mit θ', ω, φ bezeichnet wurden, η, $\varkappa$ und θ' benannt sind, und die Geschwindigkeit, welche dort u' hiess, mit v bezeichnet ist.

Setzt man dagegen in dem allgemeinen Werthe

$$v = 0,$$

so erhält man das nämliche Gesetz, welches Art. 28. für die Induction eines *variabelen* Stromelements auf das *ruhende* Element eines Leiters gefunden worden ist, die *elektromotorische* Kraft ist dann nämlich

$$= -\tfrac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}a\cos\theta\cos\theta'.\frac{di}{dt}.$$

Die elektromotorische Kraft eines *variabelen* Stromelements auf das *bewegte* Element eines Leiters ist also die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche statt finden würden 1) wenn das Element des Leiters in dem betrachteten Augenblicke *nicht bewegt* würde, 2) wenn das Element des Leiters zwar bewegt würde, aber die *Stromintensität* des inducirenden Elements in dem betrachteten Augenblicke sich *nicht änderte*.

Es würde hiermit das allgemeine Gesetz zur Bestimmung der Wirkungen *beliebig bewegter, und nach den Gesetzen des Galvanismus durchströmter* Leiter vollständig gegeben sein, wenn angenommen werden dürfte, dass alle unter dem Namen *galvanischer Ströme* begriffenen elektrischen Bewegungen in linearen Leitern den S. 100. 103 gegebenen Bestimmungen wirklich genau entsprächen. Wenn aber auch nicht bezweifelt werden sollte, dass alle *galvanischen Ströme* jenen Bestimmungen nahe kommen, so lassen sich doch, bei der grossen Verschiedenheit der *Quellen des Galvanismus*, kleinere Abweichungen mit Recht erwarten. Diese Abweichungen und ihr Einfluss auf die *elektrodynamischen Maassbestimmungen* sollen hier noch erörtert werden.

Nach den S. 100. 103 gegebenen Bestimmungen soll in jedem Stromelemente *gleich viel* positive und negative Elektricität enthalten sein, und beide sollen mit *gleicher Geschwindigkeit*, aber in entgegengesetztem Sinne, das Element durchströmen. Bestände ein *constanter* Strom aus lauter solchen Elementen, deren gegenseitige Lage unverändert bliebe, so würden dieselben wechselseitig auf einander gar keine *elektromotorischen* Kräfte ausüben. Siehe Art. 24. S. 129. Die *elektromotorischen* Kräfte, welche die Widerstände der einzelnen Elemente überwänden, und dadurch nach S. 101 die Fortdauer des Stromes in allen Elementen gleichzeitig bewirkten, müssten dann *unabhängig von den Stromelementen* existiren, und auf alle Stromelemente nach Proportion ihrer Widerstände vertheilt sein, wenn die gleichmässige Fortdauer der Strömung in allen Elementen bestehen soll.

Nach Beschaffenheit der *Quellen des Galvanismus*, von welchen die *ursprünglichen*, von der Wechselwirkung der Stromelemente selbst unabhängigen, *elektromotorischen* Kräfte herrühren, wird bald jenes gleiche Verhältniss zwischen den Kräften und den von ihnen zu überwindenden Widerständen in allen Elementen des Leiters statt finden, bald nicht. Es diene für den ersteren Fall als Beispiel ein homogener Leiter von der Form eines Kreises, in welchem ein galvanischer Strom dadurch inducirt wird, dass ein Magnet in der durch den Mittelpunkt des Kreises gehenden Normale auf die Kreisebene bewegt wird. In diesem Falle wird durch *Magneto-Induction* eine auf alle Kreiselemente gleichmässig wirkende *elektromotorische* Kraft gewonnen, und da der *Widerstand*, bei der Homogeneität des kreisförmigen Leiters, für alle Elemente ebenfalls gleich ist, so sind hierdurch die Bedingungen für das gleichmässige Bestehen des Stroms in allen Theilen erfüllt. Es kommt aber ein solcher Fall der Natur der Sache nach selten vor; in der Regel wird kein gleiches Verhältniss der *ursprünglichen* elektromotorischen Kräfte mit den *Widerständen* in allen Elementen statt finden, und die Ungleichheiten müssen dann durch *Wechselwirkung* der Elemente ausgeglichen werden. Soll nun eine solche in elektromotorischen Kräften bestehende Wechselwirkung der Elemente eines constanten Stroms nicht ausgeschlossen sein, so muss die Definition galvanischer Ströme erweitert werden.

Unter einem *galvanischen Strome*, im Gegensatze zu anderen unter diesem Namen nicht mit begriffenen elektrischen Bewegungen, sei eine solche Bewegung der Elektricität in einem geschlossenen Leiter zu verstehen, dass alle Querschnitte des letzteren gleichzeitig von gleichen Mengen positiver und ne-

gativer Elektricität in entgegengesetztem Sinne durchflossen werden. Diese Gleichheit der *durchfliessenden* positiven und negativen Massen setzt nicht nothwendig die Gleichheit der *strömenden* positiven und negativen Massen voraus, die bisher angenommen wurde, sondern kann auch bei ungleicher Grösse der letzteren bestehen, wenn die *grössere* Masse *langsamer*, die *kleinere schneller* fliesst. Bei einem galvanischen Strome der letzteren Art entspringen aus der Wechselwirkung der Elemente *neue* elektromotorische Kräfte, von welchen die ungleichen Verhältnisse der *ursprünglichen* elektromotorischen Kräfte zu den Widerständen ausgeglichen werden können. Denn sobald die *positive* Elektricitätsmenge der *negativen* in einem Elemente nicht gleich ist, d. h. sobald das Element, in Folge eines Ueberschusses an einer Elektricität, mit *freier Elektricität* geladen ist, wird diese *freie Elektricität* selbst, *nach den Gesetzen der Elektricitätserregung durch Vertheilung*, zu einer Quelle *elektromotorischer* Kräfte für alle anderen Elemente, welche durch Verstärkung jener Ladung so gesteigert werden können, dass sie, den *ursprünglichen* elektromotorischen Kräften hinzugefügt, in allen Elementen den Widerständen proportional werden, wozu in den bekannten galvanischen Ketten ein sehr geringer Grad elektrischer Ladung genügt.

Die Untersuchung, wie diese Ladung der einzelnen Elemente in einer geschlossenen galvanischen Kette durch anfängliche Ungleichheit der Strömung in den verschiedenen Theilen der Kette von selbst *entsteht* und so lange wächst, bis der angegebenen Bedingung eines in allen Theilen gleichmässigen Stromes genügt wird, führt zu der *inneren Mechanik der galvanischen Kette* und gehört nicht in das Bereich dieser Abhandlung, weil dabei die Wirkung elektrischer Massen auf *benachbarte* Massen in Rechnung gezogen werden muss, während hier blos die *in der Ferne* ausgeübten Wirkungen betrachtet werden sollen. Unabhängig von der Untersuchung der Entstehung dieser Ladungen, und der daraus sich ergebenden Gesetze ihrer Stärke und Vertheilung, soll hier nur der Einfluss erörtert werden, welchen sie, *wenn sie vorhanden sind*, auf die *elektrodynamischen Maassbestimmungen* haben. Die Erörterungen dieses Einflusses ist darum wichtig, weil das Vorhandensein solcher Ladungen als Regel anzusehen ist, von welcher nur selten Ausnahmen vorkommen. Ist dieser Einfluss auch gering, wie daraus hervorgeht, dass, auch ohne auf ihn Rücksicht zu nehmen, die Rechnung mit der Erfahrung in den meisten Fällen übereinstimmt, so kann doch die Kenntniss davon, worin dieser Einfluss bestehe und wie er merklich werden könne, von Nutzen sein.

Man denke sich unter den S. 154 angegebenen Verhältnissen die *positive* Masse $+\alpha e$ in dem Elemente α um $m\alpha e$ vermehrt, wo m einen kleinen Bruch bezeichne, zugleich denke man sich aber die Geschwindigkeit dieser Masse $+u$ um die kleine Grösse $+mu$ vermindert; ebenso denke man sich die *positive* Masse $+\alpha'e'$ um $n\alpha'e'$ vermehrt, ihre Geschwindigkeit $+u'$ um nu' vermindert. Es sollen die auf beide elektrischen Massen im Elemente α' wirkenden Kräfte bestimmt werden, welche durch diese Veränderungen hinzukommen.

Die beiden Kräfte, welche die *positive* Masse $+\alpha e$ in dem Elemente α auf die *positive* und *negative* Masse $+\alpha'e'$ und $-\alpha'e'$ im Elemente α' ausübte, waren

$$+\frac{\alpha e\,.\,\alpha' e'}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{\mathrm{d}r_1^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{aa}{8}r\frac{\mathrm{dd}r_1}{\mathrm{d}t^2}\right)$$
$$-\frac{\alpha e\,.\,\alpha' e'}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{\mathrm{d}r_3^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{aa}{8}r\frac{\mathrm{dd}r_3}{\mathrm{d}t^2}\right),$$

worin nach S. 155 zu setzen ist:

$$\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}=-u\cos\theta+u'\cos\theta'+v\cos\eta$$
$$\frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}t}=-u\cos\theta-u'\cos\theta'+v\cos\eta,$$

und nach S. 155 und 157:

$$r\frac{\mathrm{dd}r_1}{\mathrm{d}t^2}=+uu\sin\theta^2+u'u'\sin\theta'^2+vv\sin\eta^2$$
$$-2(uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega+uv\sin\theta\sin\eta\cos\varepsilon-u'v\sin\theta'\sin\eta\cos(\omega+\varepsilon))$$
$$-r\left(\cos\theta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-\cos\theta'\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t}-\cos\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$r\frac{\mathrm{dd}r_3}{\mathrm{d}t^2}=+uu\sin\theta^2+u'u'\sin\theta'^2+vv\sin\eta^2$$
$$+2(uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega-uv\sin\theta\sin\eta\cos\varepsilon-u'v\sin\theta'\sin\eta\cos(\omega+\varepsilon))$$
$$-r\left(\cos\theta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\cos\theta'\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t}-\cos\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right).$$

Die *Differenz* obiger beiden Kräfte, von welcher die *elektromotorische* Kraft abhängt, kann

$$=2\frac{\alpha e\,.\,\alpha' e'}{rr}$$

gesetzt werden, weil die übrigen Glieder gegen dieses erste sehr klein sind. Setzt man hierin nun $(1+m)e$ statt e, multiplicirt mit $\frac{\cos\theta'}{e'}$, und zieht den ursprünglichen mit $\frac{\cos\theta'}{e'}$ multiplicirten Werth ab, so erhält man nach S. 131. 159 die durch Ladung des Elements α mit freier Elektricität hinzukommende, auf das Element α' wirkende, *elektromotorische* Kraft

$$=2m\frac{\alpha\alpha'}{rr}e\cos\theta'.$$

Durch Ladung des Elements α' selbst, auf welches gewirkt wird, ändert sich die elektromotorische Kraft nicht; denn setzt man in obiger Differenz $(1+n)e'$ statt e', multiplicirt mit $\frac{\cos\theta'}{(1+n)e'}$, und zieht den ursprünglichen mit $\frac{\cos\theta'}{e'}$ multiplicirten Werth ab, so bleibt kein Rest.

Die *Summe* obiger beiden Kräfte, von welcher die auf den ponderabeln Träger wirkende *elektrodynamische* Kraft abhängt, erhält man durch Substitution der angeführten Werthe

$$=-\tfrac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{rr}\,ae\,.\,ae'\left[\begin{array}{l}uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega-u'v\sin\theta\sin\eta\cos(\omega+\varepsilon)\\-\tfrac{1}{2}uu'\cos\theta\cos\theta'+\tfrac{1}{2}u'v\cos\theta'\cos\eta-\tfrac{1}{4}r\cos\theta'.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\end{array}\right].$$

Hieraus erhält man 1) den durch Vermehrung der Masse $+\alpha e$ hinzukommen-

den Theil der Kraft, mit welcher die Elemente α und α' einander abstossen, wenn man $(1+m)e$ statt e setzt, und den ursprünglichen Werth abzieht,

$$= -\frac{m}{2}\frac{\alpha\alpha'}{rr}.ae.ae'\left[\begin{array}{l} uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega - u'v\sin\theta'\sin\eta\cos(\omega+\vartheta) \\ -\frac{1}{2}uu'\cos\theta\cos\theta' + u'v\cos\theta'\cos\eta - \frac{1}{4}r\cos\theta'\frac{du}{dt}\end{array}\right];$$

2) den durch Verminderung der Geschwindigkeit $+u$ hinzukommenden Theil der Kraft, wenn man $(1-m)u$ statt u setzt, und den ursprünglichen Werth abzieht,

$$= +\frac{m}{2}\frac{\alpha\alpha'}{rr}.ae.ae'\,[uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega - \tfrac{1}{2}uu'\cos\theta\cos\theta];$$

3) den durch Vermehrung der Masse $+\alpha'e'$ hinzukommenden Theile der Kraft, wenn man $(1+n)e'$ statt e' setzt, und den ursprünglichen Werth abzieht,

$$= -\frac{n}{2}\frac{\alpha\alpha'}{rr}.ae.ae'\left[\begin{array}{l} uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega - u'v\sin\theta'\sin\eta\cos(\omega+\vartheta) \\ -\frac{1}{2}uu'\cos\theta\cos\theta' + \frac{1}{2}u'v\cos\theta'\cos\eta - \frac{1}{4}r\cos\theta'\frac{du'}{dt}\end{array}\right];$$

4) den durch Verminderung der Geschwindigkeit $+u'$ hinzukommenden Theil der Kraft, wenn man $(1-n)u'$ statt u' setzt, und den ursprünglichen Werth abzieht,

$$= +\frac{n}{2}\frac{\alpha\alpha'}{rr}.ae.ae'\left[\begin{array}{l} uu'\sin\theta\sin\theta'\cos\omega - u'v\sin\theta'\sin\eta'\cos(\omega+\vartheta) \\ -\frac{1}{2}uu'\cos\theta\cos\theta' + \frac{1}{2}u'v\cos\theta'\cos\eta\end{array}\right].$$

Fügt man alle diese hinzukommenden Theile zusammen, so erhält man den Einfluss, welchen die Ladung der Elemente α und α' mit freier *positiver* (wenn m und n positive Werthe haben), oder *negativer* (wenn m und n negative Werthe haben) Elektricität auf die *elektrodynamische* Abstossungskraft, welche α auf α' ausübt, hat; es ist nämlich die daraus hervorgehende Vergrösserung dieser Abstossungskraft, wenn man

$$aev = \varkappa, \quad ae'u' = i' \text{ und } ae'du' = di' \text{ setzt,}$$

$$= +\frac{m}{2}\frac{\alpha\alpha'}{rr}\varkappa i'(\sin\theta'\sin\eta\cos(\omega+\vartheta) - \tfrac{1}{2}\cos\theta'\cos\eta) + \frac{m+n}{8}\frac{\alpha\alpha'}{r}ae\cos\theta'.\frac{di'}{dt}.$$

Dieser Einfluss verschwindet also gänzlich, wenn man die Wirkung auf ein *ruhendes constantes* Stromelement betrachtet, für welches $v = 0$ und $di' = 0$ ist. Ferner verschwindet dieser Einfluss auch bei einem *bewegten constanten* Stromelemente α', wenn das darauf wirkende Element α keine freie Elektricität besitzt, weil dann $m = 0$ und $di' = 0$ ist. Es besteht endlich, wenn im Elemente α freie Elektricität vorhanden ist, jener Einfluss in einer Kraft, welche derjenigen gleich ist, welche auf das Stromelement α' von einem anderen an der Stelle von α befindlichen Stromelemente ausgeübt werden würde, wenn die in demselben enthaltenen Massen $+\frac{1}{2}m\alpha e$ und $-\frac{1}{2}m\alpha e$ mit den Geschwindigkeiten $-v$ und $+v$ in der Richtung strömten, nach welcher das Stromelement α' mit der Geschwindigkeit $+v$ bewegt wird. Die Nothwendig-

keit dieses Einflusses liess sich auch nach Fechner's Ansicht Art. 26. S. 139 einsehen. Hierzu kommt noch endlich für den Fall, dass die Stromintensität i' in dem Stromelemente α', auf welches gewirkt wird, sich ändert, ein mit dieser Aenderung di', und mit der Summe der in beiden Elementen α und α' vorhandenen freien Elektricitäten proportionaler Einfluss, welchen der letztere Theil der Formel bestimmt.

31.

Nach den im 19. Artikel von galvanischen Strömen gegebenen Bestimmungen, welche der Betrachtung über das elektrische Gesetz zweier aus der Ferne auf einander wirkender Massen zum Grunde gelegt worden sind, ist an die Stelle des *wirklichen* Stroms, in welchem die Geschwindigkeit der strömenden Elektricität beim Uebergange von einem ponderabelen Theilchen zum andern wahrscheinlich einem *stetigen Wechsel* unterworfen ist, ein *idealer* Strom von *gleichförmiger* Geschwindigkeit gesetzt worden. Diese Substitution war zur Vereinfachung der Betrachtung nöthig und schien gestattet zu sein, weil es sich blos um Wirkungen *in der Ferne* handelte. Es lässt sich nun diese im Anfange gemachte Voraussetzung an dem elektrischen Gesetze, zu dem wir gelangt sind, prüfen.

Es seien zwei elektrische Massen e und e' gegeben, welche am Ende der Zeit t in der Entfernung r von einander sich befinden. Ihre relative Geschwindigkeit sei bis zu diesem Augenblicke constant $= \gamma$ gewesen. Die Abstossungskraft beider Massen war also in dem letzten Zeitelemente des angegebenen Zeitraums t, dem elektrischen Grundgesetze gemäss,

$$\frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{aa}{16}\gamma\gamma\right).$$

In dem folgenden Zeitelemente ε trete eine Beschleunigung

$$\frac{ddr}{dt} = \alpha$$

ein, wodurch die Abstossungskraft für die Dauer dieses Zeitelements

$$= \frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{aa}{16}\gamma\gamma\right) + \frac{aa}{8} \cdot \frac{ee'}{r}\,\alpha$$

wird. Multiplicirt man nun den Zuwachs an Kraft, der in diesem Zeitelemente im Vergleich mit dem vorhergehenden statt findet, mit diesem Zeitelemente ε selbst, so erhält man den Betrag, um welchen die Abstossungswirkung auf dem Wege dr, um welchen die Massen e und e' in dem Zeitelemente ε sich weiter von einander entfernt haben, durch jene Beschleunigung vermehrt worden ist,

$$= \frac{aa}{8} \cdot \frac{ee'}{r} \cdot \alpha\varepsilon.$$

Die relative Geschwindigkeit beider Massen, welche vor dem Zeitelemente ε $= \gamma$ gewesen war, ist nach demselben

$$=\gamma+\alpha\varepsilon$$

geworden. Bleibt nun diese unverändert, so ist die Abstossungskraft beider Massen, wenn sie zur Entfernung ϱ gelangt sind,

$$=\frac{ee'}{\rho\rho}\left(1-\frac{aa}{16}(\gamma+\alpha\varepsilon)^2\right)$$

wofür, wenn $\alpha\varepsilon$ gegen γ sehr klein ist,

$$=\frac{ee'}{\rho\rho}\left(1-\frac{aa}{16}\gamma\gamma-\frac{aa}{8}\alpha\gamma\varepsilon\right)$$

gesetzt werden kann. Multiplicirt man diesen Ausdruck mit der Zeit

$$\frac{d\rho}{\gamma+\alpha\varepsilon},$$

in welcher beide Massen um das Wegelement $d\varrho$ sich von einander entfernen, und integrirt zwischen den Grenzen $\varrho=r$ bis $\varrho=r_1$, so erhält man die Abstossungswirkung beider Massen auf dem Wege r_1-r,

$$=\frac{ee'}{\gamma+\alpha\varepsilon}\left(1-\frac{aa}{16}\gamma\gamma-\frac{aa}{8}\alpha\gamma\varepsilon\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right).$$

Tritt endlich in dem Augenblicke, wo die beiden Massen in der Entfernug r_1 von einander sich befinden, eine Verlangsamung

$$\frac{ddr}{dt^2}=-\alpha$$

ein, welche eben so wie die frühere Beschleunigung blos während eines Zeitelements $=\varepsilon$ dauert, so wird die relative Geschwindigkeit beider Massen dadurch wieder auf ihren ursprünglichen Werth

$$=\gamma$$

gebracht, und auf dem in diesem Zeitelemente ε zurückgelegten Wege tritt eine Verminderung der Abstossungswirkung

$$=-\frac{aa}{8}\cdot\frac{ee'}{r_1}\cdot\alpha\varepsilon$$

ein. Man erhält hieraus die Totalsumme der Abstossungswirkung für den ganzen Weg r_1-r mit Einschluss der beiden Zeitelemente ε, in denen die Beschleunigung und Verlangsamung statt fand,

$$=+\frac{aa}{8}\frac{ee'}{r}\alpha\varepsilon+\frac{ee'}{\gamma+\alpha\varepsilon}\left(1-\frac{aa}{16}\gamma\gamma-\frac{aa}{8}\alpha\gamma\varepsilon\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)-\frac{aa}{8}\cdot\frac{ee'}{r_1}\alpha\varepsilon,$$

oder, wenn $\alpha\varepsilon$ gegen γ sehr klein ist,

$$=\frac{ee'}{\gamma+\alpha\varepsilon}\left(1-\frac{aa}{16}\gamma\gamma\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right).$$

Die Zeit, für welche diese Totalsumme gilt, ist aber

$$=\frac{r_1-r}{\gamma+\alpha\varepsilon}.$$

Dividirt man jene Summe mit dieser Zeit, so erhält man die mittlere Abstossungskraft während dieser Zeit

$$=\frac{ee'}{rr_1}\left(1-\frac{aa}{16}\gamma\gamma\right),$$

d. i. den nämlichen Werth, wie wenn der Weg r_1-r mit der ursprünglichen Geschwindigkeit γ zurückgelegt worden wäre. Es folgt also hieraus, dass wenn die relative Geschwindigkeit zweier elektrischen Massen in zwei verschiedenen Entfernungen, in welche sie successive kommen, die nämliche ist, ihre mittlere Abstossungskraft für die Zwischenzeit derjenigen mittleren Abstossungskraft gleich ist, welche ihnen zugekommen sein würde, wenn sie mit der anfänglichen relativen Geschwindigkeit von der ersteren Entfernung zur letzteren übergegangen wären.

Von diesem Satze lässt sich nun eine Anwendung zur Prüfung obiger Voraussetzung machen. Denn wenn ein Elektricitätstheilchen in einem galvanischen Strome von einem ponderabelen Molecule zum anderen übergeht, so wird es vor und hinter dem Molecüle in Lagen kommen, wo seine Geschwindigkeit gegen ein anderes einem anderen Strome angehörige Elektricitätstheilchen dieselbe ist. Die mittlere Abstossungskraft beider Theilchen für die Dauer des Uebergangs des ersten Theilchens aus der einen Lage in die andere, ist dann also die nämliche, wie wenn beide Theilchen mit ihrer anfänglichen relativen Geschwindigkeit den Zwischenraum gleichförmig durchlaufen hätten, d. h. wie wenn kein Wechsel in der Geschwindigkeit der strömenden Elektricität beim Uebergange von einem Molecüle des ponderabelen Leiters zum andern statt fände.

Ausser dem Geschwindigkeitswechsel der Elektricitätstheilchen beim Uebergange von einem Molecüle des ponderabelen Leiters zum andern, kommt auch noch der Richtungswechsel ihrer Bewegung in Betracht, wodurch die sich begegnenden Theilchen einander ausweichen. Man sieht aber leicht, dass hierdurch bei messbaren Entfernungen der betrachteten Stromelemente keine in Betracht kommenden Variationen der Entfernungen hervorgebracht werden, dass folglich nur die durch diese Richtungsänderungen bedingten periodischen Variationen der relativen Geschwindigkeit übrig bleiben, die schon im Vorhergehenden mit eingeschlossen sind.

Es leuchtet hieraus ein, dass statt eines Stroms, in welchem die Geschwindigkeit und Richtung der strömenden Elektricität einem periodischen Wechsel unterworfen sind, mit Recht ein *gleichförmiger* Strom gesetzt werden könne, wie es Art. 19. geschehen ist.

Auch ist es gestattet, statt eines geraden Stromelements ein gekrümmtes zu setzen, wenn nur Anfangs- und Endpunkt unverändert bleiben, und dazwischen keine wahrnehmbare Entfernung von der geradlinigen Verbindungslinie statt findet. Endlich können auch, wie Art. 29. geschehen ist, für ein Element 3 Elemente gesetzt werden, welche sich zu jenem verhalten, wie die Kanten eines Parallelopipedums zur Diagonale.

32.

Das gefundene elektrische Grundgesetz lässt sich auf verschiedene Weise aussprechen, was an einigen Beispielen erläutert werden soll.

1) Weil die Entfernung r eine stets positive Grösse ist, so kann man dafür $\varrho\varrho$ schreiben. Es ergiebt sich dann

$$\mathrm{d}r = 2\varrho\mathrm{d}\varrho, \quad \mathrm{dd}r = 2\varrho\mathrm{dd}\varrho + 2\mathrm{d}\varrho^2,$$

folglich ist:

$$r = \varrho\varrho, \quad \frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2} = 4\varrho\varrho\frac{\mathrm{d}\varrho^2}{\mathrm{d}t^2}, \quad \frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2} = 2\varrho\frac{\mathrm{dd}\varrho}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}\varrho^2}{\mathrm{d}t^2}.$$

Substituirt man diese Werthe in der Formel $\frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{aa}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{aa}{8}r\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}\right)$, so erhält man folgende *kürzere* Formel:

$$\frac{ee'}{\varrho^4}\left(1 + \frac{aa}{4}\varrho^3\frac{\mathrm{dd}\varrho}{\mathrm{d}t^2}\right).$$

2) Man verstehe unter *reducirter relativer Geschwindigkeit* der Massen e und e' diejenige relative Geschwindigkeit, welche diese Massen, denen am Ende der Zeit t die Entfernung r, die relative Geschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, und die relative Beschleunigung $\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}$ zukommt, *wenn die letztgenannte constant wäre*, in dem Augenblicke $(t - \theta)$ besitzen würden, in welchem beide, dieser Voraussetzung gemäss, in einem Punkte zusammen träfen. Bezeichnet nun v diese *reducirte relative Geschwindigkeit*, so ist nach den bekannten Gesetzen der *gleichförmig beschleunigten* Bewegung:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} - v = \frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}.\theta$$

$$r = v\theta + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}.\theta\theta.$$

Durch Elimination von θ ergiebt sich aus diesen beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{2}vv = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2} - r\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}.$$

Substituirt man diesen Werth in der Formel $\frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{aa}{16}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{aa}{8}r\frac{\mathrm{dd}r}{\mathrm{d}t^2}\right)$, so erhält man folgende *kürzere* Formel:

$$\frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{aa}{16}vv\right),$$

welche sich auf folgende Weise in Worten aussprechen lässt: *Die von der Bewegung herrührende Verminderung der Kraft, mit welcher zwei elektrische Massen auf einander wirken würden, wenn sie nicht bewegt wären, ist dem Quadrate ihrer reducirten relativen Geschwindigkeit proportional.*

3) Wenn $\frac{ee'}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r\frac{ddr}{dt^2}\right)$ die *absolute Kraft* ist, mit welcher die Masse e auf die Masse e', und umgekehrt e' auf e wirkt und abstösst, so folgt hieraus die *beschleunigende Kraft* für die Masse e

$$=\frac{e'}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r\frac{ddr}{dt^2}\right),$$

für die Masse e'

$$=\frac{e}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r\frac{ddr}{dt^2}\right).$$

Es resultirt hieraus folgende *relative Beschleunigung* beider Massen:

$$\frac{e+e'}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r\frac{ddr}{dt^2}\right).$$

Fügt man hierzu noch diejenige *relative Beschleunigung*, welche für dieselben Massen theils aus der Fortdauer ihrer Bewegung in ihren bisherigen Bahnen, theils aus der Einwirkung anderer Körper sich ergiebt, welche zusammen mit f bezeichnet werde, so erhält man für die *ganze relative Beschleunigung*, d. i für $\frac{ddr}{dt^2}$, folgende Gleichung:

$$\frac{ddr}{dt^2}=\frac{e+e'}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r\frac{ddr}{dt^2}\right)+f.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann der Differentialcoefficient $\frac{ddr}{dt^2}$ bestimmt und sein Werth in die Formel $\frac{ee'}{rr}\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}r\frac{ddr}{dt^2}\right)$ gesetzt werden, welche dann in folgenden, die Kraft, mit welcher zwei elektrische Massen auf einander wirken, unabhängig von ihrer *relativen Beschleunigung* darstellenden, Ausdruck übergeht:

$$\frac{ee'}{rr-\frac{aa}{8}(e+e')r}\cdot\left(1-\frac{aa}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{aa}{8}rf\right).$$

Hiernach hängt also diese Kraft von der Grösse der Massen, von ihrer Entfernung, von ihrer relativen Geschwindigkeit, und ausserdem endlich von derjenigen relativen Beschleunigung f ab, welche ihnen zukommt theils in Folge der Fortdauer der in ihnen schon vorhandenen Bewegung, theils in Folge der von *anderen Körpern* auf sie wirkenden Kräfte.

Es scheint hieraus zu folgen, dass die *unmittelbare Wechselwirkung zweier elektrischen Massen* nicht ausschliesslich von diesen Massen selbst und ihren Verhältnissen zu einander, sondern auch von der Gegenwart *dritter* Körper abhängig sei. Nun ist bekannt, dass Berzelius eine solche *Abhängigkeit der unmittelbaren Wechselwirkung zweier Körper von der Gegenwart eines dritten* schon vermuthet hat, und die daraus resultirenden Kräfte mit dem Namen der *katalytischen* bezeichnet hat. Bedienen wir uns dieses Namens, so kann hiernach gesagt werden, dass auch die *elektrischen Erscheinungen* zum Theil von *katalytischen* Kräften herrühren.

Diese Nachweisung *katalytischer* Kräfte für die *Elektricität* ist jedoch keine *strenge* Folgerung aus dem gefundenen elektrischen Grundgesetze. Sie würde es nur dann sein, wenn man mit diesem Grundgesetze nothwendig die *Idee* verbinden müsste, dass dadurch nur solche Kräfte bestimmt wären, welche elektrische Massen aus der Ferne *unmittelbar* auf einander ausübten. Es lässt sich aber auch *denken*, dass die unter dem gefundenen Grundgesetze begriffenen Kräfte zum Theil auch solche Kräfte sind, welche zwei elektrische Massen auf einander *mittelbar* ausüben, und welche daher *zunächst* von dem *vermittelnden Medium*, und *ferner* von allen *Körpern welche auf dieses Medium wirken* abhängen müssen. Es kann leicht geschehen, dass solche *mittelbar* ausgeübten Kräfte, wenn sich das vermittelnde Medium unserer Betrachtung entzieht, als *katalytische Kräfte erscheinen,* wiewohl sie es nicht sind. Man müsste wenigstens, um in solchen Fällen von *katalytischen* Kräften zu sprechen, den Begriff von *katalytischer* Kraft wesentlich modificiren. Man müsste nämlich unter *katalytischer* Kraft eine solche *mittelbar* ausgeübte Kraft verstehen, welche sich nach einer *allgemeinen Regel* bestimmen lässt, durch eine gewisse Kenntniss von den Körpern, deren Einflusse das *vermittelnde* Medium unterworfen ist, jedoch ohne Kenntniss dieses *Mediums selbst.* Das gefundene elektrische Grundgesetz giebt eine allgemeine Regel zur Bestimmung *katalytischer* Kräfte in diesem Sinne.

Eine andere noch nicht entschiedene Frage ist es aber, ob nicht die Kenntniss des *vermittelnden* Mediums zur Bestimmung der Kräfte, wenn auch nicht nothwendig, doch *nützlich* sein würde. Die allgemeine Regel zur Bestimmung der Kräfte liesse sich nämlich vielleicht noch *einfacher* aussprechen, wenn das vermittelnde Medium in Betracht gezogen würde, als es ohnedem in dem *hier aufgestellten elektrischen Grundgesetze* möglich war. Die *Erforschung des vermittelnden Mediums*, die vielleicht noch über viele andere Dinge Aufschluss geben würde, ist selbst nun aber zur Entscheidung dieser Frage nöthig.

Die *Idee von der Existenz* eines solchen vermittelnden Mediums findet sich schon in der *Idee des überall verbreiteten elektrischen neutralen Fluidums* vor, und wenn sich auch dieses *neutrale Fluidum,* ausser den Conductoren, den bisherigen Beobachtungen der Physiker fast gänzlich entzogen hat; so ist jetzt doch Hoffnung, dass es gelingen werde, über dieses allgemein verbreitete Fluidum auf mehreren neuen Wegen näheren Aufschluss zu gewinnen. Vielleicht kommen in anderen Körpern, ausser den Conductoren, keine Strömungen, sondern nur *Schwingungen* vor, die man erst künftig mit den Art. 16. erörterten Mitteln genauer wird beobachten können. Ferner brauche ich nur an Faraday's neueste Entdeckung des Einflusses *elektrischer Strömungen auf Lichtschwingungen* zu erinnern, welche es nicht unwahrscheinlich macht, dass das überall verbreitete elektrische neutrale Medium selbst derjenige überall verbreitete Aether sei, welcher die Lichtschwingungen mache und fortpflanze, oder dass wenigstens beide so innig mit einander verbunden seien, dass die Beobachtungen der Lichtschwingungen Aufschluss über das Verhalten des elektrischen neutralen Mediums zu geben vermöchten.

Auf die Möglichkeit einer *mittelbaren* Wirkung der elektrischen Massen auf einander hat, wie in der Einleitung S. 6 angeführt worden ist, schon

Ampère aufmerksam gemacht, «wonach nämlich die *elektrodynamischen Erscheinungen* den von den elektrischen Strömen *dem Aether mitgetheilten Bewegungen*» zuzuschreiben wären. Ampère erklärt aber selbst die Prüfung dieser Möglichkeit für eine ausserordentlich schwierige Untersuchung, der er sich zu unterziehen keine Zeit gehabt habe.

Sollten auch neue Aufschlüsse der Erfahrung, wie sie z. B. aus weiterem Verfolg der nach Art. 16. über *elektrische Schwingungen* auszuführenden Versuche, und aus der Faraday'schen Entdeckung vielleicht hervorgehen werden, vorzüglich geeignet erscheinen, um die von Ampère nicht überwundenen Schwierigkeiten allmählig zu beseitigen, so dürfte doch dabei auch das elektrische Grundgesetz in der hier gegebenen, von dem vermittelnden Medium unabhängigen, Form einen nicht unwichtigen Anhaltspunkt gewähren, um dieses Gesetz auch in anderer, von dem vermittelnden Medium abhängigen, Form auszudrücken.

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.

Inhalt.

Erste Abhandlung:

Ueber ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkung*).

*) Aus den Abhandlungen bei Begründung der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig, Weidmannsche Buchhandlung 1846. Damit man die Gesellschaftsschriften selbst citiren und die Citate aus denselben benutzen könne, ist die Paginirung derselben beibehalten worden. Die in Klammern eingeschlossenen Zahlen zeigen die Pagina des mit besonderer Paginirung erschienenen Abdrucks dieser Abhandlung an. Eine jede der hier zusammengestellten Abhandlungen ist auch einzeln zu haben.

Seite

Anwendungen des Elektrodynamometers.

Ueber den Zusammenhang der elektrostatischen und der elektrodynamischen Erscheinungen, nebst Anwendung auf die elektrodynamischen Maassbestimmungen.

ELEKTRODYNAMISCHE

MAASSBESTIMMUNGEN

INSBESONDERE

WIDERSTANDSMESSUNGEN

VON

WILHELM WEBER.

I.

WIDERSTANDSMESSUNGEN NACH EINEM GEGEBENEN GRUNDMAASSE.

1.

Die Ausführung der Widerstandsmessungen setzt, wie die Ausführung anderer Messungen, dreierlei voraus, nämlich erstens eine Definition der zu messenden Grössenart, zweitens ein bestimmtes Maass und drittens eine Methode zur Vergleichung der Grössen dieser Art unter einander.

Erstens die Definition des Widerstandes, von welchem hier gehandelt wird, lässt sich auf folgende Weise aussprechen. Nach den von Ohm aufgestellten Gesetzen der galvanischen Kette hat bei unverändertem geschlossenem Leiter der Quotient aus der gemessenen elektromotorischen Kraft und aus der gemessenen Stromintensität immer gleichen Werth und dieser Werth hängt bloss von der Grösse und Beschaffenheit des Leiters ab. Dies vorausgesetzt, wird nun Dasjenige, was in der Grösse und Beschaffenheit des Leiters liegt und wovon der Werth jenes constanten Quotienten abhängt, mit dem Namen des Widerstandes des Leiters bezeichnet und als eine jenem Quotienten proportionale Grösse betrachtet. Hierdurch ist die Möglichkeit von Widerstandsmessungen vermittelst der Bestimmung jenes Quotienten gegeben.

Was zweitens das Maass des Widerstandes betrifft, so soll hier das von Jacobi in Petersburg aufgestellte und unter dem 30. August 1846 mit folgenden Bemerkungen an Herrn Professor Poggendorff in Berlin übersendete Grundmaass angenommen werden. Herr Jacobi schreibt: «Ich habe mich schon bei einer früheren Gelegenheit darüber geäussert, wie interessant und wichtig es wäre, wenn die Physiker bei ihren galvanischen Untersuchungen ihre Strom-

16*

messungen nach elektrolytischem, also absolutem Maasse angäben. Es wäre dazu nur nöthig, die Boussolen, mit denen man arbeitet, auf elektrolytische Actionen zu beziehen, um durch Publicierung der angestellten Versuche Auskunft über den Grad der Genauigkeit zu geben, den das gewählte Instrument oder die gewählte Methode gewährt. Indessen behalte ich, dieses näher zu erörtern, einer andern Gelegenheit vor. Nicht minder wichtig, als die Absolutheit der Strommessungen, ist es, wenn die Physiker das Maass der Leitungswiderstände, die sie messen, durch eine gemeinschaftliche Einheit ausdrücken. Hier aber kann keine absolute Bestimmung stattfinden, weil es scheint, dass bei den Widerständen auch der chemisch reinsten Metalle Unterschiede stattfinden, welche durch eine Verschiedenheit der Dimensionen allein nicht erklärt werden können. Gesetzt also, Sie hätten Ihre Widerstandsmesser und Multiplicatoren auf Kupferdraht von 1 Meter Länge und 1 Millimeter Dicke bezogen, so hätten wir immer noch nicht die Ueberzeugung, ob Ihr Kupferdraht und der unsrige einen gleichen Widerstandscoefficienten besitzen. Alle diese Schwierigkeiten nun werden gehoben, wenn man einen beliebig gewählten Kupfer- oder andern Draht bei den Physikern umherwandern lässt und diese bittet, ihre Widerstandsmessinstrumente darauf zu beziehen und ihre Messungen künftig nur nach diesem Maasse anzugeben. Herr Professor Magnus wird Ihnen also ein kleines schwarzes, mit zwei Schrauben versehenes Kistchen überreichen, in welchem ein auf einem Brete aufgewundener Kupferdraht durch einen aus Wachs und Harz bestehenden Mastix eingekittet und vor Nässe und Feuchtigkeit geschützt ist. Diesen Widerstands-Etalon bitte ich mit Ihren Widerstandsmessern zu vergleichen, zu einem solchen Vergleiche aber auch Herrn Professor Weber und andere Physiker, die sich mit galvanometrischen Messungen beschäftigen, aufzufordern. . . . .
Der Kupferdraht, der in diesem Kästchen befindlich ist, ist zwischen den Schrauben genau 25′ russisch-englisch lang, wiegt 22^{gr},5495 und seine Dicke beträgt nach den mit einem guten Münchener, mit Mikrometer versehenen Mikroskope gemachten Messungen an einem Ende 0″0265 englisch und am andern 0″0260, im Mittel also 0″02625 englisch. Diese Messungen selbst sind das Mittel aus 3 sehr nahe übereinstimmenden Beobachtungen. Bemerken will ich noch, dass die gewogene Drahtlänge $25\frac{1}{8}'$ betrug (also $25\frac{1}{8}' = 22^{gr}$,5495), und dass $\frac{3}{4}''$ auf jeder Seite an den Schrauben angelöthet sind. In französischem Maasse ausgedrückt, würde

die Länge des Drahtes 25′ = 7m,61975 und seine Dicke 0″02625 = 0m000667 sein.»

Was endlich drittens die Vergleichung des Widerstandes zweier Leiter oder die Bestimmung ihres Widerstandsverhältnisses betrifft, zum Beispiel die Vergleichung einer Copie mit dem gegebenen Grundmaasse, so sind dazu zwei Instrumente nebst mehreren Leitern erforderlich, nämlich 1) ein Elektromotor, mit welchem galvanische Ströme erregt werden, 2) ein Galvanometer, mit welchem die Intensität der erregten Ströme gemessen wird. In dem ersten Instrumente bildet derjenige Leiter, in welchem der Strom erregt wird, in dem zweiten Instrumente derjenige Leiter, durch welchen der Strom gehen muss, um gemessen zu werden, einen wesentlichen Bestandtheil. Fügt man zu diesen beiden in den beiden Instrumenten schon enthaltenen Leitern noch diejenigen hinzu, deren Widerstandsverhältniss bestimmt werden soll, so hat man eine vollständige Uebersicht aller zu einer Widerstandsvergleichung nothwendigen Hülfsmittel. Nach dieser Uebersicht sollen nun 1) der bei den folgenden Versuchen gebrauchte Elektromotor, 2) das Galvanometer, 3) die Leiter und deren Combinationen besonders betrachtet werden.

2.
Der Elektromotor.

Bei der Wahl des Elektromotors kommt es hauptsächlich auf die Entscheidung darüber an, ob man sich fortdauernder oder momentaner Ströme bedienen will. Im ersteren Falle leuchten die Vorzüge der sogenannten constanten Säulen, wie sie von Daniell, Grove und Bunsen angegeben worden sind, zum Zweck solcher Messungen von selbst ein. Im zweiten Falle dagegen bedient man sich zur Stromerregung mit weit grösserem Vortheile der Induction beharrlicher Magnete, weil es bei der Anwendung momentaner Ströme weder auf die Intensität dieser Ströme, noch auf die Dauer derselben allein, sondern auf den Werth des Products beider ankommt, welches man den Integralwerth der Stromintensität nennen kann. Dieser Integralwerth kann aber nur auf dem Wege der Induction durch beharrliche Magnete in immer gleicher Grösse dargestellt werden.

Bei den folgenden Versuchen ist den momentanen Strömen und folglich der magnetischen Induction der Vorzug gegeben worden aus

folgenden zwei Gründen. Erstens gewährt bei feinen Messungen die Anwendung metallischer Leiter, z. B. die Anwendung von lauter Kupferdrähten, ohne dass ein feuchter Leiter, wie Wasser, Säure oder eine Salzlösung, in die Kette eingeschaltet zu werden braucht, eine weit grössere Sicherheit. Es ist bekannt, dass die Polarisationserscheinungen an den in einen feuchten Leiter eingetauchten metallischen Oberflächen die Messungen stören. Solche Störungen vermeidet man durch Anwendung geschlossener Drahtketten, in denen man Ströme inducierl, indem man sie gegen beharrliche Magnete bewegt. Jede Wiederholung einer solchen Bewegung bringt einen Strom von dem nämlichen Integralwerthe hervor, so kurz auch die Dauer desselben sei. Zweitens würde bei Anwendung fortdauernder Ströme, wie sie mit constanten Säulen erhalten werden, die Temperatur der Leiter, deren Widerstandsverhältniss bestimmt werden soll, steigen und dieses Steigen in den verschiedenen Leitern verschieden sein. Mit der Temperatur wächst aber der Widerstand der Leiter und diese Veränderlichkeit des Widerstandes würde die Bestimmung des Widerstandsverhältnisses unsicher machen, was durch die Anwendung momentaner Ströme, welche von so kurzer Dauer sind, dass gar keine merkliche Temperaturänderung eintreten kann, vermieden wird.

Die zweckmässige Einrichtung und der Gebrauch magnetischer Inductoren zu Messungen im Allgemeinen ist bei einer andern Gelegenheit schon erörtert worden. Siehe darüber «Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838.» S. 86. Die besondere Einrichtung, welche dem bei den folgenden Versuchen gebrauchten Inductor gegeben worden war, findet man am Ende dieser Abhandlung in Beilage *A* genauer beschrieben und daselbst in Fig. 1 abgebildet.

3.

Das Galvanometer.

Zur Messung der Intensität eines fortdauernden Stromes kann man sich sowohl der sogenannten Sinusboussole als auch der Tangentenboussole bedienen; um aber die Intensität eines inducierten momentanen Stromes, d. h. die Stärke eines sogenannten Inductionsstosses, zu messen, kann man sich nur der Tangentenboussole bedienen, weil der Gebrauch der Sinusboussole ein Beharren der Nadel in ihrer ab-

gelenkten Lage voraussetzt, was bei einem Inductionsstosse nicht der Fall ist; denn die Nadel wird durch einen Inductionsstoss, welchen sie in ihrer Ruhelage erhält, bloss in Schwingung gesetzt und erhält dadurch keine bleibende Ablenkung. Am genauesten und bequemsten lassen sich die Elongationen der durch Inductionsstösse erregten Nadelschwingungen an einem mit Multiplicator versehenen Magnetometer beobachten, wozu Gauss die Anleitung in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837» gegeben hat. Nur ist zu beachten, dass zu den vorliegenden Messungen ein grosser Multiplicator mit grossem Leitungswiderstande, womit gewöhnlich die grösseren Magnetometer versehen sind, von Nachtheil sein würde. Zu den folgenden Versuchen wurde daher ein Magnetometer von sehr kleinen Dimensionen, dessen Nadel nur 100 Millimeter lang war, gebraucht, welches mit einem kleinen Multiplicator von mässigem Widerstande versehen war.

Die Ausführung der Beobachtungen, zumal wenn sie oft und schnell hinter einander wiederholt werden sollen, wird sehr erleichtert, wenn das Magnetometer ausser mit dem Multiplicator auch mit einem starken Dämpfer versehen wird, welcher die in Schwingung versetzte Nadel nach einer kleinen Zahl von Schwingungen zur Ruhe zurückführt. Da die Wirksamkeit dieses Dämpfers hauptsächlich auf der magnetischen Kraft der schwingenden Nadel beruht, so muss man dazu das Magnetometer mit einer sehr stark magnetisierten Nadel versehen. Zugleich ist es aber nöthig, dass die Schwingungsdauer der Nadel nicht unter 10 bis 12 Secunden betrage, wenn die Beobachtungen mit Genauigkeit ausgeführt werden sollen. Diesen Zweck kann man auch bei einer starken Magnetisierung der Nadel dadurch erreichen, dass man der Nadel eine verhältnissmässig zu ihrer geringen Länge grosse Dicke giebt, z. B. von 15 Millimeter bei 100 Millimeter Länge. Die genauere Beschreibung des hier gebrauchten Galvanometers findet man am Ende der Abhandlung in Beilage *B*, wo auch in Fig. 2. 3. 4. eine Abbildung gegeben ist.

4.

Combinationen der vier Leiter.

Die vier Leiter sind der Inductordraht, der Multiplicatordraht, der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der

Draht der Copie. Von diesen vier Leitern sind die beiden ersten zu allen Versuchen nothwendig und bilden die Kette entweder allein oder zusammen mit dem einen oder mit den beiden anderen Drähten, wobei folgende Combinationen stattfinden können.

1) Die Enden des Inductor- und Multiplicatordrahtes werden unmittelbar mit einander verbunden, und diese beiden Drähte bilden allein die Kette.

2) Die vorige Kette wird an einer Stelle gelöst und daselbst der Draht des Original-Widerstandsmaasses eingeschaltet.

3) Statt des Drahtes des Original-Widerstandsmaasses wird der Draht der Copie eingeschaltet.

4) Der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der Copie werden an einander gesetzt und in die Kette hinter einander eingeschaltet.

5) Der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der Copie werden neben einander gesetzt und, am Anfang und am Ende mit einander verbunden, in die Kette eingeschaltet.

6) Die Enden des Inductor- und Multiplicatordrahtes werden mit einander unmittelbar verbunden, bilden aber nicht wie unter (1) die Kette allein, sondern zwischen ihre beiden Verbindungsstellen wird der Draht des Original-Widerstandsmaasses eingeschaltet, so dass der vom Inductordrahte zugeleitete Strom zwischen diesem letzteren und dem Multiplicatordrahte getheilt wird.

7) Statt des Drahtes des Original-Widerstandsmaasses wird der Draht der Copie zwischen den beiden Verbindungsstellen des Inductors und Multiplicators eingeschaltet.

8) Der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der Copie werden an einander gesetzt und zwischen den beiden Verbindungsstellen des Inductors und Multiplicators eingeschaltet.

9) Der Draht des Original-Widerstandsmaasses und der Copie werden neben einander gesetzt und, am Anfang und am Ende mit einander verbunden, zwischen den beiden Verbindungsstellen des Inductors und Multiplicators eingeschaltet.

Von diesen 9 verschiedenen Combinationen sind nur die 4 letzten bei den folgenden Versuchen benutzt worden, weil bei den 5 ersten die Wirkung zu stark war, um die Elongation der Nadel mit derselben Scale zu messen. Die Berechnung der Beobachtungen wird jedoch nachher zeigen, dass schon 3 von jenen Combinationen zur Bestimmung

des Widerstandsverhältnisses des Originals und der Copie genügen und die vierte bloss zur Controle der Genauigkeit der Messung dient.

5.

Beobachtungsmethoden.

Die Anwendung der beschriebenen Instrumente zu den Beobachtungen lässt sich nach verschiedenen Methoden machen, die sich theils durch ihre Genauigkeit, theils durch ihre Bequemlichkeit, theils durch die Regeln, nach welchen die Beobachtungen zu berechnen sind, von einander unterscheiden. Statt der einfachen Beobachtung der Elongation der Nadel, nachdem sie von der Ruhe ab durch einen Inductionsstoss in Bewegung gebracht worden ist, lässt sich mit grossem Vortheil ein System von Elongationsbeobachtungen ausführen, während der Nadel in vorgeschriebenen Augenblicken wiederholte Inductionsstösse ertheilt werden. Für diese Wiederholungen lässt sich allgemein die Regel aufstellen, dass alle Inductionsstösse nur in solchen Augenblicken stattfinden dürfen, wo die schwingende Nadel die Lage passiert, in welcher sie ruhend beharren würde. Es ist dies nämlich die nothwendige Bedingung, wenn die Berechnung der Beobachtungen auf einfache Regeln gebracht werden soll.

Zum Zwecke aller feineren galvanischen Messungen, sowohl in Beziehung auf fortdauernde, als auch auf momentane Ströme, ist es von Wichtigkeit, von den verschiedenen Methoden der Anordnung der Beobachtungen und Versuche und von deren Berechnung eine klare Uebersicht zu erhalten und insbesondere, wenn das Galvanometer wie in unserm Falle mit einem Dämpfer versehen ist, die Regeln kennen zu lernen, nach denen die Beobachtungen berechnet werden müssen, wenn der Einfluss der Dämpfung berücksichtigt werden soll. Um jedoch hier nicht bei einer Zusammenstellung der verschiedenen Beobachtungsmethoden und der ihnen entsprechenden Berechnungsarten zu verweilen, soll dieselbe am Ende der Abhandlung in der Beilage *C* gegeben werden, wo insbesondere der Unterschied der hier gebrauchten Multiplicationsmethode und Zurückwerfungsmethode näher erörtert werden wird, die beide zulässig sind, wenn momentane Ströme angewendet werden. Die ersten hier anzuführenden Beobachtungsreihen sind nach der Multiplicationsmethode ausgeführt worden.

6.

Beobachtungen.

Die Nadel im Galvanometer war Anfangs in Ruhe und ihr Stand wurde an der Scale beobachtet. Der erste positive Inductionsstoss ertheilte darauf der Nadel eine positive Geschwindigkeit, und es wurde die grösste Elongation oder der höchste Stand an der Scale beobachtet, welchen die Nadel hierauf erreichte. Der zweite negative Inductionsstoss wurde in dem Augenblicke gegeben, wo die zurückschwingende Nadel den Ruhestand passierte, und es wurde der niedrigste Stand an der Scale beobachtet, welchen die Nadel hierauf erreichte. Der dritte wieder positive Inductionsstoss wurde in dem Augenblicke gegeben, wo die wieder vorwärts schwingende Nadel den Ruhestand passierte, und es wurde nun wieder der höchste Stand an der Scale beobachtet, welchen die Nadel hierauf erreichte. Auf diese Weise wurden die Beobachtungen in der Regel bis zum 12ten Inductionsstosse fortgesetzt und zuletzt, als die Nadel wieder zur Ruhe gekommen, ihr Stand an der Scale nochmals bemerkt. Dergleichen Beobachtungsreihen wurden nun bei den verschiedenen Combinationen der Drähte mehrmals hinter einander gemacht. Diese verschiedenen Reihen sollen nun mit *A*, *B*, *C*, *D* bezeichnet werden, so dass *A* sich auf die 6te, *B* auf die 7te, *C* auf die 9te und *D* auf die 8te der oben angeführten Combinationen der Leiter bezieht. Folgende Tafel giebt die Uebersicht der nach diesen Reihen geordneten Beobachtungen.

	D.	*C.*	*B.*	*A.*	*B.*	*A.*	*B.*	*C.*	*D.*
Stand	494,8	492,9	493,2	493,7	493,7	493,0	494,3	494,1	494,3
1.	821,8	587,8	672,7	676,3	673,2	675,3	673,1	588,8	821,2
2.	88,3	376,1	271,8	268,8	272,2	268,1	273,1	377,8	88,1
3.	918,0	614,6	723,3	726,7	724,1	726,6	724,4	614,7	916,2
4.	64,5	370,5	260,4	257,0	260,9	257,5	261,9	372,7	64,5
5.	922,9	616,3	725,7	731,1	726,7	729,5	726,7	616,9	923,2
6.	64,0	369,8	259,5	256,1	259,9	257,5	261,7	371,9	62,9
7.	923,3	616,4	726,0	730,7	726,3	730,2	727,2	617,2	922,7
8.	63,4	369,8	259,6	256,2	259,9	257,3	261,6	371,6	62,6
9.	922,5	616,6	726,2	730,8	726,5	730,5	727,2	617,8	923,7
10.	62,9	370,2	259,2	255,7	260,0	257,5	261,9	371,5	61,7
11.	922,9	616,5	724,2	731,1	725,9	730,9	726,9	617,7	923,3
12.	61,9	370,2	262,7	255,7	260,3	257,2	261,7	371,6	62,9
Stand	492,7	493,2	493,6	493,7	492,9	494,2	494,1	494,3	493,7

Die Beobachtungen sind in dieser Tafel nach der Reihenfolge geordnet, wie sie unmittelbar nach einander in einem Zeitraume gemacht worden sind, welcher keine ganze Stunde betrug. Die Wiederholungen der nämlichen Beobachtungsreihen sind so symmetrisch gestellt, dass die kleineren, von der Zeit abhängigen Einflüsse (z. B. der Einfluss der Variation der erdmagnetischen Directionskraft) durch Combination derselben fast ganz eliminiert werden können.

Aus obiger Tafel der unmittelbaren Ablesungen ergiebt sich die folgende Tafel, wenn man 1) von jeder an der Scale abgelesenen Zahl den Mittelwerth des zu Anfang und am Ende der Reihe beobachteten Ruhestandes abzieht; 2) von allen correspondierenden Beobachtungen der mit *A*, oder der mit *B*, oder der mit *C*, oder der mit *D* bezeichneten Reihen den Mittelwerth sucht, und 3) diese Mittelwerthe der an der Scale beobachteten Ablenkungen, welche nach der Theorie des Magnetometers den Tangenten der doppelten Ablenkungswinkel proportional sind, so reduciert, dass sie den Ablenkungswinkeln selbst proportional werden. Dabei ist zu bemerken, dass der horizontale Abstand des Spiegels von der Scale 2150 Scalentheile betrug, wonach, wenn x den beobachteten Werth bezeichnet, der reducierte Werth erhalten wird, wenn man den beobachteten um $\frac{x^3}{13867500}$ verkleinert.

Nr.	*D.*	*C.*	*B.*	*A.*
1.	+ 325,05	+ 94,64	+ 178,96	+ 181,72
2.	— 400,87	— 116,53	— 220,49	— 224,38
3.	+ 417,74	+ 120,92	+ 229,42	+ 232,09
4.	— 423,70	— 121,87	— 231,67	— 235,45
5.	+ 423,45	+ 122,87	+ 231,82	+ 235,69
6.	— 424,22	— 122,62	— 232,36	— 235,89
7.	+ 423,40	+ 123,07	+ 231,96	+ 235,84
8.	— 425,13	— 122,77	— 232,36	— 235,94
9.	+ 423,50	+ 122,47	+ 232,09	+ 236,04
10.	— 425,81	— 122,62	— 232,36	— 236,09
11.	+ 423,50	+ 123,37	+ 231,13	+ 236,39
12.	— 425,72	— 122,57	— 231,17	— 236,24

Man sieht in dieser Tafel, dass die beobachteten Elongationen der Magnetnadel im Galvanometer zwar Anfangs schnell wachsen, sich aber bald einem Grenzwerthe nähern, in Folge des mit der Schwingungsweite

der Nadel wachsenden Einflusses des Dämpfers, mit welchem das Galvanometer versehen war. Um alle einzelnen Beobachtungen auf diesen Grenzwerth zu reducieren, musste das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbögen bestimmt werden, wozu besondere Versuche unmittelbar vor und nach obiger Beobachtungsreihe gemacht worden waren. Das logarithmische Decrement hatte sich aus diesen Versuchen im Mittel ergeben

$$= 0{,}63395,$$

oder es verhalten sich zwei auf einander folgende Elongationen der Nadel wie $1 : 0{,}2323$.

Da die Abweichungen von diesem Mittelwerthe für die einzelnen Reihen nicht gross sind, so genügt es, diesen Mittelwerth statt der wahren Werthe hier in Rechnung zu bringen. Hiernach wird nun die erste Beobachtung auf den Grenzwerth reduciert, indem man sie nach dem Verhältnisse von $0{,}7677 : 1$,

und die n^{te} Beobachtung, indem man sie nach dem Verhältnisse von

$$(1 - 0{,}2323^n) : 1$$

vergrössert. Folgende Tafel giebt die Uebersicht dieser reducierten Werthe und die für *A*, *B*, *C*, *D* daraus gezogenen Mittel.

	D.	*C.*	*B.*	*A.*
1.	+ 123,41	+ 123,28	+ 233,11	+ 236,71
2.	— 123,73	— 123,18	— 233,07	— 237,18
3.	+ 123,05	+ 122,46	+ 232,33	+ 235,04
4.	— 124,93	— 122,22	— 232,34	— 236,13
5.	+ 123,73	+ 122,95	+ 231,98	+ 235,85
6.	— 124,29	— 122,64	— 232,40	— 235,93
7.	+ 123,42	+ 123,07	+ 231,97	+ 235,85
8.	— 125,13	— 122,77	— 232,36	— 235,94
9.	+ 123,50	+ 122,47	+ 232,09	+ 236,04
10.	— 125,81	— 122,62	— 232,36	— 236,09
11.	+ 123,50	+ 123,37	+ 231,13	+ 236,39
12.	— 125,72	— 122,57	— 231,17	— 236,24
Mittel	± 124,19	± 122,80	± 232,19	± 236,13

Dieselbe Versuchsreihe ist auf gleiche Weise 3 Mal, an 3 auf einander folgenden Tagen, gemacht worden, und die folgende Tafel giebt die Uebersicht der aus allen 3 Versuchsreihen gefundenen Werthe von *A*, *B*, *C*, *D*.

	D.	*C.*	*B.*	*A.*
I.	424,19	122,80	232,19	236,13
II.	424,80	123,27	232,25	235,93
III.	423,00	122,59	231,38	235,53
Mittel	424,00	122,89	231,94	235,86

7.

Berechnung der Beobachtungen.

Durch die eben beschriebenen Beobachtungen sind die 4 mit *A*, *B*, *C*, *D* bezeichneten Werthe genau bestimmt worden, und es fragt sich nun ferner, wie aus diesen 4 Werthen das gesuchte Widerstandsverhältniss des Original-Widerstandsmaasses *a* zu der Copie *b* abgeleitet werden könne? Der Einfachheit wegen werde zunächst angenommen, dass der von der Kette selbst herrührende Theil der Dämpfung gegen den von der Kette unabhängigen Theil so klein sei, dass er vernachlässigt werden, folglich die Dämpfung für alle Beobachtungen *A*, *B*, *C*, *D* gleich angenommen werden dürfe. Für diesen Fall überzeugt man sich leicht, dass die reducierte Elongationsbeobachtung der Geschwindigkeit proportional ist, welche der Nadel des Galvanometers in dem Augenblicke, wo sie den Ruhestand passiert, durch den von einem Inductionsstosse herrührenden Strom im Multiplicator des Galvanometers ertheilt wird, und dass jene Geschwindigkeit selbst dem Integralwerthe dieses Stroms proportional ist. Hiernach können die beobachteten Elongationen als Maasse dieser Ströme benutzt werden.

Der durch den Multiplicator des Galvanometers gehende und gemessene Strom war aber bei obigen Versuchen nicht der ganze Strom, welcher durch einen Inductionsstoss im Inductor hervorgebracht wurde, sondern nur ein Bruchtheil desselben, welcher nach dem Gesetze der Stromtheilung ausgedrückt wird durch das Verhältniss des Widerstandes des eingeschalteten Drahtes zur Summe der Widerstände des eingeschalteten Drahtes und des Multiplicatordrahtes. Bezeichnet *m* den Widerstand des Multiplicatordrahtes, *a* den Widerstand des Grundmaasses und *b* den Widerstand der Copie, so ist der Widerstand der eingeschalteten Drähte

für die Beobachtung $A. = a$
,, ,, ,, $B. = b$
,, ,, ,, $C. = \frac{ab}{a+b}$
,, ,, ,, $D. = a+b$

und folglich die entsprechenden Bruchtheile

für $A. = \frac{a}{a+m}$
,, $B. = \frac{b}{b+m}$
,, $C. = \frac{ab}{ab+am+bm}$
,, $D. = \frac{a+b}{a+b+m}$

Der ganze Strom wird aber, nach dem Ohmschen Gesetze, durch einen Bruch dargestellt, dessen Zähler K für alle Versuche gleich ist und von der einem Inductionsstosse entsprechenden elektromotorischen Kraft abhängt, während der Nenner durch den Widerstand der Kette, durch welche der Strom geht, gegeben ist. Bezeichnet man den Widerstand des Inductordrahtes mit r, so ergiebt sich der Widerstand der ganzen Kette

für die Beobachtung $A. = r + \frac{am}{a+m}$
,, ,, ,, $B. = r + \frac{bm}{b+m}$
,, ,, ,, $C. = r + \frac{abm}{ab+am+bm}$
,, ,, ,, $D. = r + \frac{(a+b)m}{a+b+m}$

Man erhält hiernach folgende Gleichungen für die mit dem Galvanometer beobachteten Stromintensitäten, welche mit A, B, C, D bezeichnet werden sollen:

$$A = \frac{a}{a+m} \cdot \frac{K}{r + \frac{am}{a+m}} = \frac{aK}{am+ar+mr}$$

$$B = \frac{b}{b+m} \cdot \frac{K}{r + \frac{bm}{b+m}} = \frac{bK}{bm+br+mr}$$

$$C = \frac{ab}{ab+am+bm} \cdot \frac{K}{r + \frac{abm}{ab+am+bm}} = \frac{abK}{ab(m+r)+(a+b)mr}$$

$$D = \frac{a+b}{a+b+m} \cdot \frac{K}{r + \frac{(a+b)m}{a+b+m}} = \frac{(a+b)K}{(a+b)(m+r)+mr}$$

Setzt man hierin Kürze halber

$$\frac{1}{mr} \cdot K = \alpha, \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{r} = \beta$$

so ergiebt sich:

$$A\left(\beta+\frac{1}{a}\right)=B\left(\beta+\frac{1}{b}\right)=C\left(\beta+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=D\left(\beta+\frac{1}{a+b}\right)=\alpha$$

und hieraus:

$$\frac{\frac{1}{b}B-\frac{1}{a}A}{A-B}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)C-\frac{1}{a}A}{A-C}=\frac{\frac{1}{a+b}D-\frac{1}{a}A}{A-D}=\beta$$

woraus zur Bestimmung des gesuchten Widerstandsverhältnisses der Copie zum Grundmaasse $b:a$ folgende zwei Gleichungen erhalten werden:

$$(a-b)\,AB-aAC+bBC=0$$
$$(aa-bb)\,AB+bbAD-aaBD=0$$

oder:

$$\frac{b}{a}=\frac{AB-AC}{AB-BC}$$
$$\frac{bb}{aa}=\frac{AB-BD}{AB-AD}$$

Zwischen den 4 Beobachtungen A, B, C, D findet also, den Ohmschen Gesetzen gemäss, folgende Relation statt:

$$\frac{A^2}{B^2}=\left(\frac{A-C}{B-C}\right)^2\cdot\frac{A-D}{B-D}$$

welche sich ergiebt, wenn man a und b aus den vorhergehenden Gleichungen eliminiert.

Nach der gegebenen Entwickelung gelten die hier aufgestellten Formeln zunächst nur für diejenigen Fälle, wo die Beobachtungen A, B, C, D die inducierten und durch den Multiplicator gehenden Ströme nach gleichem Maasse ausgedrückt geben, d. i. wo die Dämpfung der Galvanometernadel für die verschiedenen Beobachtungen nicht merklich verschieden ist. Diese Formeln bedürfen aber noch einer besondern Prüfung, um sie auch auf die übrigen Fälle anzuwenden, in welchen die Dämpfung variiert, weil dann nämlich die beobachteten Elongationen A, B, C, D, wie man leicht einsieht, zwar ebenfalls der Stromstärke proportional, ausserdem aber der Stärke der Dämpfung umgekehrt proportional sind.

Die Dämpfung besteht nun aus einem für alle Beobachtungen constanten Theile, welcher von dem unveränderlichen ringförmigen Dämpfer, mit welchem das Galvanometer versehen ist, herrührt und $=1$ gesetzt werden möge, und aus einem variabelen, von der Schliessung des Multiplicators abhängigen Theile, welcher dem Widerstande der vom Multiplicator ausgehenden und zu ihm zurückkehrenden Kette umgekehrt proportional ist. Der Widerstand dieser Kette ist aber:

$$\text{für } A. = m + \frac{ar}{a+r}$$
$$,,\ B. = m + \frac{br}{b+r}$$
$$,,\ C. = m + \frac{abr}{ab+ar+br}$$
$$,,\ D. = m + \frac{(a+b)\,r}{a+b+r}$$

es kann folglich der variabele Theil der Dämpfung dargestellt werden, wenn man $\frac{1}{m}+\frac{1}{r}=\beta$ setzt und γ einen constanten Factor bezeichnet,

$$\text{für } A. \text{ durch } \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{a}}{\beta+\frac{1}{a}}$$
$$,,\ B.\ ,,\ \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{b}}{\beta+\frac{1}{b}}$$
$$,,\ C.\ ,,\ \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\beta+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$
$$,,\ D.\ ,,\ \gamma \cdot \frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{a+b}}{\beta+\frac{1}{a+b}}$$

Für die Fälle nun, wo dieser variabele Theil der Dämpfung gegen den constanten $= 1$ nicht vernachlässigt werden darf, müssen in den oben entwickelten Formeln statt A, B, C, D ihre Producte in die zugehörigen Werthe der Dämpfung gesetzt werden, d. h.

$$\text{statt } A \text{ ist zu setzen } A\left(1+\gamma.\ \frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{a}}{\beta+\frac{1}{a}}\right)$$
$$,,\ B\ ,,\ ,,\ ,,\ B\left(1+\gamma.\ \frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{b}}{\beta+\frac{1}{b}}\right)$$
$$,,\ C\ ,,\ ,,\ ,,\ C\left(1+\gamma.\ \frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\beta+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)$$
$$,,\ D\ ,,\ ,,\ ,,\ D\left(1+\gamma.\ \frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{a+b}}{\beta+\frac{1}{a+b}}\right).$$

Durch diese Substitution erhält man aber:

$$A\left[\beta+\tfrac{1}{a}+\gamma\left(\tfrac{1}{r}+\tfrac{1}{a}\right)\right]=B\left[\beta+\tfrac{1}{b}+\gamma\left(\tfrac{1}{r}+\tfrac{1}{b}\right)\right]=C\left[\beta+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\gamma\left(\tfrac{1}{r}+\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}\right)\right]$$
$$=D\left[\beta+\frac{1}{a+b}+\gamma\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a+b}\right)\right]=\alpha$$

und hieraus:

$$\frac{A\left(\beta+\frac{1}{a}\right)-B\left(\beta+\frac{1}{b}\right)}{B\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{b}\right)-A\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)}=\frac{A\left(\beta+\frac{1}{a}\right)-C\left(\beta+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{C\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-A\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)}$$

$$=\frac{A\left(\beta+\frac{1}{a}\right)-D\left(\beta+\frac{1}{a+b}\right)}{D\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a+b}\right)-A\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)}=\gamma$$

woraus,

$$AB\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+AC\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{b}-BC\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{a}=0$$

$$AB\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+AD\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a}\right)-BD\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b}\right)=0$$

folgt, oder, indem der gemeinschaftliche Factor $\left(\beta-\frac{1}{r}\right)$ herausfällt, die nämlichen Gleichungen wie früher erhalten werden, nämlich:

$$\frac{b}{a}=\frac{AB-AC}{AB-BC}$$

$$\frac{bb}{aa}=\frac{AB-BD}{AB-AD}$$

Wendet man endlich die gefundenen Regeln auf die Werthe von A, B, C, D an, welche sich aus den oben beschriebenen Versuchen ergeben haben, nämlich:

$$A=235{,}86$$
$$B=231{,}94$$
$$C=122{,}89$$
$$D=424{,}00,$$

so ergiebt sich zuvörderst:

$$\frac{A^3}{B^3}=1{,}05156$$

$$\left(\frac{A-C}{B-C}\right)^2\cdot\frac{A-D}{B-D}=1{,}05128.$$

Die nahe Uebereinstimmung dieser beiden Werthe, welche nach obigen Regeln gleich sein sollten, kann als Bestätigung der Ohmschen Gesetze dienen, aus denen jene Regeln abgeleitet sind.

Ferner ergiebt sich daraus das Widerstandsverhältniss der Copie *b* zum Grundmaasse *a*, und zwar aus den beobachteten Werthen *A*, *B*, *C*:

$$\frac{b}{a} = \frac{AB - AC}{AB - BC} = 0{,}981616,$$

aus den beobachteten Werthen *A*, *B*, *D*:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{AB - BD}{AB - AD}} = 0{,}981485;$$

im Mittel also ist der Widerstand der Copie, in Theilen des Widerstandes des gegebenen Grundmaasses ausgedrückt,

$$= 0{,}98155.$$

Auf die nämliche Weise, wie hier das Widerstandsverhältniss der Copie zu dem Grundmaasse bestimmt worden ist, kann nun auch das Widerstandsverhältniss anderer Leiter zum Grundmaasse gefunden und dadurch können die Widerstände aller dieser Leiter nach dem gegebenen Grundmaasse gemessen werden.

Die Anordnung der Beobachtungen war in dem hier gegebenen Beispiele nach der Multiplications-Methode getroffen worden. Es ist aber schon erwähnt worden, dass diese Anordnung noch auf eine andere Weise, nämlich nach der Zurückwerfungsmethode, gemacht werden kann, und es besitzt sogar diese letztere Anordnungsweise einige Vorzüge vor der ersteren. Es verdient daher diese zweite Methode näher erörtert zu werden, was in der Beilage *C*. am Ende dieser Abhandlung geschehen soll, wo auch ein Messungsbeispiel nach dieser Methode beigefügt werden wird.

II.

ZURÜCKFÜHRUNG DER WIDERSTANDSMESSUNGEN AUF ABSOLUTES MAASS.

8.

Nachdem im ersten Abschnitte gezeigt worden ist, wie der Widerstand eines Leiters mit der erforderlichen Schärfe nach einem gegebenen Grundmaasse bestimmt werden kann, soll nun im zweiten Abschnitte die Zurückführung dieser Messungen auf absolutes Maass gegeben werden.

Man könnte glauben, dass sich eine solche Zurückführung auf die einfachste Weise dadurch bewerkstelligen lasse, dass man auf die räumlichen Dimensionen (Länge und Querschnitt) der Leiter zurückgehe und sich dabei an dasjenige Metall halte, was zu den Leitern am geeignetsten ist und am häufigsten dazu gebraucht wird, an das Kupfer. In der That würde man auf diese Weise zu Widerstandsbestimmungen der Leiter gelangen, welche dem Namen nach als absolute bezeichnet werden könnten, die aber in der That dem wahren Zwecke, die Zahl der willkührlich anzunehmenden Grundmaasse zu vermindern, nicht entsprechen würden. Es würde dadurch nur an die Stelle eines Grundmaasses für absoluten Widerstand ein Grundmaass für specifischen Widerstand (nämlich der des Kupfers) gesetzt werden. Für den angeführten Zweck ist es aber gleichgültig, ob man ein Maass des absoluten Widerstandes zum Grunde legt und das Maass des specifischen Widerstandes daraus ableitet, oder ob man umgekehrt ein Maass des specifischen Widerstands zum Grunde legt und daraus das Maass des absoluten Widerstandes ableitet. Absolute Widerstandsmessungen sind daher nur dann von wesentlicher Bedeutung, wenn sie so ausgeführt werden, dass gar keine neuen, sondern nur vorhandene, zu anderen Zwecken schon gebrauchte und unentbehrliche Maasse, wie z. B. die des Raumes und der Zeit, zum Grunde liegen.

Hiernach kann nun leicht Dasjenige beurtheilt werden, was Jacobi in der oben angeführten Stelle S. 199 f. bei Gelegenheit seines Vorschlags in Betreff eines festen Widerstandsmaasses gesagt hat: es könne, um die Leitungswiderstände, welche die Physiker messen, durch eine gemeinschaftliche Einheit auszudrücken, keine absolute Bestimmung stattfinden, weil es scheine, dass bei den Widerständen auch der chemisch reinsten Metalle Unterschiede stattfänden, welche durch eine Verschiedenheit der Dimensionen allein nicht erklärt werden könnten, und dass also, wenn der eine Physiker seine Widerstandsmesser und Multiplicatoren auf Kupferdraht von 1 Meter Länge und 1 Millimeter Dicke bezöge, die andern Physiker immer noch nicht die Ueberzeugung hätten, ob sein Kupferdraht und der ihrige einen gleichen Widerstandscoefficienten (d. i. ob das Kupfer dieser Drähte gleichen specifischen Widerstand) besitze. Man sieht, dass Jacobi hier nur eine solche absolute Bestimmung im Auge hat, bei welcher das Maass des absoluten Widerstandes aus einem für den specifischen Widerstand angenommenen Grundmaasse abgeleitet wird, die er mit Recht verwirft; die Frage aber, ob überhaupt ein neues Grundmaass nöthig sei, oder ob Widerstandsbestimmungen möglich seien, ohne irgend eines von jenen beiden Grundmaassen anzunehmen, hat Jacobi gar nicht berührt. Diese Frage ist es aber gerade, deren Beantwortung uns vorzugsweise beschäftigen wird. Wenn sich übrigens aus dieser Antwort ergeben wird, dass in der That zum Zweck der Widerstandsmessungen gar kein neues Grundmaass nöthig ist, so folgt doch daraus noch keineswegs, dass die Feststellung eines solchen Grundmaasses, wie Jacobi vorgeschlagen und wie es im ersten Theile dieser Abhandlung zur Anwendung gebracht worden ist, ganz überflüssig sei. Es wird vielmehr gezeigt werden, dass die Annahme des Jacobi'schen Vorschlags auch dann noch aus praktischen Gründen höchst wünschenswerth bleibt, weil eine absolute Widerstandsbestimmung sich direct nur in seltenen Fällen unter besonders günstigen Verhältnissen genau ausführen lässt, durch Annahme des Jacobi'schen Vorschlags aber eine Brücke gebaut wird, auf welcher man dazu gelangt, mit Hülfe einer einzigen wirklich ausgeführten absoluten Widerstandsbestimmung alle andern Widerstandsmessungen auf absolutes Maass zurückzuführen. Dass nun eine absolute Widerstandsbestimmung auf ganz andere Weise möglich sei, als diejenige, von welcher Jacobi spricht, ganz unabhängig von dem

specifischen Widerstande oder von dem Widerstandscoefficienten irgend eines Körpers, wie des Kupfers, nämlich durch eine eigenthümliche Combination magnetoelektrischer und elektromagnetischer Beobachtungen, ist schon von Gauss ausgesprochen worden, bald nachdem Faraday's Entdeckung der Magnetoelektricität bekannt geworden war.

Das Wesentliche dieser Methode lässt sich auf folgende Weise kurz in Worten ausdrücken: Betrachtet man die Intensität irgend eines galvanischen Stroms, so leuchtet ein, dass dieselbe im Allgemeinen auf zwei wesentlich verschiedene Arten bestimmt werden kann: erstens aus den Ursachen, von welchen sie abhängt; zweitens aus den Wirkungen, welche sie hervorbringt. Die aus ihren Wirkungen definierte Stromintensität kann nun aber, wie sich leicht zeigen lässt, auf absolutes Maass zurückgeführt werden, und da einleuchtet, dass der Werth einer Stromintensität nach absolutem Maasse der nämliche sein müsse, es möge dieselbe aus ihren Wirkungen oder aus ihren Ursachen definiert werden, so ist das Resultat, welches auf dem letzten Wege erhalten werden muss, durch das auf dem ersten erhaltene schon im Voraus bekannt. Nun weiss man aber, dass die Stromintensität nur von zwei Ursachen abhängt, nämlich von der elektromotorischen Kraft und von dem Widerstande der Kette, und dass von diesen beiden die elektromotorische Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt werden kann. So wie nun, wenn ausser der elektromotorischen Kraft auch der Widerstand nach absolutem Maasse gegeben wäre, der absolute Werth der Stromintensität sich unmittelbar daraus ergeben würde, eben so ergiebt sich umgekehrt, da ausser der elektromotorischen Kraft auch die Stromintensität nach absolutem Maasse gegeben ist, der Werth des Widerstandes nach absolutem Maasse, und man sieht hieraus, dass Widerstandsmessungen ausgeführt werden können, ohne dass irgend ein neues willkührliches Grundmaass dazu gebraucht wird, was zu beweisen war.

Leuchtet nun auch hieraus im Allgemeinen die Möglichkeit eines absoluten Widerstandsmaasses in der angegebenen engern Bedeutung des Wortes ein, so ist es doch noch nöthig, eine genaue Definition dieses Maasses zu geben, wenn eine wirkliche Messung nach diesem Maasse ausgeführt werden soll. Eine solche Definition findet aber eine Schwierigkeit darin, dass sie andere absolute Maasse als bekannt voraussetzt, nämlich das absolute Maass für die elektromotorischen Kräfte

und das absolute Maass für die (aus ihren Wirkungen bestimmten) Stromintensitäten. Es handelt sich demnach bei der Begründung eines absoluten Widerstandsmaasses im Grunde um die Feststellung eines vollständigen Systems absoluter Maasse für die ganze Elektrodynamik. Geht man noch weiter zurück, so findet man, dass auch diese letzteren Maasse wieder andere, ausser dem Kreise der Elektrodynamik, voraussetzen, und dass also die beabsichtigte Begründung des Widerstandsmaasses eine nähere Erörterung der absoluten Maasse mehrerer verschiedenen Grössenarten nöthig macht, welche der Ausführung unserer Messung vorausgeschickt werden muss.

9.

Über die absoluten Maasse mehrerer verschiedenen Grössenarten.

Es ist bekannt, dass es sehr zur Vereinfachung physicalischer Forschungen dient, wenn man für die verschiedenen Grössenarten nicht mehr eigene, von einander unabhängige Grundmaasse einführt, als unumgänglich nöthig sind, und wenn man alle anderen Maasse aus diesen wenigen nothwendigen Grundmaassen ableitet. Aus diesem Grunde werden in der Mechanik bloss für Linien, Zeiträume und Massen Grundmaasse aufgestellt, und die Maasse aller andern in der Mechanik betrachteten Grössenarten werden aus diesen wenigen Grundmaassen abgeleitet und heissen dann absolute Maasse. Zum Beispiel werden keine Grundmaasse für Geschwindigkeit und Dichtigkeit aufgestellt, sondern es werden absolute Maasse dafür gebraucht, welche auf jene drei Grundmaasse zurückgeführt werden können. Eben so werden die Maasse für die bewegenden und für die absoluten Kräfte, für die Drehungsmomente, Trägheitsmomente, Nutzeffecte u. s. w. nach bekannten Gesetzen auf jene drei Grundmaasse zurückgeführt. Aus demselben Grunde wird ferner auch für den Magnetismus kein eigenes unabhängiges Grundmaass eingeführt, sondern man hält sich an das absolute Maass, welches Gauss für den Magnetismus aus den drei Grundmaassen der Mechanik in der Abhandlung: *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. Gottingae* 1833. abgeleitet hat.

Das Maass für den Stabmagnetismus ist nämlich hiernach der Magnetismus eines solchen Stabs, welcher, — wenn er aus grosser Entfer-

nung R auf einen andern gleich stark magnetischen Stab wirkt, dessen magnetische Axe derjenigen Geraden parallel ist, welche die Mittelpunkte der beiden Magnete verbindet, während seine eigene magnetische Axe dagegen senkrecht ist, — ein Drehungsmoment ausübt, welches sich zum absoluten Maasse des Drehungsmomentes wie $1 : R^3$ verhält.

Das Maass für die Stärke des Erdmagnetismus (für die Stärke der erdmagnetischen Kraft) an irgend einem Orte ist eben danach das nach absolutem Maasse ausgedrückte Drehungsmoment, welches der Erdmagnetismus auf einen an diesem Orte befindlichen Magnetstab ausübt, wenn letzterer das absolute Maass Magnetismus enthält und seine magnetische Axe mit der Richtung des Erdmagnetismus an diesem Orte einen rechten Winkel macht.

10.

Definitionen der absoluten Maasse in der Elektrodynamik.

Die absoluten Maasse der in der Elektrodynamik betrachteten Grössenarten lassen sich nun auf folgende Weise durch Zurückführung auf die magnetischen Maasse kurz und vollständig definieren.

1) Das Maass für die Stromintensitäten.

Das Maass für die Stromintensitäten ist die Intensität desjenigen Stroms, welcher, wenn er eine Ebene von der Grösse des Flächenmaasses umläuft, nach den elektromagnetischen Gesetzen die nämlichen Wirkungen in die Ferne ausübt, wie ein Magnetstab, welcher das vorher definierte Maass des Magnetismus enthält.

Diese Definition von dem Maasse für die Stromintensitäten ist dieselbe, welche in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840» S. 86 gegeben worden ist.

2) Das Maass für die elektromotorischen Kräfte.

Das Maass für die elektromotorischen Kräfte ist diejenige elektromotorische Kraft, welche von dem vorher definierten Maasse des Erdmagnetismus auf eine geschlossene Kette ausgeübt wird, wenn letztere so gedreht wird, dass die von ihrer Projection auf eine gegen die

Richtung des Erdmagnetismus senkrechte Ebene begrenzte Fläche während des Zeitmaasses um das Flächenmaass zunimmt oder abnimmt.

3) Das Maass für den Widerstand.

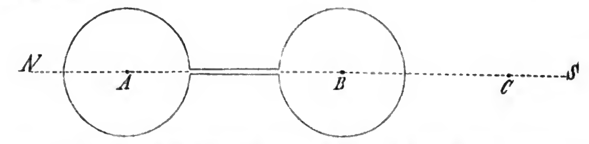
Das Maass für den Widerstand ist der Widerstand einer solchen geschlossenen Kette, in welcher durch das vorher definierte Maass der elektromotorischen Kraft das vorher definierte Maass der Stromintensität hervorgebracht wird.

Bezeichnet man das oben definierte Maass für die Stromintensitäten mit I und irgend eine hiernach gemessene Stromintensität mit iI, worin i eine reine Zahl bezeichnet, und bezeichnet man ferner das oben definierte Maass für die elektromotorischen Kräfte mit E und irgend eine hiernach gemessene elektromotorische Kraft mit eE, worin e eine reine Zahl bezeichnet; so wird wW der Widerstand einer Kette sein, auf welche die elektromotorische Kraft eE wirkt und darin einen Strom von der Intensität iI hervorbringt, wenn W das oben definierte Widerstandsmaass bezeichnet und $w = \frac{e}{i}$ eine reine Zahl ist. Der Widerstand dieser Kette ist also dem Widerstandsmaasse gleich, wenn $e = i$ gefunden wird. Man ersieht hieraus, wie ein Leiter, welcher das vorher definierte Widerstandsmaass besitzt, wirklich dargestellt werden kann.

11.

Schema zur absoluten Widerstandsbestimmung eines Leiters.

Zur Erläuterung, wie die vorher definierten elektrodynamischen Maasse zur Ausführung der absoluten Widerstandsbestimmung eines Leiters in Anwendung gebracht werden können, diene das folgende Beispiel.



Die Gerade NS bezeichne die Richtung des Erdmagnetismus, dessen Stärke an den beiden Orten A und B nach dem vorher definierten Maasse $= T$ sei. Der Werth von T wird bekanntlich nach der von

Gauss in der *«Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata»* gegebenen Anleitung aus magnetometrischen Beobachtungen gefunden. Nun bestehe eine geschlossene Kette aus zwei Kreisen, deren Mittelpunkte A und B seien; die Linie NS liege in der Ebene dieser Kreise. Es gehören aber zu dieser Kette noch ferner zwei neben einander liegende, von einander isolierte Drähte, welche eine doppelte Verbindung zwischen beiden Kreisen herstellen, und es sei endlich jeder Kreis zwischen den beiden Punkten, wo die beiden Drähte mit ihm verbunden sind, durchschnitten, so dass alle Theile zusammen, wie die Figur zeigt, eine in sich zurücklaufende Linie bilden; r bezeichne die der Einfachheit wegen gleich angenommenen Halbmesser beider Kreise. Projiciert man den Kreis A nach der Richtung NS auf eine gegen NS senkrechte Ebene, so ist die von der Projection begrenzte Fläche $= 0$. Die Beugsamkeit der die beiden Kreise verbindenden Drähte möge aber gestatten, den Kreis A zu drehen und gegen NS senkrecht zu stellen, wo dann die von der nämlichen Projection begrenzte Fläche $= \pi rr$ wird. Diese Drehung geschehe in einer kurzen Zeit τ auf solche Weise, dass die von der Kreisprojection begrenzte Fläche in dieser Zeit gleichförmig von 0 bis πrr wachse. Es ergiebt sich dann aus den magnetoelektrischen Gesetzen eine elektromotorische Kraft eE, welche der Erdmagnetismus T auf den kreisförmigen Leiter A während der Zeit τ ausübt, welche durch das vorher definierte Maass E und durch die Zahl

$$e = \frac{\pi rr}{\tau} \cdot T$$

bestimmt ist. Durch diese elektromotorische Kraft wird während der Zeit τ ein durch die ganze geschlossene Kette gehender Strom hervorgebracht, dessen Intensität mit iI bezeichnet werden soll. Dieser Strom geht auch durch den Kreis B und wirkt von diesem Kreise aus auf eine entfernte Magnetnadel in C, deren Drehungsaxe auf NS senkrecht sei und in der Ebene des Kreises B liege. Ist nun I das vorher definierte Maass für die Stromintensitäten, so ergiebt sich aus den elektromagnetischen Gesetzen, dass das von dem durch den Kreis B gehenden Strome auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment dem von einem Magnetstabe ausgeübten Drehungsmomente gleich ist, welcher im Mittelpunkte des Kreises B so aufgestellt würde, dass seine magnetische Axe auf der Kreisebene senkrecht wäre, wenn der nach dem vorher definierten Maasse gemessene Magnetismus M dieses Stabes

$$M = \pi rri$$

ist. Wenn nun ferner der nach gleichem Maasse gemessene Magnetismus der Nadel $C = m$ und $BC = R$ ist, und φ den Winkel bezeichnet, welchen die magnetische Axe der Nadel C mit der Richtung NS des Erdmagnetismus macht; so wird das von dem Magnetstabe M auf die Nadel m ausgeübte Drehungsmoment nach bekannten magnetischen Gesetzen durch

$$\frac{Mm}{R^3} \cos \varphi = \frac{\pi rr}{R^3} \cdot im. \cos \varphi$$

ausgedrückt. Hieraus ergiebt sich, wenn K das Trägheitsmoment der Nadel bezeichnet, die Acceleration der Drehung

$$= \frac{\pi rr}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \cos \varphi$$

und folglich, wenn die Nadel vorher in Ruhe und $\varphi = 0$ war, die Drehungsgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ am Ende der kurzen Zeit τ,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi rr}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \tau$$

Aus dieser Geschwindigkeit findet man endlich die grösste Elongation α der dadurch in Schwingung gesetzten Nadel nach bekannten Schwingungsgesetzen durch Multiplication mit der Schwingungsdauer t und durch Division mit der Zahl π, nämlich:

$$\alpha = \frac{rr}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \tau t$$

Für die Schwingungsdauer t gilt bekanntlich die Gleichung

$$mT = \frac{\pi\pi K}{tt}$$

woraus

$$\frac{mt}{K} = \frac{\pi\pi}{tT}$$

und folglich

$$\alpha = \frac{\pi\pi rr}{R^3} \cdot \frac{i\tau}{tT}$$

oder

$$i = \frac{\alpha R^3}{\pi\pi rr} \cdot \frac{t}{\tau} \cdot T$$

Man könnte nun ferner, indem man beachtet, dass der durch den Kreis B gehende Strom auch den Kreis A durchläuft, auch die Wirkung des Kreisstroms A auf die Nadel berechnen; indessen möge hier der Einfachheit wegen angenommen werden, dass die Entfernung AC so gross sei, dass diese Wirkung gegen die Wirkung des Kreisstroms B verschwinde; es wird dann die Beobachtung der wirklichen Elongationsweite der Nadel unmittelbar den Werth von α geben.

Dann ergiebt sich, dass von der oben angegebenen, nach dem vorher definierten Maasse bestimmten elektromotorischen Kraft eE, für welche

$$e = \frac{\pi r r}{\tau} \cdot T$$

gefunden worden ist, in der ganzen Kette ein Strom hervorgebracht werde, dessen Intensität nach dem vorher definierten Maasse durch iI bestimmt wird, wenn

$$i = \frac{\alpha R^2}{\pi \pi r r} \cdot \frac{t}{\tau} \cdot T$$

Nun wird endlich der Widerstand der ganzen Kette nach dem vorher definierten Maasse durch wW bestimmt, wenn

$$w = \frac{e}{i} = \frac{\pi^3 r^4}{\alpha R^2 t}$$

ist. Die Ausführung der absoluten Widerstandsmessung der ganzen Kette ist hiernach auf die Messung der Grössen

$$r, R, \alpha, t$$

zurückgeführt worden, oder, mit andern Worten, der Widerstand der ganzen Kette kann hiernach in dem vorher definierten Maasse ausgedrückt werden, wenn man aus den Beobachtungen erstens die Zahl α gefunden hat, welche die Elongationsweite der Nadel in Theilen des Halbmessers angiebt, zweitens die Zahl $\frac{r}{R}$, welche den Halbmesser der beiden Kreise in Theilen der Entfernung BC angiebt, drittens die Geschwindigkeit $\frac{r}{t}$, mit welcher der Halbmesser jener Kreise während einer Schwingung der Nadel durchlaufen würde. Hieraus folgt also, dass ein Maass für die Geschwindigkeit das einzige Grössenmaass ist, auf welchem die absolute Widerstandsmessung beruht.

Nach der hiermit gegebenen Übersicht aller zu einer absoluten Widerstandsbestimmung erforderlichen Beobachtungen gehen wir zur Ausführung dieser Beobachtungen selbst über.

12.

Über die Ausführung der Beobachtungen.

Die meisten Beobachtungen, welche der vorhergehenden Darstellung gemäss zur absoluten Widerstandsbestimmung der ganzen Kette gemacht werden müssen, können nun ohne Schwierigkeit mit grosser Schärfe wirklich ausgeführt werden. Denn die zur Bestimmung der Schwingungsdauer der Nadel erforderlichen Beobachtungen gestatten eine Schärfe, die bekanntlich nichts zu wünschen übrig lässt. Eben so verhält es sich mit den Abmessungen der Kreishalbmesser und der Entfernung $BC = R$. Es bleibt daher nur die Beobachtung der Elon-

gationsweite α der schwingenden Nadel übrig. Auch diese kann bekanntlich mit den für das Magnetometer getroffenen Einrichtungen bis auf einige Bogensecunden genau bestimmt werden und würde daher gleichfalls nichts zu wünschen übrig lassen, wenn z. B. die Werthe von α nicht unter 1^0 gross wären. Aber diese Werthe sind, wenn genau nach diesem Schema verfahren wird, allerdings viel kleiner und würden sogar mit den besten Beobachtungsmitteln nicht wahrgenommen werden. Die Hauptaufgabe für die praktische Ausführung der Widerstandsmessung einer Kette nach absolutem Maasse besteht daher darin, solche Modificationen in der beschriebenen Einrichtung zu treffen, durch welche die zu beobachtende Elongation α möglichst vergrössert wird.

Eine solche Modification besteht erstens darin, dass man die Magnetnadel C aus der Ferne in den Mittelpunkt des Kreises B versetzt, wo die Elongation nach einem aus den Gesetzen des Elektromagnetismus genau zu bestimmenden Verhältnisse vergrössert wird. Nur muss dabei darauf geachtet werden, dass die Länge der Nadel viel kleiner sei, als der Durchmesser des Kreises, damit die eigenthümliche Vertheilungsweise des Magnetismus in der Nadel nicht besonders in Rechnung gebracht zu werden brauche, weil die genauere Erforschung dieser Vertheilungsweise mit Schwierigkeiten verbunden ist.

Eine zweite Modification, durch welche eine Vergrösserung der Elongation α erlangt werden kann, besteht in einer solchen Vervielfältigung der Umwindungen beider Kreise, wodurch sie in Ringe, welche einen bedeutenden Querschnitt besitzen, verwandelt werden. Es muss aber dann der Einfluss aller Umwindungen einzeln in Rechnung gebracht werden, weil sie verschiedene Halbmesser haben und nicht alle in einer Ebene mit der Nadel liegen.

Mit diesen beiden wesentlichen Modificationen gelangt man zu einer solchen Vergrösserung der Elongation, dass auch diese Beobachtung mit Schärfe ausgeführt werden kann, wie die zu beschreibenden Versuche beweisen werden.

Ehe zu der Beschreibung der Versuche selbst übergegangen wird, möge noch eine Bemerkung über eine andere Modification der Einrichtung vorausgeschickt werden, zu welcher man gelangt, wenn man die für den Kreis B schon angegebene Vertauschung einer Wirkung in die Ferne mit einer Wirkung auf den Mittelpunkt auch auf den

Kreis A in Anwendung bringt. Hiernach würde also die elektromotorische Kraft, welche der Erdmagnetismus aus der Ferne auf den Kreis A ausübte, durch die elektromotorische Kraft eines im Mittelpunkte des Kreises A aufzustellenden Magnets ersetzt werden. Es ergiebt sich sodann nach den Gesetzen der Magnetoelektricität eine Identität der Wirkung, wenn der Magnet ruhet und der Kreis vorwärts gedreht wird, oder wenn der Kreis ruhet und der Magnet rückwärts gedreht wird. Man kann daher im Mittelpunkte des ruhenden Kreises eine Magnetnadel aufhängen und schwingen lassen und durch diese schwingende Nadel eine elektromotorische Kraft auf den Kreis ausüben, und dabei können der Kreis und die Magnetnadel bei A ganz gleiche Stellung erhalten, wie der Kreis und die Magnetnadel bei B.

Bei dieser gleichen Gestaltung und gleichen Aufstellung beider Kreise und ihrer beiden Nadeln steht endlich einer völligen Vereinigung gar nichts im Wege, weil nämlich die magnetoelektrische Wirkung der Nadel auf den Kreis und die elektromagnetische Wirkung des Kreises auf die Nadel ohne gegenseitige Störung in derselben Nadel und in demselben Kreise nach dem Principe der Dämpfung coexistieren können. Man braucht dann eine einzige Nadel, welche in Schwingung gesetzt wird und dadurch auf einen in sich geschlossenen Kreis, in dessen Mittelpunkte sie sich befindet, nach magnetoelektrischen Gesetzen eine elektromotorische Kraft ausübt, welche in diesem Kreise einen galvanischen Strom hervorbringt, der auf dieselbe Nadel nach elektromagnetischen Gesetzen zurückwirkt, von welcher er erregt worden war, und der dadurch eine Dämpfung oder Abnahme der Schwingungsbogen der schwingenden Nadel hervorbringt. Nach dieser Vereinfachung genügt die Beobachtung der Schwingungsbogen, durch deren Grösse die Grösse der elektromotorischen Kraft und durch deren Abnahme die Stärke des inducierten Stroms bestimmt werden kann. Die zweite und dritte Versuchsreihe werden Beispiele geben, wie auch nach dieser Methode der Widerstand einer Kette nach absolutem Maasse gemessen werden kann.

Wir gehen nun zu der Beschreibung der nach den aus einander gesetzten Methoden ausgeführten Versuche über und werden zuerst die nach der ersten Methode gemachten Versuche zusammenstellen.

13.

Erste Methode.

Zur Ausführung der Versuche nach der ersten Methode wurden folgende Instrumente eingerichtet, nämlich: 1) der Erdinductor oder ein Drahtring, in welchem durch Drehung von dem Erdmagnetismus ein galvanischer Strom erregt wurde; 2) ein Multiplicator, dessen Drahtenden mit denen des Erdinductors verbunden waren; 3) ein kleines Magnetometer, dessen Nadel im Mittelpunkte des Multiplicators aufgehangen wurde. Ueber diese drei Instrumente ist Folgendes zu bemerken.

1) Der Erdinductor.

Der zum Erdinductor verwendete Kupferdraht hatte mit Einschluss der Wolle, mit welcher er übersponnen war, ein Gewicht von

16,533 Grammen,

wovon fast 500 Gramme auf die Wolle kamen. Dieser Draht wurde auf ein Holzgestell aufgewunden, welches nahe die Gestalt eines regulären Sechsecks hatte. Alle Drahtwindungen zusammen bildeten einen Ring mit rectangulärem Querschnitt, dessen eine auf die Ringebene senkrechte Seite 64 Millimeter, die andere etwa 16 Millimeter lang war. Die Länge eines um das Holzgestell, ehe der Draht aufgewunden war, gelegten Bandes ergab den Umfang = 3067 Millimeter; die Länge eines um den aufgewundenen Draht gelegten Bandes ergab den Umfang = 3170 Millimeter. Der Draht bildete 7 Lagen über einander, jede mit 22 bis 23 Umwindungen, die 7te oder oberste Lage war nicht voll und hatte bloss 10 Umwindungen, was zusammen

145 Umwindungen

gab. Die Länge der beiden überstehenden Drahtenden betrug zusammen genommen 550 Millimeter. Hieraus ergab sich, mit Berücksichtigung der geringen Abweichung der Form von einem regulären Sechseck, die Summe der Flächen, welche von den Projectionen dieser 145 Umwindungen auf die Ringebene begrenzt wurden, zu

104,924,000 Quadratmillimeter.

Nach der Aufwindung des Drahtes wurden an zwei gegenüberstehenden Ecken des Sechsecks zwei starke Holzbacken, welche den Kupferring umschlossen; am Holzgestelle befestigt, jede derselben war mit

einem starken, runden, nach aussen gekehrten Zapfen versehen, um welche der Ring gedrehet werden konnte, wenn er mit diesen Zapfen in die Lager eines grossen, aus Balken sehr fest zusammengefügten Holzgestelles eingelegt wurde. Die von diesen Zapfen gebildete, der Ringebene parallele Drehungsaxe war vertical. Der eine dieser beiden Zapfen war hohl und durch denselben wurden die beiden Drahtenden durchgeführt und am Ende befestigt. Diese beiden am drehbaren Zapfen befestigten Drahtenden wurden mit 2 Spiralfedern von Messing verbunden, welche sich an dem festen Holzgestelle endigten, wo die Verbindungsdrähte eingeklemmt waren, welche den Inductor mit dem Multiplicator verbanden. Auf diese Weise war jede lockere Verbindung vermieden, welche eine Unbestimmtheit des Widerstandes der Kette verursachen konnte, und es war zugleich eine Drehung des Inductors im Halbkreis, vorwärts oder rückwärts, gestattet, während die übrigen Theile der Kette unbewegt blieben. Am andern Zapfen war eine lange Kurbel für die Drehung angebracht, welche am Ende jeder Drehung durch einen festen, am Holzgestell angebrachten Zahn arretiert wurde. Die Stellung dieser Sperrzähne wurde so reguliert, dass die Drehung des Inductors genau zwei rechte Winkel betrug, und dass die verticale Ringebene am Anfang und am Ende jeder Drehung genau senkrecht gegen den magnetischen Meridian war.

2) Der Multiplicator.

Der zum Multiplicator verwendete Kupferdraht hatte mit Einschluss der Wolle, mit welcher er übersponnen war, ein Gewicht von

157,430 Grammen,

wovon 4540 Gramme auf die Wolle kamen. Dieser Draht wurde auf eine hölzerne Rolle aufgewunden, welche äusserlich von einer Cylinderfläche, deren Halbmesser

303,51 Millimeter

betrug, begrenzt wurde. Der darauf gewundene Draht lag zwischen zwei parallelen hölzernen Schutzwänden, welche 202,05 Millimeter von einander abstanden. Der mittlere Halbmesser einer die äusserste Lage von Drahtwindungen begrenzenden Fläche war 374,41 Millimeter, wonach der rectanguläre Querschnitt des von allen Umwindungen gebildeten Ringes 202,05 Millimeter lang und 70,9 Millimeter breit war. Der Draht bildete 28 Lagen über einander, jede von 66 bis 68

Umwindungen. Die 28ste oder oberste Lage war nicht voll und hatte bloss 44 Umwindungen, was zusammen

1854 Umwindungen

gab. An der letzten Umwindung fehlten 155 Millimeter. Die Länge der beiden überstehenden Enden betrug zusammen

1340 Millimeter.

Dieser Multiplicator wurde so aufgestellt, dass seine Ebene mit dem magnetischen Meridian zusammenfiel.

3) Das kleine Magnetometer.

Die Nadel des kleinen Magnetometers war ein gehärteter und magnetisirter Stahlcylinder, 60 Millimeter lang und 6,2 Millimeter dick, in ihrer Mitte mit einem messingenen Bügel versehen, an dem sie aufgehangen wurde, und der einen runden Planspiegel von 30 Millimeter Durchmesser trug, dessen Normale mit der magnetischen Axe einen rechten Winkel bildete. Bei der angegebenen Länge der Nadel, welche noch nicht den 10ten Theil des Durchmessers des Multiplicators betrug, kommt der Einfluss der eigenthümlichen Vertheilung des Magnetismus nicht mehr in Betracht und braucht daher nicht in Rechnung gezogen zu werden. Die Nadel war an beiden Enden durch zwei, 31 Millimeter lange Messingstifte verlängert, welche zwei Messingkugeln von 11,7 Millimeter Durchmesser trugen. Diese Gewichte dienten zur Vergrösserung des Trägheitsmomentes der Nadel, wodurch die Schwingungsdauer eine für die Beobachtung bequeme Grösse erhielt. Diese Nadel wurde an vier zu einem Faden vereinigten Coconfäden aufgehangen, welche an der inneren Wand des Multiplicators so befestigt wurden, dass die Mitte der Nadel im Mittelpunkte des Multiplicators zu liegen kam. Der von dem Multiplicator umschlossene Raum, in dessen Mitte die Magnetnadel schwebte, wurde endlich durch zwei von beiden Seiten angebrachte Holzdeckel in ein geschlossenes Gehäuse verwandelt. In dem einen dieser Deckel war eine kleine Oeffnung vor dem Spiegel der Nadel, welche mit einem planparallelen Glase verschlossen wurde. In der Verticalebene der Spiegelnormale wurde in etwa 4 Meter Entfernung das Ablesungsfernrohr des Magnetometers aufgestellt und senkrecht gegen die Spiegelnormale eine Scale darauf befestigt, deren Horizontalabstand vom Spiegel

4087,5 Millimeter

betrug und deren Bild durch das auf den Spiegel gerichtete Fernrohr beobachtet werden konnte.

14.

Beobachtungen.

Mit diesen Instrumenten wurden nun folgende Beobachtungen gemacht. Es wurde der Inductor so gestellt, dass seine Ebene mit dem magnetischen Meridiane zusammenfiel, und die Magnetnadel zur Ruhe gebracht. Darauf wurde der Inductor plötzlich um 90° gedreht. Dadurch wurde die Nadel in Schwingung gesetzt und es wurde mit dem Fernrohr der Stand der Nadel bei ihrer grössten positiven Elongation, welche sie nach einer halben Schwingungsdauer erreichte, an der Scale beobachtet. Nach Verlauf von $1\frac{1}{2}$ Schwingungsdauer gelangte die Nadel zu ihrer grössten negativen Elongation, welche ebenfalls an der Scale beobachtet wurde. Hierauf wurde in dem Augenblicke, wo die wieder vorwärts schwingende Nadel ihren ursprünglichen Ruhestand passierte, d. i. 2 Schwingungsdauern nach Beginn der Versuche, der Inductor rückwärts um 180° gedreht. Die schwingende Nadel wurde dadurch mitten in ihrer Bewegung arretiert und rückwärts geworfen, worauf nun wieder zuerst ihre grösste negative und sodann ihre grösste positive Elongation an der Scale beobachtet wurde. Nach Verlauf von 4 Schwingungsdauern, in dem Augenblicke, wo die Nadel von ihrer letzten Elongation zurückkehrend ihren ursprünglichen Ruhestand passierte, wurde der Inductor wieder um 180° vorwärts bewegt, worauf die nämlichen Elongationsbeobachtungen gemacht wurden, wie das erste Mal, und auf diese Weise wurden die Versuche fortgesetzt, bis eine hinreichende Beobachtungsreihe erhalten wurde. Die folgende Tafel umfasst 4 solche Beobachtungsreihen. Für jede Reihe sind in der ersten Columne die an der Scale beobachteten Elongationen der Reihe nach unter einander gestellt. In der zweiten Columne sind die Mittelwerthe aus je zwei auf einander folgenden positiven oder negativen Elongationen beigefügt worden. In der dritten Columne endlich sind die Unterschiede der grössten positiven und negativen Elongationen oder die Grösse der ganzen Schwingungsbogen und unter jeder Reihe deren Mittelwerth angegeben.

Erste Reihe.			Zweite Reihe.			Dritte Reihe.			Vierte Reihe.		
467,1			467,1			463,0			462,0		
540,7	543,70		540,5	543,65		536,7	539,65		534,7	538,20	
546,7		80,10	546,8		79,65	542,6		80,40	541,7		80,00
461,4	463,60		461,3	464,00		456,6	459,25		455,3	458,20	
465,8		79,75	466,7		79,55	461,9		80,35	461,1		79,75
540,6	543,35		540,8	543,55		537,6	539,60		535,1	537,95	
546,1		79,25	546,3		79,90	541,6		79,55	540,8		79,50
462,3	464,10		461,8	463,65		458,3	460,05		456,0	458,45	
465,9		79,45	465,5		80,00	461,8		79,70	460,9		79,50
541,4	543,55		542,1	543,65		537,7	539,75		535,3	537,95	
545,7		79,75	545,2		79,70	541,8		79,95	540,6		80,05
462,3	463,80		462,8	463,95		457,9	459,80		456,0	457,90	
465,3		79,70	465,1		79,85	461,7		79,85	459,8		79,85
542,0	543,50		542,3	543,80		537,6	539,65		536,1	537,75	
545,0		79,45	545,3		80,10	541,7		79,70	539,4		79,55
462,8	464,05		462,7	463,70		458,2	459,95		456,8	458,20	
465,3		79,45	464,7		79,80	461,7		80,10	459,6		79,65
542,0	543,50		542,3	543,50		537,6	540,05		536,0	537,85	
545,0		79,65	544,7		79,75	542,5		80,05	539,7		79,70
462,9	463,85		462,8	463,75		457,3	460,00		456,5	458,15	
464,8		79,85	464,7		79,60	462,7		79,50	459,8		79,60
542,7	543,70		541,9	543,35		536,6	539,50		535,8	537,75	
544,7		79,45	544,8		79,75	542,4		79,75	539,7		79,55
463,4	464,25		462,3	463,60		457,2	459,75		456,4	458,20	
465,1		79,70	464,9		79,85	462,3			460,0		79,55
542,6	543,95		541,3	543,45					535,7	537,75	
545,3		79,75	545,6						539,8		
462,8	464,20										
465,6											
Mittel 79,64			Mittel 79,79			Mittel 79,90			Mittel 79,69		

Der Mittelwerth für den ganzen Schwingungsbogen aus allen Beobachtungen ist folglich 79,755 Scalentheile, wofür die Abmessung

79,4 Millimeter

gab. Dieses Resultat ist aber noch um $\frac{1}{2}$ Millimeter zu vergrössern, wenn es von dem Einflusse unabhängig gemacht werden soll, welchen die Dauer der Drehung des Inductors darauf hatte: man erhält dann 79,9 Millimeter.*)

*) Die Drehung des Inductors liess sich bei seiner Grösse nicht so schnell bewerkstelligen, dass ihre Dauer gegen die Schwingungsdauer der Nadel zu vernachlässigen wäre. Sie wurde daher mit möglichster Gleichförmigkeit immer in 2 Secunden ausgeführt. Die Intensität des inducirten Stroms lässt sich hiernach für jeden Augenblick der Drehung bestimmen und wird durch $i \sin \frac{\pi}{2} \theta$ dargestellt, wenn i die Intensität in der Mitte der Drehung bezeichnet und die Zeit θ von Anfang der Drehung an gerechnet wird. Dieser veränderlichen, 2 Secunden lang dauernden Induction kann, mit fast gleicher Wirkung, eine gleichförmige Induction substituiert werden,

Zur Vervollständigung der Messung wurde die Schwingungsdauer der Nadel beobachtet und aus 300 Schwingungsdauern die Dauer einer Schwingung $= 10,2818$ Secunden gefunden.

Ferner wurde das Verhältniss der magnetischen Directionskraft zu der des Fadens gefunden wie

$$1770 : 1 .$$

Da endlich in dem Saale, in welchem diese Instrumente aufgestellt waren, und in den angrenzenden Zimmern andere Magnete sich befanden, welche nicht hatten entfernt werden können, so liess sich nicht annehmen, dass die Stärke des horizontalen Theils des Erdmagnetismus, welcher in dem Inductor den Strom erregte, der Stärke des horizontalen Theils des Erdmagnetismus, welcher auf die Nadel im Mittelpunkte des Multiplicators wirkte, ganz gleich wäre. Daher wurden beide mit einander dadurch verglichen, dass die Schwingungsdauer einer und derselben Nadel an beiden Orten unmittelbar nach einander beobachtet wurde, und es ergab sich diese Schwingungsdauer

im Mittelpunkte des Dämpfers $= 2,9095$ Secunden,
„ Inductors $= 2,9126$ „ „

Umgekehrt wie die Quadrate dieser Schwingungsdauern verhält sich die Stärke des Erdmagnetismus an diesen beiden Orten, d. i. wie

$$100000 : 99787 .$$

---

welche $\frac{4}{\pi}$ Secunden lang einen Strom von der Intensität i erzeugt. Dieser Strom beginnt $\frac{2}{\pi}$ Secunde früher auf die Nadel zu wirken, als die Nadel zum magnetischen Meridiane gelangt und dort umkehrt, und darauf verfliessen nochmals $\frac{2}{\pi}$ Secunde, ehe der Strom aufhört. Bezeichnet α die grösste Elongation der Nadel und t ihre Schwingungsdauer, so wird die Ablenkung der Nadel in dem Augenblicke, wo der Strom beginnt oder wo er aufhört, nahe durch $\frac{\alpha}{t}$ ausgedrückt und die mittlere Ablenkung für die ganze Dauer der Induction durch $\frac{\alpha}{3t}$. Die einer solchen Ablenkung entsprechende Beschleunigung der Nadel durch ihre Directionskraft ist $= \frac{\alpha}{3t} \cdot \frac{\pi\pi}{tt}$, und die während der Induction dadurch hervorgebrachte Geschwindigkeit ist $= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi\pi\alpha}{3t^3}$. Die Hälfte davon müsste zur Geschwindigkeit $\frac{\pi}{t}\alpha$, welche der Nadel, ihrer Elongation α nach, beim Durchgang durch den Meridian zukommt, hinzugefügt werden, um diejenige Geschwindigkeit zu erhalten, welche die Nadel im Augenblicke nach der Umkehrung besitzen würde, wenn die Induction momentan geschähe. Wie sich nun die Geschwindigkeiten $\frac{\pi}{t}\alpha : \left(1 + \frac{2}{3tt}\right)\frac{\pi}{t}\alpha$ verhalten, ebenso verhält sich die beobachtete Elongation der Nadel α zu derjenigen Elongation, welche bei momentaner Induction stattgefunden haben würde. Letztere ergiebt sich hiernach $= \left(1 + \frac{2}{3tt}\right)\alpha$. Da nun der ganze Schwingungsbogen $2\alpha = 79,4$ Millimeter und $t = 10,2818$ war, so folgt hieraus der oben angeführte Werth $= 79,9$ Millimeter.

Dies sind alle Versuche, welche nach der ersten Methode nöthig waren, um den Widerstand der ganzen Kette, welche aus dem Drahte des Inductors, des Dämpfers und aus den beiden Verbindungsdrähten bestand, nach absolutem Maasse zu bestimmen. Ehe zur Berechnung der Grösse des Widerstands der Kette aus diesen Versuchen übergegangen wird, sollen auch die nach der zweiten Methode gemachten Versuche zusammengestellt und vorausgeschickt werden.

15.

Zweite Methode.

A.

Die zweite Methode gewährt die Vereinfachung, dass von den bei der ersten gebrauchten Instrumenten der Erdinductor ganz entbehrlich gemacht wird. Bei den folgenden Versuchen bildete daher der Draht des oben beschriebenen Multiplicators die ganze Kette, indem seine Enden unmittelbar mit einander verbunden wurden. Die Aufstellung des Multiplicators, welcher dadurch in einen Dämpfer verwandelt worden war, blieb unverändert. Dagegen wurde die Nadel im Magnetometer mit einer grösseren und stärkeren vertauscht, durch deren Schwingungen eine grössere elektromotorische Kraft auf die geschlossene Kette ausgeübt werden konnte. Diese Nadel bestand aus 9 parallelopipedischen Magnetstäben, jeder 90 Millimeter lang und 9 Millimeter breit und dick, welche mit parallel gerichteten Axen und durch 5 Millimeter weite Zwischenräume von einander geschieden, zu einem festen System verbunden und zur Beobachtung der Schwingungen mit einem Spiegel versehen waren.

Mit diesen vereinfachten Instrumenten wurden nun folgende Versuche gemacht. Es wurde damit begonnen, dass die Drahtenden des Dämpfers von einander getrennt wurden. Alsdann wurde die Nadel in Schwingung gesetzt und nach der von Gauss in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837» gegebenen Anleitung die Schwingungsdauer der Nadel und die Abnahme ihrer Schwingungsbogen oder deren logarithmisches Decrement bestimmt. Darauf wurden die Drahtenden der Kette verbunden oder der Dämpfer geschlossen und die nämlichen Beob-

achtungen wiederholt. Sodann wurde der Dämpfer wieder geöffnet und auf diese Weise mehrmals abgewechselt. Die Resultate dieser Versuche sind in der folgenden Tafel zusammengestellt worden, wo in der ersten Columne unter *A* das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbogen bei geschlossenem Dämpfer, in der zweiten Columne das nämliche bei offenem Dämpfer, in der dritten Columne unter *t* die zugehörige Schwingungsdauer angegeben ist. Unter den Columnen sind die Mittelwerthe aus den wiederholten Bestimmungen beigefügt.

A.	*B.*	*t.*
0,028645	0,000460	9,1128
0,027955	0,000360	9,1148
0,028565	0,000380	9,1107
0,028388	0,000400	9,1128

Zur Vervollständigung der Messung wurden endlich noch folgende Versuche gemacht, um den Magnetismus der Nadel zu bestimmen und auch von dessen Vertheilung, so weit es nöthig schien, Kenntniss zu erlangen. Es wurde nämlich möglichst nahe an der Stelle, wo die schwingende Nadel sich befunden hatte, eine kleine Boussole aufgestellt und die Ablenkung v_1 derselben beobachtet, wenn jene Nadel ihr genähert wurde. Eben so wurde die Ablenkung v_2 beobachtet, nachdem die Nadel um ihren Mittelpunkt um 180° gedreht worden war. Endlich wurden die correspondierenden Ablenkungen v_3 und v_4 beobachtet, als die Nadel parallel mit sich selbst in gleiche Entfernung auf die entgegengesetzte Seite von der Boussole versetzt wurde, und daraus der Werth von

$$v = \tfrac{1}{4}(v_1 - v_2 + v_3 - v_4)$$

berechnet. Diese Versuche wurden nun gemacht bei verschiedenen Entfernungen von der Boussole und bei verschiedener Richtung der Geraden, welche durch die Mitte der Nadel und der Boussole ging, nämlich in den Entfernungen von 400, 500 und 600 Millimetern, als jene Gerade senkrecht auf dem magnetischen Meridiane war, und in der Entfernung von 400^{mm}, als sie dem magnetischen Meridiane parallel

war. Die magnetische Axe der ablenkenden Nadel war stets senkrecht gegen den magnetischen Meridian. In der folgenden Tafel sind die Resultate dieser Versuche zusammengestellt. Nr. 1, 2, 3 beziehen sich auf die Fälle, wo die Richtung der Geraden von der Mitte der Nadel zur Mitte der Boussole auf dem magnetischen Meridiane senkrecht war, Nr. 4. auf den Fall, wo diese Gerade dem magnetischen Meridiane parallel war. In der zweiten Columne unter R ist die Entfernung der Mittelpunkte beider Nadeln, in der dritten Columne der für diese Entfernung gefundene Werth von v angegeben.

Nr.	R	v
1.	400mm.	32° 37′ 52″5
2.	500	18 1 52,5
3.	600	19 37 7,5
4.	400	17 24 45,0

Hierbei ist zu bemerken, dass diese Versuchsreihe einige Zeit später gemacht wurde als die obigen Beobachtungen der im Dämpfer schwingenden Nadel, und dass daher nicht angenommen werden konnte, dass das Verhältniss des Nadelmagnetismus zum Erdmagnetismus in dieser Zeit ganz unverändert geblieben wäre. Deshalb war schon in den Zwischenzeiten zwischen den einzelnen Sätzen der obigen Schwingungsbeobachtungen einer von diesen Ablenkungsversuchen gemacht worden, welcher dazu benutzt werden konnte, das aus der letzten vollständigen Reihe von Ablenkungsbeobachtungen sich ergebende Verhältniss des Nadelmagnetismus zum Erdmagnetismus auf diejenige Zeit zu reduciren, wo obige Schwingungsbeobachtungen gemacht wurden. Aus der Vergleichung der correspondierenden Ablenkungen ergab sich nämlich das Verhältniss:

$$10293 : 10000,$$

woraus hervorgeht, dass der Nadelmagnetismus in der Zwischenzeit merklich abgenommen hatte. Das Verhältniss der magnetischen Directionskraft zu der des Fadens bei den Schwingungsbeobachtungen war:

$$68 : 1.$$

Dies sind alle Versuche, welche nach der zweiten Methode nöthig waren, um den Widerstand der Kette oder des Drahtes, welcher den Dämpfer bildete, nach absolutem Maasse zu bestimmen.

B.

Aus den unter (A.) zusammengestellten Versuchen geht hervor, dass eine Nadel, deren Länge fast nur den 7ten Theil des Durchmessers des Dämpfers betrug und die sehr kleine Schwingungen machte, dennoch eine elektromotorische Kraft auf den Dämpfer ausübte, welche hinreichte, einen Strom zu erregen, dessen Rückwirkung auf die Nadel nicht bloss wahrgenommen, sondern genau gemessen werden konnte. Sollen diese Versuche nun einer Berechnung des Widerstands der Kette nach absolutem Maasse zum Grunde gelegt werden, so entsteht einige Complication dadurch, dass auch bei den mässigen Dimensionen der Nadel im Vergleiche zum Durchmesser des Dämpfers, die Vertheilungsweise des Magnetismus in der ersteren nicht ganz ausser Acht gelassen werden darf. Diese Complication wird ganz vermieden, wenn man eine kleinere Nadel im Dämpfer aufhängt, wenn die kleinere Nadel gleich viel Magnetismus, wie die grössere, besitzt.

In dem physicalischen Institute zu Leipzig befand sich ein natürlicher Magnet von geringer Grösse und, im Verhältniss zu dieser, von grosser Stärke, welcher nebst Fassung 40 Gramme wog und 24 Millimeter lang war. Wegen dieser Kleinheit und Stärke war er zur Magnetometernadel für diese Versuche sehr geeignet, und der Durchmesser des Dämpfers hätte, ohne eine genauere Erforschung der Vertheilungsweise des Magnetismus nöthig zu machen, beträchtlich verkleinert werden können. Die zugemessene beschränkte Zeit, in welcher die grosse Drahtmasse des Dämpfers zu diesen Versuchen disponibel war, gestattete aber keine Umgestaltung des Dämpfers und es wurde daher jener natürliche Magnet als Nadel in den unveränderten Dämpfer aufgehangen und eine zweite Versuchsreihe damit ausgeführt, die hier gleichfalls zusammengestellt werden soll, weil sie einen interessanten Beweis von der Feinheit giebt, welche die Beobachtungen über die Abnahme der Schwingungsbogen mit dem Dämpfer gewähren, um die Wirkungen sehr schwacher elektromotorischer Kräfte noch zu erkennen und selbst mit ziemlicher Genauigkeit zu messen. Dieser natürliche Magnet wurde zu diesem Zwecke mit Fassung versehen zur Befestigung des Spiegels und zur Aufhängung an einem Faden in der Mitte des Dämpfers. Im Uebrigen blieben die Instrumente unverändert und die Versuche wurden damit ganz auf dieselbe Weise, wie die vor-

hergehenden, ausgeführt. Die folgende Tafel giebt die Uebersicht der damit gewonnenen Resultate, nämlich unter *A* das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbogen bei geschlossenem Dämpfer, unter *B* das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbogen bei offenem Dämpfer, unter *t* die zugehörige Schwingungsdauer.

A.	*B.*	*t.*
0,00601	0,00254	3,955
0,00613	0,00267	3,954
0,00615	0,00267	3,953
0,00605	0,00266	3,949
0,006085	0,002635	3,9527

Zur Vervollständigung dieser Versuche wurde der Magnetismus des kleinen Magnets durch besondere Versuche auf ähnliche Weise bestimmt, wie in der vorhergehenden Reihe; da aber bei diesem kleinen Magnet bloss das Moment desselben zu bestimmen nöthig war, so wurden diese Versuche auf zwei verschiedene Abstände von dem Mittelpunkte der kleinen Hülfsboussole beschränkt, in der Richtung senkrecht auf den magnetischen Meridian östlich und westlich von der Boussole. Die folgende Tafel giebt eine Uebersicht der dadurch erlangten Resultate, unter *R* den Abstand der Mitte des natürlichen Magnets von der Mitte der Boussole, unter *v* die Ablenkung der Boussole auf dieselbe Weise, wie in der vorigen Reihe, berechnet.

R	*v*
$180^{mm},08$	20° 42′ 0″
240,18	9 4 52

Die Resultate dieser Beobachtungen gelten für eine Temperatur von 20° R. des Kupferdrahts, welches im Mittel die Temperatur während der Beobachtungen in diesem und im vorigen Artikel gewesen ist.

Durch diese Versuche sind die Data zur Bestimmung des Widerstands der Kette nach absolutem Maasse vollständig gegeben.

16.

Regeln zur Berechnung des Widerstands aus den vorhergehenden Beobachtungen.

Wenn die Verhältnisse, unter welchen die vorhergehenden Beobachtungen ausgeführt worden sind, denjenigen Verhältnissen genau entsprächen, welche in dem Art. 11 gegebenen Schema zur absoluten Widerstandsbestimmung eines Leiters angenommen worden waren, so würden die Regeln zur Berechnung des Widerstands aus den mitgetheilten Beobachtungs-Resultaten in der am Schlusse jenes Schema's gefundenen Formel
$$w = \frac{\pi^2 r^4}{\alpha R^3 t}$$
enthalten sein; denn es würde alsdann der Werth der Zahl α, welche die Elongationsweite der von der Ruhe ab in Schwingung gesetzten Nadel in Theilen des Halbmessers angiebt, ferner der Werth der Zahl $\frac{r}{R}$, welche das Verhältniss der Halbmesser der kreisförmigen Leiter A und B zu der Entfernung BC angiebt, und endlich die Geschwindigkeit $\frac{r}{t}$, mit welcher der Halbmesser der kreisförmigen Leiter während einer Schwingung der Nadel durchlaufen würde, unmittelbar durch die Beobachtungs-Resultate gegeben sein. Weil nun aber die vorhergehenden Beobachtungen, nach der gegebenen Beschreibung, nicht genau unter den im erwähnten Schema angenommenen Verhältnissen ausgeführt worden sind, so bedürfen jene einfachen Regeln einiger Abänderungen, um Anwendung auf die vorliegenden Beobachtungen zu finden.

Einige dieser Abänderungen ergeben sich leicht, wenn man in der für die Gleichung $w = \frac{\pi^2 r^4}{\alpha R^3 t}$ gegebenen Ableitung die Halbmesser der beiden kreisförmigen Leiter ungleich annimmt und sie durch r' und r'' unterscheidet, wenn man ferner die Zahl ihrer Umwindungen m und n in Rechnung bringt, wenn man ausserdem die Elasticität des Fadens, an welchem die Nadel aufgehangen wurde, berücksichtigt, aus welcher sich eine Directionskraft für die Nadel ergiebt, die sich zu ihrer magnetischen Directionskraft verhält wie $\theta : 1$, und wenn man endlich die ungleiche Stärke des Erdmagnetismus an den beiden Orten A und B beachtet, deren Verhältniss durch $\frac{T'}{T''}$ dargestellt werde. Man findet dann, dass in obiger Formel das Product $r'r''$ für das Quadrat rr zu setzen und der ganze Werth für w noch mit $\frac{mn}{(1+\theta)} \cdot \frac{T'}{T''}$ zu multiplicieren ist, folglich
$$w = \frac{mn}{(1+\theta)} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{\pi^2 r'r'r''r''}{\alpha R^3 t}.$$

Ausserdem kommen nun für die nach der ersten Methode ausgeführten Beobachtungen noch folgende wesentliche Modificationen in Betracht, nämlich erstens, dass die Nadel aus der Entfernung $BC = R$ in den Mittelpunkt des Kreises B selbst versetzt wurde, wodurch die beobachtete Elongationsweite in dem Verhältniss von

$$r'^3 : 2R^3$$

vergrössert wird. Hierbei lässt sich zugleich der Umstand mit berücksichtigen, dass der Kreis A statt um einen Quadranten jedes Mal um zwei Quadranten gedreht wurde, wodurch die beobachtete Elongationsweite ebenfalls vergrössert wurde und zwar in dem Verhältniss von

$$1 : 2.$$

Bezeichnet also α gegenwärtig diese vergrösserte Elongationsweite, so ist demgemäss

$$w = \frac{mn}{1+\theta}\,\frac{T'}{T''}\cdot\frac{4\pi^2 r'r'}{\alpha r''t}$$

zu setzen. Zweitens kommt die Vervielfältigung der Umwindungen beider Kreise, wodurch sie in Ringe, welche einen bedeutenden Querschnitt besitzen, verwandelt werden, in Betracht. Für den Ring A genügt es, mit Rücksicht darauf, dass er keine genaue Kreisform hatte, statt $m\pi r'r'$ die Summe der Flächen zu setzen, welche von den Projectionen aller seiner Umwindungen auf die Ringebene begrenzt werden, folglich, wenn diese Summe mit S bezeichnet wird,

$$w = \frac{n}{1+\theta}\cdot\frac{T'}{T''}\cdot\frac{4\pi\pi S}{\alpha r''t}.$$

Für den Ring B dagegen ist der äussere Halbmesser a'', der innere Halbmesser a', die Höhe des Ringes $2b'$ und ausserdem in Beziehung auf die Vertheilung des Magnetismus M der Nadel, wenn

$$M = 2e'\mu$$

gesetzt wird, wo $\pm\mu$ die Menge des nördlichen oder südlichen magnetischen Fluidums bezeichnet, welche dem bekannten Gaussischen Theoreme von der idealen Vertheilung des Magnetismus gemäss an der Oberfläche der Nadel verbreitet gedacht werden kann, die Länge e' in Rechnung zu bringen, was dadurch geschieht, dass statt $\frac{1}{r''}$ folgender Ausdruck gesetzt wird:

$$\frac{1}{a''-a'}\left\{\log\frac{a''+\sqrt{(a''a''+b'b')}}{a'+\sqrt{(a'a'+b'b')}}+\frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''a''+b'b')^{\frac{3}{2}}}-\frac{a'^3}{(a'a'+b'b')^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{e'e'}{b'b'}\right\}.$$

Die hier angeführten Abänderungen der Art. 11 gefundenen Formel, welche nothwendig sind, wenn der Widerstand der Kette aus den Art. 14 beschriebenen Versuchen berechnet werden soll, sind so zahlreich, dass ich es vorziehe, statt auf eine nähere Erörterung und Begründung derselben einzugehen, die beiden Gleichungen, welche im folgenden Art. 17 zur Berechnung des Widerstands aus den Art. 14 beschriebenen Versuchen gebraucht werden, nämlich:

$$w = \frac{n}{1+\theta} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi\pi S}{ar''t}$$

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a''+b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a'+b'b')}} + \tfrac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''a''+b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a'+b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot \frac{e'e'}{b'b'} \right\}$$

unmittelbar aus den elektromagnetischen und magnetoelektrischen Grundgesetzen abzuleiten. Man findet diese Ableitung in Beilage *D.* am Ende der Abhandlung.

Ferner werden im 18. Artikel zur Berechnung des Widerstands aus den Art. 15 beschriebenen Versuchen folgende Gleichungen gebraucht werden:

$$w = \frac{nn\pi\pi}{1+\theta} \cdot \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\lambda} \cdot \text{tang}\, v_0 \cdot \frac{r''}{t}$$

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a''+b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a'+b'b')}} + \tfrac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''a''+b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a'+b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot \frac{e'e'}{b'b'} \right\},$$

worin λ den natürlichen Logarithmus des beobachteten Verhältnisses zweier auf einander folgender Schwingungsbogen der Magnetometernadel in Folge der Dämpfung bei geschlossener Kette bezeichnet und tang v_0 statt $\frac{2M}{T''r''^3}$ geschrieben worden ist. Auch diese letzteren Gleichungen sind in der Beilage *D.* unmittelbar aus den elektromagnetischen und magnetoelektrischen Grundgesetzen abgeleitet worden.

Hiernach können wir nun zur Berechnung des Widerstands selbst aus den Art. 14 und 15 beschriebenen Versuchen übergehen.

17.

Berechnung des Widerstands aus der ersten Versuchsreihe.

Bei der Versuchsreihe Art. 14, welche nach der ersten Methode ausgeführt war, bestand die Kette aus dem Drahte des Inductors und

des Multiplicators und aus den beiden Verbindungsdrähten, und der zu berechnende Widerstand ist die Summe der Widerstände dieser vier Drähte.

Die unmittelbaren Ergebnisse der Art. 14 beschriebenen Versuche waren erstens die Grösse des mit dem Magnetometer gemessenen Schwingungsbogens, nämlich:

79,9 Millimeter

für einen Halbmesser von 8175 Millimeter Länge (= dem doppelten Horizontalabstande des Spiegels von der Scale). Hieraus ergiebt sich:

$$\alpha = \frac{79,9}{8175}\ .$$

Siehe darüber Beilage *C.*, wo die hier gebrauchte Zurückwerfungsmethode näher erörtert ist.

Zweitens die Grösse der Schwingungsdauer der Magnetometernadel

$$t = 10,2818 \text{ Secunden.}$$

Drittens der von der Elasticität des Aufhängungsfadens herrührende Theil der Directionskraft der Nadel, in Theilen ihrer magnetischen Directionskraft ausgedrückt,

$$\theta = \frac{1}{1770}\ .$$

Viertens das Verhältniss der Stärke des horizontalen Theils des Erdmagnetismus am Orte des Inductors T' zu der am Orte des Multiplicators T''

$$\frac{T'}{T''} = 0,99787.$$

Zu diesen unmittelbaren Ergebnissen der Beobachtungen sind ferner die Resultate der Abmessungen des Inductors und Multiplicators hinzuzufügen. Für den Inductor genügt das Resultat, dass die Summe der Flächen, welche von den Projectionen seiner 145 Umwindungen auf die Ringebene begrenzt wurden,

$$S = 104924000 \text{ Quadratmillimeter}$$

betrug.

Für den Multiplicator müssen folgende Resultate seiner Abmessung beigefügt werden:

innerer Halbmesser	$a' = 303,51$	Millimeter,
äusserer Halbmesser	$a'' = 374,41$	„
Breite	$2b' = 202,05$	„
Zahl der Umwindungen	$n = 1854.$	

Aus diesen Werthen von a', a'', b' ergiebt sich

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{a''-a'}\left\{\log\frac{a''+\sqrt{(a''a''+b'b')}}{a'+\sqrt{(a'a'+b'b')}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^2}{(a''a''+b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^2}{(a'a'+b'b')^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{e'e'}{b'b'}\right\}$$

$$\frac{1}{r''} = 0{,}0028352 + 0{,}000000015875 \,.\, e'e'$$

wo bei der Kleinheit der Nadel für e' einen approximativen Werth, von etwa 20 Millimetern, anzunehmen genügt, also $\frac{1}{r''} = 0{,}00284155$. Hieraus ergiebt sich dann

$$w = \frac{n}{1+\theta}\cdot\frac{T'}{T''}\cdot\frac{4\pi\pi S}{ar''t}$$

$$= \frac{1770}{1771}\cdot 1854 \cdot 0{,}99787 \cdot \frac{4\pi\pi \,.\, 104924000}{79{,}9 \,.\, 10{,}2818}\, 8175 \,.\, 0{,}00284155$$

oder

$$w = 2166 \,.\, 10^8 \,.$$

Durch das definierte Widerstandsmaass W und durch diese Zahl w ist also der Widerstand der Kette, welche aus dem Inductor- und dem Multiplicatordrahte nebst den beiden Verbindungsdrähten bestand, vollständig bestimmt, wobei nur zu bemerken ist, dass dieser absoluten Maassbestimmung das Millimeter als Raummaass und die Secunde als Zeitmaass zum Grunde liegt, was durch folgende Bezeichnung ausgedrückt wird:

$$2166 \cdot 10^8 \,\frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}} \;.$$

Verhält sich ein anderes Raummaass zum Millimeter, wie $1 : r$, ein anderes Zeitmaass zur Secunde, wie $1 : t$, so ist derselbe Widerstand, wenn diese neuen Maasse zum Grunde gelegt werden:

$$2166 \cdot 10^8 \cdot \frac{r}{t}$$

z. B. wenn die Meile als Raummaass zum Grunde gelegt wird, die sich zum Millimeter verhält, wie $1 : 0{,}000000135$:

$$29241 \,\frac{\text{Meile}}{\text{Secunde}} \,.$$

18.

Berechnung des Widerstands aus der zweiten Versuchsreihe.

Bei der zweiten Versuchsreihe, welche nach der zweiten Methode ausgeführt war, bestand die Kette bloss aus dem Drahte des Dämpfers, d. i. aus demjenigen Drahte, welcher in der vorhergehenden Versuchsreihe den Multiplicator bildete.

Die unmittelbaren Ergebnisse der Versuche waren:

Erstens die Grösse des logarithmischen Decrements der Abnahme der Schwingungsbogen, welches nach Abzug des vom elektromagnetischen Einflusse unabhängigen Theiles, nach gemeinen Logarithmen,

$$= 0{,}027988$$

gefunden worden ist; folglich, nach natürlichen Logarithmen,

$$\lambda = 0{,}064445\,.$$

Zweitens die Grösse der Schwingungsdauer der Magnetometernadel

$$t' = 9{,}1128$$

wobei noch zu bemerken war, dass die magnetische Directionskraft ungefähr um ihren 68ten Theil durch die Elasticität des Fadens vermehrt war, also

$$\theta = \tfrac{1}{68}\,.$$

Drittens die Grösse des Nadelmagnetismus im Verhältniss zum Erdmagnetismus war aus den in folgender Tafel enthaltenen Ergebnissen der Ablenkungsversuche zu entnehmen:

Nr.	R.	v.
1.	400mm	32° 37′ 52″ 5
2.	500	18 1 52, 5
3.	600	10 37 7, 5
4.	400	17 24 45

Die drei ersten Nummern beziehen sich auf die Versuche, bei welchen der Mittelpunkt der Magnetometernadel und ihre magnetische Axe mit demjenigen Perpendikel auf den magnetischen Meridian zusammenfiel, welches durch den Mittelpunkt der Hülfsboussole gelegt wurde; die vierte Nummer auf einen Versuch, wobei die Magnetometernadel zwar ebenfalls mit ihrer Axe senkrecht gegen den magnetischen Meridian lag, aber ihr Mittelpunkt in der durch den Mittelpunkt der Hülfsboussole dem magnetischen Meridiane parallel gelegten Geraden sich befand. Auch war ermittelt worden, dass das hieraus hervorgehende Verhältniss des Nadelmagnetismus zum Erdmagnetismus in dem Verhältniss

$$10000 : 10293$$

vergrössert werden muss, wenn es für die Zeit gelten soll, wo die Abnahme der Schwingungsbogen und die Schwingungsdauer der Magnetometernadel beobachtet worden waren.

Die Ableitung der Werthe von e' und v_0 in den zur Berechnung des Widerstands aufgestellten Formeln:

$$w = \frac{nn\pi\pi}{1+\theta} \operatorname{tang} v_0 \cdot \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\lambda} \cdot \frac{r''}{t}$$

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a'' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''a'' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{e'e'}{b'b'} \right\}$$

aus den eben angeführten Datis ist nun folgende. Man denkt sich die nach der S. 238 schon erwähnten idealen Vertheilungsweise an der Oberfläche der Nadel verbreiteten magnetischen Fluida jedes in seinem Mittelpunkte (Schwerpunkte) concentriert, d. i. in zwei Punkten, welche in der Entfernung e' von der Mitte der Nadel in einer mit der Richtung der magnetischen Axe parallelen Linie liegen und deren Abstand $= 2e'$ ist. Die Lage des Mittelpunkts der Nadel und ihrer magnetischen Axe gegen den Mittelpunkt der abgelenkten Boussole und gegen den magnetischen Meridian ist in obiger Tafel für jeden Versuch genau bestimmt. Hat nun f' für die Boussole gleiche Bedeutung wie e' für die Magnetometernadel, so leuchtet ein, dass für jede gegebene Ablenkung der Boussole v die Lage der 4 Punkte, in denen die magnetischen Fluida beider Nadeln concentriert gedacht werden, gegen einander und gegen den magnetischen Meridian durch e' und f' vollständig bestimmt werden, und dass sich dann, mit Hülfe des Gesetzes, nach welchem zwei Elemente des magnetischen Fluidums auf einander wirken, aus dem Verhältnisse des Magnetismus der Magnetometernadel M zum Erdmagnetismus T, das Verhältniss des Drehungsmoments, welches die Magnetometernadel, zu dem, welches der Erdmagnetismus auf die Boussole ausübt, bestimmen lasse. Diejenige Ablenkung v, für welche diese beiden Drehungsmomente sich entgegengesetzt gleich ergeben, ist die beobachtete, die dadurch in Abhängigkeit von e', f' und $\frac{M}{T}$ kommt. Die Gleichung, welche die Abhängigkeit dieser Grössen ausdrückt, ergiebt sich daraus für den Fall, wo die Gerade R, welche die Mittelpunkte beider Nadeln verbindet, auf den magnetischen Meridian senkrecht ist:

$$\frac{T}{M} \operatorname{tang} v = \frac{2}{R^3} + \frac{4e'e' - 6(1 - 5\sin v^2) f'f'}{R^5} + \ldots$$

für den Fall, wo R dem magnetischen Meridiane parallel ist,

$$\frac{T}{M} \operatorname{tang} v = \frac{1}{R^3} - \frac{3}{2} \, \frac{e'e' - (4 - 15 \sin v^2) f'f'}{R^5} + \ldots$$

Die Annahme von der Concentration der magnetischen Fluida ist nun aber nur dann zulässig, wenn diejenigen Glieder, welche mit R^7 oder mit höheren Potenzen dividiert sind, vernachlässigt werden dürfen. Da nun für jeden Versuch in obiger Tafel die Werthe von R und v gegeben sind, so giebt jeder Versuch eine Gleichung zwischen $e', f', \frac{M}{T}$, und folglich geben die 4 in obiger Tafel enthaltenen Versuche 4 Gleichungen zwischen diesen 3 Grössen, von denen drei zur Bestimmung dieser Grössen dienen und die vierte zur Controle, dass die Werthe von R wirklich so gross sind, dass die Glieder der höheren Ordnung vernachlässigt werden dürfen. Die Werthe obiger 3 Grössen, welche mit den Beobachtungen am besten harmonieren, sind:

$$e' = 33{,}715$$
$$f' = 14{,}856$$
$$\frac{M}{T} = 20143000.$$

Der letztere Werth von $\frac{M}{T}$ gilt für die Zeit, wo die Ablenkungsversuche gemacht wurden, und muss nach S. 242 mit 1,0293 multipliciert werden, wenn er für die Zeit gelten soll, wo die Schwingungsdauer und die Abnahme der Schwingungsbogen beobachtet worden sind; für letztere Zeit ergiebt sich also

$$\frac{2M}{T} = 41466000$$

Substituiert man ferner den gefundenen Werth von e' in der Gleichung

$$\frac{1}{r''} = 0{,}0028352 + 0{,}000000015875\, e'e',$$

welche auch für die zweite Versuchsreihe gilt, weil die Abmessungen des Dämpfers hier die nämlichen sind, wie die Abmessungen des Multiplicators in der ersten Versuchsreihe, so erhält man

$$\frac{1}{r''} = 0{,}0028532$$

oder

$$r'' = 350{,}48$$

und mit diesem Werthe

$$\frac{2M}{Tr''^3} = \operatorname{tang} v_0 = 0{,}96314.$$

Ausserdem ist, wie in der ersten Versuchsreihe,

$$n = 1854.$$

Hieraus ergiebt sich dann

$$w = \frac{nn\pi\pi}{1+\theta} \operatorname{tang} v_0 \cdot \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\lambda} \cdot \frac{r''}{t}$$
$$= \frac{68}{69} \cdot 1854^2\pi\pi \,.\, 0{,}96314 \cdot \frac{\pi\pi + 0{,}064445^2}{0{,}064445} \cdot \frac{350{,}48}{9{,}1128}$$

oder $$w = 1898 \, . \, 10^8 \, .$$

Durch das definierte Widerstandsmaass *W* und durch diese Zahl *w* ist also der Widerstand der Kette, welche bloss aus dem Dämpferdraht bestand, vollständig bestimmt.

19.

Berechnung des Widerstands aus der dritten Versuchsreihe.

Auch bei der dritten Versuchsreihe bestand die Kette, deren Widerstand bestimmt werden sollte, bloss aus dem Drahte des Dämpfers, und die Versuche waren nach der zweiten Methode ausgeführt worden. Der wesentliche Unterschied von der zweiten Versuchsreihe bestand daher bloss darin, dass der zur Magnetometernadel gebrauchte natürliche Magnet viel kleinere Dimensionen hatte, wodurch einerseits zwar die Rechnung vereinfacht wurde, weil bei so kleinen Dimensionen, im Vergleich zum Durchmesser des Dämpfers, die Art der Vertheilung des freien Magnetismus nicht in Betracht kommt; andererseits verlor aber dadurch die Messung an Präcision, weil der Magnetismus, so stark er auch im Verhältniss zur Grösse des Magnets war, doch fast nur den 19ten Theil von dem Magnetismus der grösseren Nadel betrug, wodurch die Dämpfung so geschwächt wurde, dass die Beobachtungen keine so feine Bestimmung des logarithmischen Decrements der Abnahme der Schwingungsbogen gestatteten.

Die unmittelbaren Ergebnisse der Versuche waren: Erstens die Grösse des logarithmischen Decrements für die Abnahme der Schwingungsbogen, welches, nach Abzug des vom elektromagnetischen Einflusse unabhängigen Theils, nach gemeinen Logarithmen

$$= 0{,}00345$$

gefunden worden ist, folglich, nach natürlichen Logarithmen,

$$\lambda = 0{,}007944 \, .$$

Zweitens, die Schwingungsdauer der Nadel

$$t' = 3{,}9527$$

Die Elasticität des Aufhängefadens konnte vernachlässigt werden, da sie die Directionskraft noch nicht um $\frac{1}{2000}$ vergrösserte.

Drittens, die Grösse des Nadelmagnetismus im Verhältnisse zum Erdmagnetismus war aus den in folgender Tafel zusammengestellten Ablenkungsversuchen zu entnehmen.

R.	v.
180,^mm^08	20° 42′ 0
240, 18	9 4 52

Die Linie R, welche die Mittelpunkte der ablenkenden und abgelenkten Nadel verband, war dabei senkrecht auf den magnetischen Meridian.

Hieraus folgt nach der in der „*Intensitas vis magneticae terrestris etc.*" von Gauss gegebenen Regel:

$$\text{tang } 20^0\ 42' = \frac{2M}{T} \cdot 180{,}08^{-3} + a \,.\, 180{,}08^{-5}$$

$$\text{tang } 9^0\ 4'\ 52'' = \frac{2M}{T} \cdot 240{,}18^{-3} + a \,.\, 240{,}18^{-5}$$

also $$\frac{2M}{T} = 2224660.$$

Es ist jedoch hierbei zu bemerken, dass bei dem geringen Grade von Genauigkeit, welchen diese mit so kleinen Magneten gemachten Ablenkungsversuche besitzen, die Elimination des zweiten, von der 5ten Potenz der Entfernung abhängigen Gliedes sehr unsicher ist, so dass ein ebenso genaues oder vielleicht noch genaueres Resultat gewonnen wird, wenn man dieses zweite Glied gar nicht berücksichtigt. Alsdann findet man

$$\text{tang } 20^0\ 42' = \frac{2M}{T} \cdot 180{,}08^{-3}$$

$$\text{tang } 9^0\ 4'\ 52'' = \frac{2M}{T} \cdot 240{,}18^{-3}$$

und hieraus die beiden Werthe für $\frac{2M}{T}$:

2206600

2214500

oder den Mittelwerth

2210550.

Bei dem Zweifel darüber, ob der ersten oder der zweiten Berechnung im vorliegenden Falle der Vorzug gebühre, und da die auf beide Weise erhaltenen Resultate ohnedem wenig verschieden sind, so soll aus den Resultaten beider Berechungen das Mittel genommen werden, nämlich:

$$\frac{2M}{T} = 2217600\,.$$

Weil nun ausserdem für den Dämpfer wieder dieselben Abmessungen wie in der vorhergehenden Versuchsreihe gelten, dabei aber das von e' abhängige Glied im Werthe von $\frac{1}{r'}$ wegen der Kleinheit der Nadel

unmerklich ist, so ergiebt sich

$$\frac{1}{r''} = 0{,}0028352$$

$$r'' = 352{,}71$$

folglich

$$\frac{2M}{Tr''^2} = \text{tang}\, v_0 = 0{,}05054.$$

Ausserdem ist, wie in der vorhergehenden Reihe,

$$n = 1854.$$

Hieraus ergiebt sich dann, wenn θ seiner Kleinheit wegen vernachlässigt wird,

$$w = nn\pi\pi\,.\,\text{tang}\, v_0 \cdot \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\lambda} \cdot \frac{r''}{l}$$

$$= 1854^2.\pi\pi\,.\,0{,}05054 \cdot \frac{\pi\pi + 0{,}007944^2}{0{,}007944} \cdot \frac{352{,}71}{3{,}9527}$$

oder

$$w = 1900\,.\,10^8.$$

Der Unterschied dieses Werthes von dem aus der zweiten Versuchsreihe abgeleiteten ist kleiner, als der, welchen die unvermeidlichen Beobachtungsfehler der letzten Reihe verursachen können.

20.

Vergleichung des Widerstands der Kette in der ersten Versuchsreihe mit dem Widerstande der Kette in der zweiten und dritten Reihe.

Es sind in obigen Versuchsreihen die Widerstände zweier Ketten nach absolutem Maasse gemessen worden, von denen die erstere zusammengesetzt war 1) aus einem Drahte A, welcher zum Multiplicator diente, 2) aus einem Drahte B, welcher zum Erdinductor diente, 3) aus zwei kurzen, dicken Verbindungsdrähten C. Die letztere Kette bestand dagegen bloss aus dem Drahte A, welcher zum Dämpfer gebraucht wurde. Die Vergleichung des Widerstands beider Ketten beruht hauptsächlich auf der Vergleichung des Widerstands A mit dem Widerstande B, da der Widerstand C so gering ist, dass sein Einfluss nach Proportion seiner Länge und seines Querschnittes leicht als Correction in Rechnung gebracht werden konnte.

Da die unmittelbare Vergleichung der Widerstände A und B bei ihrer grossen Verschiedenheit zu einem weniger sicheren Resultate geführt haben würde, wurden 3 Hülfsdrähte a, b, c zugezogen, durch

welche es möglich wurde, das Verhältniss von $A : B$ bloss auf solche Messungen zu gründen, durch welche unmittelbar nur einander nahe gleiche Widerstände verglichen wurden.

Diese Widerstandsvergleichungen wurden sämmtlich nach der in der Beilage C beschriebenen und durch ein Beispiel erläuterten Methode ausgeführt, und es genügt daher, in der folgenden Tafel die Resultate zusammenzustellen, ohne in das Detail der Beobachtungen einzugehen. In der ersten Columne sind die nach der angegebenen Methode gemachten Widerstandsvergleichungen durch Nummern unterschieden. Die zweite Columne unter X gibt die Bezeichnung des gesuchten Widerstandsverhältnisses, die dritte Columne unter q den gefundenen Zahlenwerth. In den beiden letzten Columnen sind endlich die Logarithmen von q und $q+1$ beigefügt worden.

Nr.	X.	q	Log q	Log $(q+1)$
1.	$\frac{B}{c}$	1,04354	0,01851	0,31038
2.	$\frac{b}{B+c}$	1,03498		0,30856
3.	$\frac{a}{B+b+c}$	1,00752		0,30266
4.	$\frac{A}{B+a+b+c}$	0,91529	9,96156	
.	$\frac{A}{B}$	7,3224	9,94305	0,92160

Nun ist

$$\log\left(\frac{A}{B}\right)=\log\left(\frac{A}{B+a+b+c}\right)-\log\frac{B}{c}+\log\left(\frac{B}{c}+1\right)\left(\frac{b}{B+c}+1\right)\left(\frac{a}{B+b+c}+1\right)$$

das heisst, der Unterschied der beiden Logarithmen in der vierten Columne (welcher darunter angegeben ist) ist der Summe der drei Logarithmen in der letzten Columne (die gleichfalls darunter angegeben ist) hinzuzufügen, um den Logarithmus des gesuchten Verhältnisses $\frac{A}{B}$ zu erhalten, welches hiernach berechnet unter der dritten Columne bemerkt ist.

Für C reicht es hin, zu bemerken, dass der Querschnitt 3 Mal grösser, die Länge 30 Mal kleiner war, als bei B; folglich, da beide Drähte von Kupfer waren, das Widerstandsverhältniss

$$\frac{B}{C}=90$$

woraus endlich zur Vergleichung des Widerstandes der in der ersten Versuchsreihe gebrauchten Kette $A + B + C$ mit dem Widerstande der Kette A in den beiden andern Versuchsreihen folgt:

$$\frac{A+B+C}{A} = 1 + \frac{1+90}{7{,}3224 \cdot 90} = 1{,}138.$$

Nun ist $A + B + C$ aus der ersten Versuchsreihe nach absolutem Maasse bestimmt worden:

$$A + B + C = 2166 \cdot 10^8 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}.$$

Dividiert man diesen Werth mit obigen Quotienten, so erhält man den Werth von A aus der ersten Versuchsreihe abgeleitet:

$$A = 1903 \cdot 10^8 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}.$$

21.

Uebersicht der verschiedenen Maassbestimmungen für den Widerstand des Multiplicator- oder Dämpferdrahtes A.

I. Aus der ersten Versuchsreihe:

$$A = 1903 \cdot 10^8 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}.$$

II. Aus der zweiten Versuchsreihe:

$$A = 1898 \cdot 10^8 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}.$$

III. Aus der dritten Versuchsreihe:

$$A = 1900 \cdot 10^8 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}.$$

Von diesen drei Maassbestimmungen für denselben Widerstand ist der dritten, wie schon bemerkt worden ist, ein geringeres Gewicht beizulegen, als den beiden ersten. Da sie aber mit den beiden andern sehr nahe übereinstimmt, so ist kein Grund, sie auszuschliessen, und es ergiebt sich aus allen folgender Mittelwerth:

$$A = 19003 \cdot 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}.$$

Die Uebereinstimmung, welche sich hiernach zwischen den beiden nach ganz verschiedenen Methoden erhaltenen Maassbestimmungen für den Widerstand des Drahtes A ergiebt, nämlich zwischen der aus der ersten und der aus den beiden letzten Versuchsreihen, hat darum noch besonderes Interesse, weil sie beweist, dass die 1854 Umwindungen, welche dieser Draht im Multiplicator oder Dämpfer bildete, durch die Wolle, womit sie umsponnen waren, hinreichend isolirt wurden. Denn

hätte durch die Wolle hindurch eine Leitung von einer Umwindung zur andern stattgefunden, so würde dadurch in der ersten Versuchsreihe die Wirkung des Multiplicators auf die Magnetometernadel geschwächt worden sein und die Rechnung würde einen zu grossen Widerstand gegeben haben, wie wenn der durch den ganzen Draht gehende Strom durch einen grösseren Widerstand geschwächt worden wäre. Auf das aus der zweiten Versuchsreihe berechnete Resultat würde dagegen die Leitung durch die Wolle hindurch von einer Windung zur andern gar keinen Einfluss gehabt haben; denn es ist bekannt, dass die Dämpfungskraft eines Dämpfers dadurch nicht geändert wird, dass seine Drahtwindungen in leitende Verbindung mit einander gesetzt werden. Wenigstens kann dadurch auf keine Weise die Dämpfungskraft vermindert werden; eine Vergrösserung derselben würde aber, wenn sie irgend merklich gewesen wäre, bewirkt haben, dass die Rechnung den Widerstand zu klein ergeben hätte.

22.

Etalons zu Widerstandsmessungen nach absolutem Maasse.

Hätte der Draht A, dessen Widerstand durch obige Maassbestimmungen nach absolutem Maasse bekannt war, als Widerstands-Etalon aufbewahrt werden können; so würde er selbst dazu haben dienen können, alle Widerstandsmessungen auf absolutes Maass zu reducieren, ohne dass eine Wiederholung der Originalmessung nöthig gewesen wäre, so lange man auf die Unveränderlichkeit des Etalons bauen dürfte. Jener Draht war aber nicht zu diesem Zwecke bestimmt, und es war seine Benutzung zu der vorliegenden Untersuchung nur für kurze Zeit verstattet. Sollte daher der Nutzen, welchen die gewonnenen Resultate auf die Dauer für künftige Maassbestimmungen des Widerstands haben konnten, nicht verloren gehen, so mussten Copien vom Drahte A gemacht werden, deren gleicher Widerstand verbürgt war, oder Etalons, deren Widerstand mit dem Widerstande A genau verglichen war. Es können nun zunächst zu solchen Etalons die oben angeführten drei Kupferdrähte a, b, c dienen, welche als Hülfsdrähte zur Vergleichung der Widerstände A und B gebraucht worden sind, und deren Widerstandsverhältniss zu A aus den obigen Beobachtungen abgeleitet werden kann. Denn nach den obigen Beobachtungen war

$$\log \frac{B}{c} = 0{,}01851$$
$$\log \frac{b}{B+c} = 0{,}01493$$
$$\log \frac{a}{B+b+c} = 0{,}00325.$$

Fügt man nach Obigem noch hinzu:

$$\log \frac{A}{B} = 0{,}86465$$
$$\log A = 11{,}27882$$

so ergeben sich hieraus die Widerstände der drei Kupferdrähte *a*, *b*, *c* nach absolutem Maasse, nämlich:

$$a = 10420 \,.\, 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$$
$$b = 5260 \,.\, 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$$
$$c = 2487 \,.\, 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}.$$

Diese so bestimmten drei Widerstands-Etalons sind mit der angegebenen Bezeichnung und dem beigefügten Widerstandswerthe in der Instrumentensammlung des physikalischen Instituts der Universität Leipzig niedergelegt worden.

Da nun aber mit dem von Jacobi aufgestellten Widerstands-Etalon schon viele Widerstandsmessungen gemacht und Copien desselben verbreitet worden sind, so erschien es für praktische Anwendungen am bequemsten, den Werth dieses Etalons nach absolutem Maasse zu bestimmen, was sich leicht durch eine Vergleichung des Widerstands dieses Etalons mit dem Widerstande des oben mit *c* bezeichneten Kupferdrahtes erreichen liess. Auch diese Vergleichung wurde nicht unmittelbar ausgeführt, sondern durch einen vierten Kupferdraht *d* vermittelt.

Es ist S. 214 der Widerstand einer Copie des Jacobi'schen Etalons *J* mit dem Widerstande des Originals verglichen worden. Die Vergleichung derselben Copie mit einer anderen findet man in Beilage *C*. Es ergiebt sich daraus der Widerstand

der ersten $= 0{,}9815 \,.\, J$
der zweiten $= 0{,}9839 \,.\, J$
in Summa $= 1{,}9654 \,.\, J$

Die Vergleichung dieses Widerstands mit dem des Drahtes *d*, nach der Beilage *C* beschriebenen Methode, ergab für *d*:

$$d = 1{,}1295 \,.\, 1{,}9654 \,.\, J = 2{,}220 \,.\, J$$

Die Vergleichung dieses letzteren Widerstands nebst dem der beiden Copien mit dem des Drahtes *c* ergab aber für *c*

$$c = 0{,}993 \;.\; (2{,}220 + 1{,}9654) \;.\; J = 4{,}156 \;.\; J$$

folglich, da *c* nach absolutem Maasse $2487 \;.\; 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$ ist,

$$J = 598 \;.\; 10^7 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}} = 807 \frac{\text{Meile}}{\text{Secunde}} \;.$$

Herr Inspector Leyser in Leipzig hat eine Anzahl Copien des Jacobi'schen Etalons dargestellt, deren Widerstand nach genauer, von Herrn Dr. Quintus Icilius ausgeführter Prüfung sowohl in Theilen des Jacobi'schen als des absoluten Maasses angegeben ist.

23.

Ueber Neumanns Inductions-Constante und Kirchhoffs Bestimmung derselben.

In Poggendorffs Annalen 1849. Bd. 76. S. 412 ff. ist soeben eine Abhandlung des Hrn. Dr. G. Kirchhoff in Berlin erschienen: „Bestimmung der Constanten, von welcher die Intensität inducierter elektrischer Ströme abhängt".

Herr Kirchhoff sagt: „Die mathematischen Gesetze der inducierten elektrischen Ströme sind von Neumann und Weber aufgestellt worden; in dem Ausdrucke, den beide für die Intensität eines inducierten Stromes gefunden haben, kommt ausser Grössen, die in jedem gegebenen Falle gemessen werden müssen, eine Constante vor, die ein für alle Mal durch Versuche ermittelt werden muss, und die Neumann durch ε bezeichnet. Diese zu bestimmen habe ich unternommen."

Diese von Kirchhoff bestimmte Constante ε steht nun in einer einfachen Relation zu dem von ihm gebrauchten Widerstandsmaasse und zu dem oben definierten absoluten Widerstandsmaasse, welche auf folgende Weise ausgesprochen werden kann.

Nach den oben festgesetzten Maassen für Stromintensitäten, elektromotorische Kräfte und für Widerstände hat man für die Stromintensität *i*, welche durch die elektromotorische Kraft *e* in einen geschlossenen Leiter, dessen Widerstand *w* ist, hervorgebracht wird, folgende Gleichung:

$$i = \frac{e}{w} \,.$$

Führt man nun andere Maasse ein, die sich zu jenen absoluten verhalten wie:

$$a : 1$$
$$b : 1$$
$$c : 1$$

und bezeichnet mit i', e', w' obige drei nach den neuen Maassen ausgedrückte Grössen, so erhält man

$$ai' = i,\ be' = e,\ cw' = w$$

folglich

$$ai' = \frac{be'}{cw'}.$$

Eine genauere Prüfung und Vergleichung derjenigen Maasse, welche dem Neumann'schen Ausdrucke für die Intensität eines inducierten Stroms und Kirchhoffs Rechnung zum Grunde liegen, mit obigen Maassen ergiebt, wenn Millimeter und Secunde als Raum- und Zeitmaass der Geschwindigkeitsmessung zum Grunde gelegt werden,

$$a = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ und } b = \sqrt{2}$$

und man hat also hiernach

$$i' = \frac{2e'}{cw'}$$

wofür man auch schreiben kann

$$i' = \frac{\frac{2}{c}e'}{w'}.$$

Der constante Coefficient $\frac{2}{c}$, mit welchem in diesem Ausdrucke des inducierten Stroms die elektromotorische Kraft e' multipliciert ist, ist nun die von Neumann und Kirchhoff mit ε bezeichnete Constante. Zugleich ersieht man aus der gegebenen Darstellung, dass $c = \frac{2}{\varepsilon}$ die Zahl ist, welche angiebt, um wie viel Mal das gewählte Grundmaass des Widerstandes grösser ist, als das Art. 10 definierte absolute Widerstandsmaass. Wählt man z. B. ein solches Grundmaass, für welches die Inductions-Constante $\varepsilon = 1$ ist, so verhält sich dieses Grundmaass zu dem Art. 10 definierten wie 2 : 1. Nun findet Kirchhoff aus seinen Beobachtungen: „Es ist die Constante $\varepsilon = 1$, wenn man als Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit von 1000 Fuss in der Secunde, als Einheit des Widerstands den Widerstand eines Kupferdrahts von einer Quadratlinie Querschnitt und 0,434 Zoll Länge annimmt." Diesen Angaben liegt das preussische Längenmaass zum Grunde. In Metermaass übersetzt heisst dies: Es ist die Constante $\varepsilon = 1$, wenn man als Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit von 313853 Millimeter in der

Secunde, als Einheit des Widerstands den Widerstand eines Kupferdrahtes von 4,75 Quadratmillimeter Querschnitt und 11,35 Millimeter Länge annimmt.

Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass $\varepsilon = 1$ bleibt, so lange als das hier angebene Verhältniss der beiden Maasse, des Geschwindigkeitsmaasses und des Widerstandsmasses, unverändert bleibt. Es ist daher die Constante $\varepsilon = 1$, auch wenn man als Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Secunde, als Einheit des Widerstands den Widerstand eines Kupferdrahtes von 4,75 . 313853 Quadratmillimeter Querschnitt und 11,35 Millimeter Länge wählt.

Da nun dann für $\varepsilon = 1$, $c = 2$ ist, so ergiebt sich, dass dieses Maass des Widerstands 2 Mal grösser ist, als das Art. 10 definierte absolute Maass des Widerstands.

Aus Kirchhoffs Beobachtungen ergiebt sich also nach der angegebenen Reduction das Art. 10 definierte Maass des absoluten Widerstands gleich dem Widerstande eines Kupferdrahtes von 4,75 . 313853 Quadratmillimeter Querschnitt und 5,675 Millimeter Länge, oder von 262752 Quadratmillimeter Querschnitt bei 1 Millimeter Länge.

Aus den in dieser Abhandlung mitgetheilten Beobachtungen hat sich dagegen nach Art. 22 ergeben, dass der Jacobi'sche Kupferdraht bei $0{,}3335^2 . \pi$ Quadratmillimeter Querschnitt und 7619,75 Millimeter Länge einen $598 . 10^7$ Mal grösseren Widerstand besass, als das Artikel 10 definierte absolute Widerstandsmaass, und dass folglich von diesem Kupfer der Widerstand eines Kupferdrahtes von $0{,}3335^2 . 598 . 10^7 . \pi$ Quadratmillimeter Querschnitt und 7619,75 Millimeter Länge oder der Widerstand eines Kupferdrahtes von 274250 Quadratmillimeter Querschnitt bei 1 Millimeter Länge dem Widerstandsmaasse gleich sei.

Die Uebereinstimmung dieser beiden auf ganz verschiedenen Wegen erhaltenen Angaben kann nicht grösser erwartet werden, wenn man beachtet, dass die Drähte von Jacobi und von Kirchhoff von verschiedenem Kupfer gemacht waren, und dass in der Leitungsfähigkeit oder in dem Widerstandscoefficienten des Kupfers oft noch weit grössere Differenzen vorkommen. Setzt man die Differenz der beiden Angaben bloss auf Rechnung der Verschiedenheit des Kupfers, so ergiebt sich, dass das von Jacobi gebrauchte Kupfer eine etwas geringere Lei-

tungsfähigkeit oder einen etwas grösseren Widerstandscoefficienten besass, als das von Kirchhoff gebrauchte. Auch ich habe den Widerstandscoefficienten des von mir gebrauchten Kupfers kleiner, als den des von Jacobi gebrauchten gefunden, und der Unterschied war sogar noch beträchtlich grösser, als bei dem von Kirchhoff gebrauchten Kupfer. Eine unmittelbare Vergleichung des Widerstands des Kirchhoff'schen Drahtes mit dem Jacobi'schen Grundmaasse würde daher von besonderem Interesse sein zur genauern Vergleichung der Resultate beider Messungen.

III.

BEISPIELE DER ANWENDUNG DES ABSOLUTEN WIDERSTANDSMAASSES.

24.

Anwendung des Widerstandsmaasses zur Messung galvanischer Ströme bei technischer Benutzung derselben.

Für die technischen Anwendungen des Galvanismus, z. B. zu chemischen Zwecken und zur Galvanoplastik, fehlt es oft an einfachen und allgemein verständlichen Vorschriften. Jeder Techniker ist daher genöthigt, durch eigene Versuche die Verhältnisse zu erproben, welche günstige Resultate geben. Der dadurch verursachte Zeit- und Kostenaufwand erschwert diese Anwendungen des Galvanismus besonders bei grösseren Unternehmungen. Solche Vorschriften fehlen aber nicht sowohl darum, weil noch keine genügenden Erfahrungen gemacht wären, als vielmehr weil die Resultate der gemachten Erfahrungen sich nicht einfach und bestimmt aussprechen lassen; denn blosse Beschreibungen des Verfahrens genügen dazu nicht. Nur durch galvanische Maassbestimmungen ist es möglich, die Resultate der gemachten Erfahrungen mit wenigen Worten und Zahlen allgemein verständlich darzulegen und bestimmte und genaue Vorschriften zum künftigen Gebrauche zu geben, und ebenso nothwendig sind die galvanischen Maassbestimmungen in der Anwendung, um sich der Erfüllung der vorgeschriebenen Regeln zu versichern.

Es handelt sich dabei um die Wirksamkeit des galvanischen Stroms, die aber nach Verschiedenheit der Umstände sehr verschieden zu bemessen ist. Oft ist es die blosse Stromintensität, um welche es sich handelt, z. B. bei galvanoplastischen Niederschlägen. Oft ist aber die Stromintensität nur der eine Factor der fraglichen Wirksamkeit, deren anderer Factor die Länge des Leiters ist, welcher diesen Strom führt, z. B. wenn der Leiter um einen Eisenstab geht, welcher in einen Elektromagnet verwandelt werden soll. Endlich kommt auch der Fall vor, dass von dieser Länge des Leiters, durch welchen der Strom geführt wird, jeder Theil mit einem besonderen Werthe für die fragliche Wirksamkeit in Betracht zu ziehen ist, z. B. bei einem Multiplicator, dessen verschiedene Windungen eine verschieden günstige Lage gegen die Magnetnadel haben.

Der einfachste und für die technische Anwendung wichtigste Fall ist der erste, wo die fragliche Wirksamkeit bloss von der Stromintensität abhängt. Die Errichtung galvanischer Werkstätten und die mannigfaltigen darin auszuführenden Arbeiten würden sehr erleichtert und gefördert werden, wenn die für jeden Zweck günstigste Stromintensität genau ermittelt und bequeme Mittel an die Hand gegeben würden, zur Prüfung, ob bei der Ausführung diese Stromintensität stattfinde.

Was die Erforschung und genaue Bestimmung der günstigsten Stromintensitäten betrifft, so bietet das von Faraday zu diesem Zwecke angegebene Voltameter, wo die durch die Zersetzung des Wassers in einer bestimmten Zeit erzeugte Menge Gas diese Intensität anzeigt, ein sehr einfaches Mittel dazu dar, dessen Gebrauch daher nicht genug empfohlen werden kann. Nur ist dasselbe bei schwachen Strömen, wo die Wasserzersetzung sehr langsam geschieht, nicht anwendbar. Ausserdem würde das Voltameter in der gewöhnlichen Praxis, wenn es zur Prüfung der vorschriftsmässigen Stromintensität fortwährend gebraucht werden sollte, nicht immer bequem sein, weil die Zeit als ein wesentliches Element dabei gemessen werden muss. Endlich muss das Voltameter fortwährend in der Kette eingeschaltet bleiben, weil die Stromintensität bei Wegnahme desselben nicht mehr die gemessene bleibt, sondern viel stärker wird. Die mit der Einschaltung verbundene Schwächung des Stroms kann aber in manchen Fällen sehr unvortheilhaft sein. In allen Fällen, wo aus den angeführten Gründen der Ge-

brauch des Voltameters nicht praktisch ist, kann dessen Stelle durch eine Tangenten-Boussole ersetzt werden, die in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840» S. 85 f. beschrieben und deren Gebrauch zu Intensitätsmessungen daselbst durch Beispiele erläutert worden ist. Es sind dort auch die Angaben der Tangenten-Boussole auf Angaben des Voltameters zurückgeführt und beide unter einander vergleichbar gemacht worden. Jede Einheit der nach dieser Vorschrift mit der Tangenten-Boussole gemessenen Stromintensität zersetzt in 1 Secunde 0,009376 oder in 1 Min. 46⅔ Sec. 1 Milligramm Wasser im Voltameter (etwa 1 Gran in ½ Stunde). Zum Gebrauche der Tangenten-Boussole ist keine Uhr nöthig und die Einschaltung oder Ausschliessung des Instruments aus der Kette hat auf die Stromintensität keinen merklichen Einfluss.

Ein drittes praktisches Hülfsmittel zur Bestimmung der Stromintensität bietet endlich die Widerstandsmessung dar. Die Stromintensität hängt von zweierlei ab, von der elektromotorischen Kraft und von dem Widerstande der Kette, wovon bei technischem Gebrauche in der Regel nur die Veränderlichkeit des letzteren in Betracht kommt. Denn in der Regel wird bei technischen Anstalten immer die nämliche Gattung von Bechern gebraucht, deren elektromotorische Kraft mit einer für praktische Zwecke genügenden Schärfe ein für alle Mal bestimmt sein kann. Der von diesen Bechern ausgehende Strom wird dagegen bald durch mehr, bald durch weniger Gefässe und durch verschiedene Flüssigkeiten geleitet, wodurch der Widerstand sich sehr ändert.

Setzt man die Kenntniss der elektromotorischen Kraft E voraus, und kommt es also nur noch auf die Messung des Widerstands an, so kann jedes beliebige Galvanometer zur Bestimmung der Stromintensität gebraucht werden, wenn man sich dabei eines nach absolutem Maasse bekannten Widerstandsetalons w bedient. Denn bezeichnet a die Angabe des Galvanometers, wenn dieser Etalon von der Kette ausgeschlossen ist, und b, wenn derselbe eingeschaltet wird, so ist dadurch der Widerstand der Kette nach absolutem Maasse W bestimmt, nämlich:

$$W = \frac{bw}{a-b}$$

und die Stromintensität ergiebt sich dann einfach:

$$\frac{E}{W} = \frac{a-b}{bw} \cdot E.$$

25.

Anwendung des Widerstandsmaasses zur Messung elektromotorischer Kräfte nach absolutem Maasse.

Die letzte Bemerkung im vorigen Artikel führt zu einer weiteren Anwendung, welche man von einem nach absolutem Maasse bekannten Widerstandsetalon machen kann. Denn aus dem Gesagten folgt, dass, wenn man sich statt eines beliebigen Galvanometers einer Tangenten-Boussole oder Voltameters, oder irgend eines andern Instrumentes, bedient, mit welchem man die Stromintensität nach absolutem Maasse bestimmen kann, auf dem angegebenen Wege die elektromotorische Kraft E selbst nach absolutem Maasse gefunden werde, wenn sie noch unbekannt ist. Denn bezeichnet man die nach absolutem Maasse gemessene Stromintensität mit α, wenn der Widerstandsetalon aus der Kette ausgeschlossen ist, mit β, wenn er eingeschaltet wird, so ergiebt sich eben so, wie vorher, der Widerstand W der Kette nach absolutem Maasse:

$$W = \frac{\beta w}{\alpha - \beta}$$

und daraus die elektromotorische Kraft E nach absolutem Maasse:

$$E = \alpha W = \frac{\alpha \beta w}{\alpha - \beta} .$$

Man ersieht daraus zum Beispiel, wie die elektromotorischen Kräfte galvanischer Becher auf diese Weise nach demselben absoluten Maasse bestimmt werden können, wie die elektromotorischen Kräfte, welche der Erdmagnetismus auf geschlossene Ketten, während sie bewegt werden, ausübt. Es ist aber wichtig, elektromotorische Kräfte, welche aus so verschiedenen Quellen entspringen, wie die hydroelektrischen und magnetoelektrischen Kräfte, nach gleichem Maasse zu messen, weil dadurch der Weg zur comparativen Erforschung dieser Quellen selbst gebahnt wird. Es ist das bei Anwendung eines Leiters von bekanntem absoluten Widerstande leicht und einfach, ohne einen solchen Leiter aber mit grossen Schwierigkeiten verbunden, wie zum Beispiel, wenn die Vergleichung auf folgende Weise geschehen sollte.

Der galvanische Becher, dessen elektromotorische Kraft, ohne einen Leiter von bekanntem absoluten Widerstande anzuwenden, mit einer magnetoelektrischen Kraft verglichen werden soll, sei durch einen Lei-

ter von beliebiger Länge und Gestalt geschlossen und sammt demselben drehbar. Bei der Drehung entsteht dann ein zweiter Strom in der Kette, nämlich ausser dem Strome, welcher von der elektromotorischen Kraft des Bechers selbst entspringt, noch ein anderer Strom, welcher von der elektromotorischen Kraft des Erdmagnetismus herrührt. Man hat es in seiner Gewalt, durch die Richtung der Drehung zu bewirken, dass die Richtung beider Ströme in der Kette entgegengesetzt sei. Durch die Geschwindigkeit der Drehung kann man andererseits die Intensität beider Ströme wenigstens für einen kleinen Zeitraum gleich machen, wo sich dann beide Ströme für diesen Zeitraum annulliren. Sind aber die Intensitäten beider Ströme gleich, so folgt daraus für diesen Fall die Gleichheit der elektromotorischen Kräfte, d. h. die Gleichheit der elektromotorischen Kraft des Bechers mit der elektromotorischen Kraft des Erdmagnetismus. Die letztere ist durch den bekannten Werth des Erdmagnetismus und durch die Form und Drehung der geschlossenen Kette nach absolutem Maasse unmittelbar gegeben; folglich wird dadurch zugleich auch die elektromotorische Kraft des Bechers nach demselben Maasse gefunden. Es leuchtet aber von selbst ein, dass die Vergleichung dieser Kräfte auf die oben angegebene Weise mit Hülfe des absoluten Widerstandsmaasses viel einfacher und leichter erhalten wird.

IV.

Über die Principien verschiedener absoluter Maass-Systeme in der Elektrodynamik.

26.

Selbstständige Begründung der absoluten Maasse in der Elektrodynamik, ohne auf die magnetischen Maasse Bezug zu nehmen.

Wie für die Grösse der Geschwindigkeiten kein eigenes Grundmaass aufgestellt zu werden braucht, wenn solche Maasse für Raum und Zeit schon gegeben sind, eben so braucht, wie wir gesehen haben, für die Grösse der galvanischen Widerstände kein eigenes Grundmaass aufgestellt zu werden, wenn schon Maasse für die Grösse der

elektromotorischen Kräfte und der Stromintensitäten gegeben sind. Aber auch für die beiden letzteren Grössenarten brauchen keine eigenen Grundmaasse angenommen zu werden, sondern es können auch dafür absolute Maasse gegeben werden, welche nach den Art. 10 gegebenen Definitionen durch Vermittelung der magnetischen Maasse auf die drei Grundmaasse der Mechanik zurückgeführt worden sind.

Für die meisten elektrodynamischen Messungen ist es nun zwar genügend und bequem, die Maasse für die elektrodynamischen Grössen auf die festgestellten magnetischen Maasse so zu reducieren, wie es Art. 10 geschehen ist. Die Abhängigkeit, in welcher hierdurch die elektrodynamischen Maasse von den magnetischen gebracht werden, ist aber in der Sache selbst keineswegs begründet, wie aus der Unabhängigkeit der elektrodynamischen Grundgesetze von den magnetischen von selbst einleuchtet. Die elektrodynamischen Maasse lassen sich vielmehr noch auf andere Weise begründen, wodurch sie von der Begründung der magnetischen Maasse ganz unabhängig werden. Es ist dazu bloss nöthig, statt von den Grundgesetzen des Elektromagnetismus und der Magneto-Elektricität auszugehen, wie es Art. 10 geschehen ist, auf die Grundgesetze der Elektrodynamik und Volta-Induction zurückzugehen.

Das Grundgesetz der Elektrodynamik giebt folgende Formel für die Grösse der Abstossungskraft zweier Stromelemente α, α' mit den Stromintensitäten i, i' aus der Entfernung r, welche mit den beiden Stromrichtungen die Winkel θ, θ' macht, während der Winkel der beiden Stromrichtungen $= \varepsilon$ ist, nämlich:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}\, ii' \left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right).$$

Das Grundgesetz der Volta-Induction, wie es Art. 30 der ersten Abhandlung über »Elektrodynamische Maassbestimmungen« angegeben worden ist, giebt folgende Formel für die von einem Stromelemente α mit der Stromintensität i auf ein anderes Element α' aus der Entfernung r ausgeübte elektromotorische Kraft, wenn r mit der Stromrichtung und mit der Richtung, nach welcher α' mit der Geschwindigkeit v verschoben wird, die Winkel θ und θ' macht, die beiden letzteren Richtungen gegen einander den Winkel ε:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}\, vi \left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\theta\cdot\frac{di}{dt}$$

Diese nach der Richtung r wirkende Kraft ist nach der Richtung von α' zu zerlegen, weil die gegen α' senkrechte Componente aufgehoben wird. Bezeichnet η den Winkel, welchen α' mit r macht, so ist obige Formel also mit $\cos \eta$ zu multiplicieren.

Auf diese Grundgesetze lässt sich nun erstens ein absolutes Maass der Stromintensität, unabhängig von den magnetischen Maassen, auf folgende Weise begründen:

> Das Maass der Stromintensität ist diejenige Stromintensität, welche ein Strom besitzt, der — indem er eine dem Flächenmaasse gleiche Ebene umläuft und auf einen gleichen Strom, der eine eben solche Ebene umläuft, aus einer grossen Entfernung R wirkt, und bei rechtwinkeliger Lage beider Ebenen, bei welcher die verlängerte erste Ebene die zweite halbirt — auf den letzteren Strom ein Drehungsmoment ausübt, welches sich zur Einheit des Drehungsmoments wie $1 : 2R^3$ verhält.

Dieses neue absolute Maass der Stromintensität lässt sich noch einfacher definieren, wenn dabei gestattet wird, statt auf die Wechselwirkung geschlossener Ströme auf die Wechselwirkung einzelner Stromelemente zurückzugehen, welche sich nicht unmittelbar beobachten lässt, weil solche Stromelemente nur als Theile geschlossener Ströme vorkommen, nämlich:

> Das Maass der Stromintensität ist diejenige Stromintensität, welche ein Stromelement besitzt, wenn es auf ein gleiches, paralleles und auf der Verbindungslinie senkrechtes Stromelement aus einer dem Längenmaasse gleichen Entfernung eine Anziehungskraft ausübt, welche sich zum Kraftmaasse verhält, wie das Quadrat der Länge jener Stromelemente zum Flächenmaasse.

Dieses zweite absolute Maass der Stromintensität ist dem ersten, von den magnetischen Maassen abhängigen, nicht gleich, sondern verhält sich dazu wie $1 : \sqrt{2}$.*)

---

*) Die Ableitung der oben aufgestellten Definitionen aus dem Grundgesetze der Elektrodynamik ist folgende. Erste Definition. Es ist schon Art. 9 der früheren Abhandlung »Elektrodynamische Maassbestimmungen« Leipzig, 1846. an-

Zweitens, das Maass der elektromotorischen Kraft wird auf folgende Weise auf das angeführte Grundgesetz der Volta-Induction, unabhängig von den magnetischen Maassen, begründet.

---

gegeben worden, wie aus dem Grundgesetze der Elektrodynamik folgender Ausdruck des von einem Planstrome auf einen andern in der Ferne ausgeübten Drehungsmoments hergeleitet werde, nämlich:

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{ii'\lambda\lambda'}{r^3}\sin\delta\,.\,\sqrt{(1+3\cos\psi^2)}$$

wo i, i' die Stromintensitäten, λ, λ' die umströmten Ebenen, r den Abstand ihrer Mittelpunkte, ψ den Winkel der Normale des ersten Planstroms mit r, δ den Winkel bezeichnet, welchen die Normale des zweiten Planstroms mit der Directionskraft einschliesst. Die Directionskraft aber ist in der durch die Normale des ersten Planstroms A und durch den Mittelpunkt des zweiten Planstroms C gelegten Ebene enthalten und ist in dem bei C rechtwinkeligen Dreiecke ACB, dessen Hypotenuse AB die Normale des Planstroms A ist, derjenigen Linie CD parallel, welche die Dreieckseite AB in D so schneidet, dass $AD : DB = 1 : 2$. — Unter den in der ersten Definition bezeichneten Verhältnissen ist nun $i = i'$, $\lambda = \lambda' = 1$, $\delta = \psi = \frac{\pi}{2}$, $r = R$, wonach das Drehungsmoment den Werth

$$\frac{ii}{2R^3}$$

erhält, welcher zur Einheit des Drehungsmoments sich verhält wie $1 : 2R^3$, wenn $i = 1$ ist.

Zweite Definition. In dem durch das Grundgesetz der Elektrodynamik unmittelbar gegebenen Ausdrucke der Anziehungskraft zweier Stromelemente

$$\frac{\alpha\alpha'}{rr}\,ii'(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta')$$

ist für die in der Definition bezeichneten Verhältnisse $i = i'$, $\alpha = \alpha'$, $\theta = \theta' = \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon = 0$, $r = 1$, wodurch die Anziehungskraft den Werth

$$\alpha\alpha ii$$

erhält, welcher sich zum Kraftmaasse verhält, wie $\alpha\alpha : 1$, wenn $i = 1$ ist.

Es ist noch übrig, nachzuweisen, dass das zweite hier aufgestellte absolute Maass der Stromintensität zu dem ersten, von dem magnetischen Maasse abhängigen, sich verhalte, wie $1 : \sqrt{2}$. — Es ist schon in Art. 9 a. a. O., bekannten Gesetzen gemäss, der Ausdruck des von einem Magnet m auf einen andern m' in der Ferne r ausgeübten Drehungsmoments angegeben worden, nämlich:

$$\frac{mm'}{r^3}\sin\delta\,.\,\sqrt{(1+3\cos\psi^2)}$$

wo ψ und δ die angeführte Bedeutung haben, wenn man darin die Normalen der beiden Planströme mit den Axen der beiden Magnete vertauscht. Bezeichnet man nun, zur Unterscheidung der beiden Maasse der Stromintensität, mit K das erste, von den magnetischen Maassen abhängige, mit J das zweite, so seien kK und $k'K$ zwei bestimmte, nach dem erstern Maasse ausgedrückte, Stromintensitäten, und iJ und $i'J$ seien die nämlichen Stromintensitäten, nach dem zweiten Maasse ausgedrückt, folglich:

$$iJ = kK \text{ und } i'J = k'K.$$

Dem Grundgesetze des Elektromagnetismus gemäss bleibt dann obiges Drehungs-

Das Maass der elektromotorischen Kraft ist diejenige elektromotorische Kraft, welche ein Strom, der eine dem Flächenmaasse gleiche Ebene umläuft, auf einen eine gleiche, auf jene senkrechte und von ihr halbierte, Ebene begrenzenden Leiter aus der grossen Entfernung R ausübt, wenn seine Intensität zu dem aufgestellten absoluten Maasse sich verhält, wie $2R^3 : 1$, während der Leiter mit der Einheit der Drehungsgeschwindigkeit um die Durchschnittslinie beider Ebenen gedreht wird.

Wird es gestattet, auf die elektromotorische Kraft einzelner Stromelemente zurückzugehen, so lässt sich diese Definition einfacher auf folgende Weise fassen:

Das Maass der elektromotorischen Kraft ist diejenige elektromotorische Kraft, welche ein Stromelement auf ein gleich langes, darauf senkrechtes, der Verbindungslinie paralleles Leiterelement aus einer dem Längenmaasse gleichen Entfernung ausübt, wenn seine Intensität zu dem aufgestellten absoluten Maasse sich verhält, wie das Flächenmaass zum Quadrat der Länge jener Elemente, während das Leiter-Element mit der Einheit der Geschwindigkeit der Stromrichtung entgegengesetzt parallel verschoben wird. *)

---

moment unverändert, wenn man für den Magnet m den Strom kK setzt, welcher eine Ebene $\lambda = \frac{m}{k}$ umläuft. Setzt man auf gleiche Weise für den Magnet m' den Strom $k'K$, welcher eine Ebene $\lambda' = \frac{m'}{k'}$ umläuft, so erhält man das von dem ersten Planstrome auf den zweiten ausgeübte Drehungsmoment,

$$\frac{kk'\lambda\lambda'}{r^3} \sin\vartheta \,.\, \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}$$

Für dieses Drehungsmoment ist oben aber folgender Werth gefunden worden:

$$\frac{1}{2}\,\frac{ii'\lambda\lambda'}{r^3} \sin\vartheta \,.\, \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}.$$

woraus $\frac{1}{2}\,ii' = kk'$ folgt, d. i., wenn $k = k'$, $i = i'$,

$$i = k\sqrt{2}.$$

Hiernach ergiebt sich aus der Gleichung $iJ = kK$

$$J : K = 1 : \sqrt{2}.$$

*) Um die erste dieser beiden neuen Definitionen eines absoluten Maasses der elektromotorischen Kraft aus dem allgemeinen Gesetze der Volta-Induction abzuleiten, beachte man zunächst, dass der inducierende Strom i in dieser Definition constant genommen ist, also $\frac{di}{dt} = 0$, wodurch der allgemeine Ausdruck der nach der Richtung r wirksamen elektromotorischen Kraft auf folgenden reduciert wird:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}\, v i\,(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta').$$

Wie nun aber aus dem ähnlichen Ausdrucke der Abstossungskraft zweier Stromelemente

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}\, ii'\,(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta')$$

Dieses zweite **absolute** Maass der elektromotorischen Kraft ist dem ersten, von den magnetischen Maassen abhängigen, nicht gleich, sondern verhält sich dazu, wie $\sqrt{2} : 1$.

---

sich die Richtung und die Grösse der Kraft ergeben hat, welche ein Strom i, welcher die Ebene λ umläuft, auf das Stromelement α' ausübt, nämlich **erstens** die Richtung als senkrecht gegen die durch die Stromrichtung i' und die **Directionskraft** gelegte Ebene (die Directionskraft ist in der durch die Normale des inducierenden Planstroms A und durch den Mittelpunkt des inducierten Elements C gelegten Ebene enthalten, und ist in dem bei C rechtwinkeligen Dreiecke ACB, dessen Hypotenuse AB die Normale des Planstroms A ist, derjenigen Linie CD parallel, welche die Dreieckseite AB in D so schneidet, dass $AD : DB = 1 : 2$); **zweitens** die Grösse der Kraft

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda\alpha'}{r^3} ii' \sin\vartheta \,.\, \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}$$

wo ψ den Winkel der Normale des Planstroms mit r, ϑ den Winkel bezeichnet, welchen die Stromrichtung in α' mit der Directionskraft macht —; auf ähnliche Weise ergiebt sich auch aus dem vorhergehenden Ausdrucke der elektromotorischen Kraft, welche ein Stromelement auf ein Leiter-Element nach Richtung der sie verbindenden Geraden ausübt, die Richtung und die Grösse der elektromotorischen Kraft, welche der ganze, die Ebene λ umlaufende, Strom i auf das Leiter-Element α' ausübt, nämlich **erstens** die Richtung senkrecht gegen die durch die Bahn, in welcher α' verschoben wird, und durch die Richtung der **Directionskraft** gelegte Ebene, **zweitens** die Grösse

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda\alpha'}{r^3} vi \sin\vartheta \,.\, \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}$$

wo ψ den Winkel der Normale des Planstroms mit r, ϑ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung, nach welcher α' verschoben wird, mit der Directionskraft macht. (S. Art. 9 a. a. O. S. 264 in der Note, wobei zu bemerken ist, dass dort ε die nämliche Bedeutung hat, wie hier ϑ, dass aber in der Formel für die Kraft, welche ein Planstrom auf das bewegte Element eines Leiters ausübt, der von der Richtung der Bewegung dieses Elements abhängige Factor $\sin\varepsilon$ aus Versehen weggelassen worden ist.)

Gehört nun ferner auch das Leiter-Element α' der Begrenzung einer Ebene λ' an, deren Normale der Richtung, nach welcher die Leiter-Elemente (in Folge einer Drehung des Leiters um eine seine Ebene halbierende Axe) verschoben werden, parallel ist und also mit der **Directionskraft** den Winkel ϑ macht: so zerlege man jedes Element α' der Begrenzungslinie in zwei Elemente ds und $d\sigma$, das eine parallel der Linie, in welcher eine auf die Directionskraft CD normale Ebene die Ebene des Leiters schneidet, das andere senkrecht auf dieser Schneidungslinie. Die ersteren Elemente kann man paarweise von gleicher Länge $ds = ds'$ ordnen und durch Perpendikel x auf jener Schneidungslinie verbinden. Bezeichnet man mit a, b, c die Abstände der Elemente ds und ds' und des Durchschnittspunkts des Perpendikels x mit der Drehungsaxe von jener Schneidungslinie, und ferner mit γ die Drehungsgeschwindigkeit und mit ϑ' den Winkel der die Ebene des Leiters halbierenden Drehungsaxe mit jener Schneidungslinie, so ist, wenn v und v' die Geschwindigkeiten bezeichnen, mit welcher die Elemente ds und ds' verschoben werden,

Drittens leuchtet von selbst ein, dass nun auch die Begründung des dritten elektrodynamischen Maasses, nämlich des Widerstandes, unabhängig von den magnetischen Maassen gemacht wird,

---

$$a - b = x$$
$$(a - c)\,\gamma \cos\delta' = v$$
$$(b - c)\,\gamma \cos\delta' = v'.$$

Beachtet man ferner, dass die oben angegebene Richtung der elektromotorischen Kraft mit dem einen Elemente ds direct parallel, mit dem andern ds' entgegengesetzt parallel ist, und dass die Länge $ds = ds'$, so erhält man die nach der Richtung beider Elemente zerlegten elektromotorischen Kräfte:

$$+ \tfrac{1}{2}\,\frac{\lambda i}{r^3} \sin\delta\,.\,\sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}\,.\,\gamma\cos\delta'.\,(a - c)\,ds$$

$$- \tfrac{1}{2}\,\frac{\lambda i}{r^3} \sin\delta\,.\,\sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}\,.\,\gamma\cos\delta'.\,(b - c)\,ds$$

folglich ihre Summe:

$$+ \tfrac{1}{2}\,\frac{\lambda i}{r^3}\cdot\gamma\cos\delta'\sin\delta\,.\,\sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}\,.\,x\,ds.$$

Hieraus folgt endlich die Summe aller auf die mit obiger Schneidungslinie parallelen Elemente des geschlossenen Leiters ausgeübten elektromotorischen Kräfte nach der Richtung des Leiters zerlegt:

$$+ \tfrac{1}{2}\,\frac{\lambda i}{r^3}\cdot\gamma\cos\delta'\sin\delta\,.\,\sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}\,.\int x\,ds,$$

das heisst, da das Integral $\int x\,ds$ die Grösse der begrenzten Ebene λ' bezeichnet,

$$+ \tfrac{1}{2}\,\frac{\lambda\lambda'}{r^3}\,i\gamma\cos\delta'\sin\delta\,.\,\sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}.$$

Betrachtet man auf ähnliche Weise die auf alle gegen obige Schneidungslinie senkrechten Elemente $d\sigma$ wirkenden, nach deren Richtung zerlegten elektromotorischen Kräfte, so findet man ihre Summe $= 0$; folglich ist die obige Formel der Ausdruck der ganzen elektromotorischen Kraft, welche der Planstrom auf den geschlossenen Leiter ausübt.

Wendet man nun diesen Ausdruck auf die in der ersten Definition bezeichneten Verhältnisse an, wo nämlich $i = i'$, $\lambda = 1$, $r = R$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$, $\varepsilon = \psi = \frac{\pi}{2}$ ist, so ergiebt sich der Werth der elektromotorischen Kraft

$$\frac{i}{2R^3},$$

d. i. $= 1$, wenn $i = 2R^3$ ist.

Zweite Definition. Der oben angeführte allgemeine Ausdruck der elektromotorischen Kraft eines Stromelements auf ein Leiterelement:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}\,vi\,(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta')\cos\eta - \tfrac{1}{2}\,\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\theta\cos\eta\,.\,\frac{di}{dt}$$

reduciert sich in der Anwendung auf die in der zweiten Definition des absoluten Maasses der elektromotorischen Kraft bezeichneten Verhältnisse, wo $\alpha = \alpha'$, $\varepsilon = \eta = 0$, $\theta = \theta' = \frac{\pi}{2}$, $r = 1$, $v = -1$, $\frac{di}{dt} = 0$, auf den Werth:

$$\alpha\alpha i,$$

d. i. auf die Einheit, wenn die Intensität des inducierenden Stroms i zum festgesetzten Maasse der Intensität sich verhält, wie $1 : \alpha\alpha$.

Das Verhältniss endlich dieses zweiten hier aufgestellten absoluten Maasses der elektromotorischen Kraft zu dem ersten, von den magnetischen Maassen abhän-

wenn in der Art. 10 gegebenen Definition die von den magnetischen Maassen abhängigen absoluten Maasse der Stromintensität und der elektromotorischen Kraft mit den neuen, davon unabhängigen Maassen vertauscht werden, wobei übrigens die Definition ganz unverändert bleibt. Es ergiebt sich dann aus den angegebenen Verhältnissen dieser neuen Maasse zu den alten, dass das neue absolute Maass des Widerstands zu dem Art. 10 definierten sich verhält, wie 2 : 1.

---

gigen, ergiebt sich, wie folgt. Setzt man in dem in voriger Note angeführten Ausdruck des Drehungsmoments, welches ein Magnet m auf einen andern m' in der Ferne r ausübt, nämlich:

$$\frac{mm'}{r^3} \sin\delta \, . \, \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}$$

für den Magnet m' einen Strom $k'K$, welcher die Ebene $\lambda' = \frac{m'}{k'}$ umläuft, so erhält man das auf diesen Strom vom Magnet m ausgeübte Drehungsmoment

$$\frac{m\lambda'}{r^3} k' \sin\delta \, . \, \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}$$

und hieraus nach den bekannten Relationen, welche zwischen den elektromagnetischen und den magnetoelektrischen Gesetzen stattfinden, und die man am Ende dieser Abhandlung in Beilage *D.* näher erörtert findet, die elektromotorische Kraft, welche der Magnet m auf den geschlossenen Stromleiter ausübt, indem derselbe mit der Einheit der Geschwindigkeit in der jenem Drehungsmomente entgegengesetzten Richtung gedreht wird, wenn $k' = 1$ gesetzt wird, nämlich:

$$\frac{m\lambda'}{r^3} \sin\delta \, . \, \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}.$$

Setzt man hierin endlich auch für den Magnet m einen Strom kK, welcher die Ebene $\lambda = \frac{m}{k}$ durchläuft, so erhält man die elektromotorische Kraft, welche dieser Strom auf jenen geschlossenen Stromleiter ausübt, bei der beschriebenen Drehung desselben,

$$\frac{\lambda\lambda'}{r^3} k \sin\delta \, . \, \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}$$

nach dem ersten Maasse ausgedrückt, die nach dem zweiten Maasse ausgedrückt

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda\lambda'}{r^3} i\gamma \cos\delta' \sin\delta \, . \, \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}$$

war, d. i.

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda\lambda'}{r^3} i \sin\delta \, . \, \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)},$$

wenn man beachtet, dass $\gamma = 1$ und $\cos\delta' = 1$ ist.

Bezeichnet man nun, zur Unterscheidung beider Maasse, mit E das erste, mit E' das zweite, und bezeichnet dieselbe elektromotorische Kraft nach beiden Maassen mit eE und $e'E'$: so ergiebt sich, wenn man beachtet, dass $i = k\sqrt{2}$ war,

$$e = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{\lambda\lambda'}{r^3} i \sin\delta \, . \, \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}$$

$$e' = \tfrac{1}{2} \quad . \quad \frac{\lambda\lambda'}{r^3} i \sin\delta \, . \, \sqrt{(1 + 3\cos\psi^2)}$$

folglich, da $eE = e'E'$ ist:

$$E' : E = e : e' = \sqrt{2} : 1.$$

27.

Ueber das Verhältniss der absoluten Maasse in der Elektrodynamik zu denen in der Mechanik.

Eine elektromotorische Kraft ist jede Kraft, welche die beiden elektrischen Fluida an einem Orte nach entgegengesetzten Richtungen zu bewegen sucht. Solche Kräfte sind nun aber alle nach dem Grundgesetze der Elektrostatik bestimmten Kräfte; denn alle diese Kräfte sind Anziehungs- und Abstossungskräfte, und zwar ist die nämliche Kraft, welche für das eine elektrische Fluidum eine Anziehungskraft ist, für das andere nothwendig eine Abstossungskraft. Da nun alle Arten von elektromotorischen Kräften unter einander vergleichbar sind und daher alle nach demjenigen Maasse ausgedrückt werden können, nach welchem irgend eine derselben gemessen worden ist, so leuchtet ein, dass alle Arten von elektromotorischen Kräften nach dem in der Elektrostatik für elektrische Kräfte festgesetzten Maasse müssen ausgedrückt werden können, und dass man daher für die elektromotorischen Kräfte keines anderen Maasses als für die elektrostatischen Kräfte bedarf. In der Elektrostatik werden aber die elektrischen Kräfte auch nicht nach einem besonderen Maasse, sondern nach gleichem Masse, wie alle Kräfte in der Mechanik, gemessen, indem diejenige Kraft zum Maasse genommen wird, welche der ponderabelen Masseneinheit, wenn sie darauf wirkt, die Einheit der Beschleunigung ertheilt. Die auf ein elektrisches Theilchen ausgeübte elektrische Kraft ist hiernach = 1, wenn der ponderabelen Masseneinheit, an welcher das elektrische Theilchen haftet, die Einheit der Beschleunigung dadurch ertheilt wird. Man sieht hieraus, dass die Feststellung eines eigenen Maasses für die elektromotorischen Kräfte gar nicht nöthig ist, sondern dass dafür das für alle Kräfte in der Mechanik festgestellte Maass genügt.

Eine ähnliche Betrachtung findet Anwendung auf die Intensität elektrischer Ströme, wenn man in der Mechanik diejenige Stromstärke oder Stromintensität zum Maasse nimmt, bei welcher die Masseneinheit irgend einer Flüssigkeit während des Zeitmaasses durch den Querschnitt des Strombettes geführt wird. Da nun die Masseneinheit der elektrischen Flüssigkeiten in der Elektrostatik schon bestimmt ist, näm-

lich als diejenige Masse, welche auf eine ihr gleiche Masse in der Entfernung R eine Kraft ausübt, die sich zum Kraftmaasse verhält, wie $1 : RR$; so leuchtet ein, dass man keines besonderen Maasses für die Intensität elektrischer Ströme bedarf.

Soll nun hiernach der Gebrauch aller besonderen Maasse für die elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten ganz beseitigt werden, so muss eine Regel gefunden werden, nach welcher die nach den bisherigen besonderen Maassen ausgeführten Messungen zu reducieren sind, um sie von diesen besonderen Maassen unabhängig darzustellen.

Um diese Regel zu finden, genügt es nicht, auf die Grundgesetze der Elektrostatik, Elektrodynamik und Induction, sondern es ist nothwendig, auf das allgemeine Grundgesetz der Elektricitätslehre, welches die Elektrostatik, Elektrodynamik und Induction zugleich umfasst und verbindet, zurückzugehen, welches in der früheren Abhandlung «Elektrodynamische Maassbestimmungen» Leipzig, 1846. aufgestellt worden ist. Nach diesem letztern Gesetze wird diese Kraft, welche die elektrische Masse e auf die elektrische Masse e' in der Entfernung r, bei der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ und der relativen Beschleunigung $\frac{ddr}{dt^2}$ ausübt, durch

$$\frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{1}{cc} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{cc} \frac{ddr}{dt^2}\right)$$

dargestellt, wo $\frac{1}{cc}$ der nämliche constante Factor ist, welcher in jener Abhandlung mit $\frac{aa}{16}$ bezeichnet wurde.

Für einen constanten Werth der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$, ist $\frac{ddr}{dt^2} = 0$, folglich die Kraft

$$= \frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{1}{cc} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}\right),$$

woraus sich ergiebt, dass c denjenigen constanten Werth der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ bedeutet, bei welchem zwei elektrische Massen gar keine Wirkung auf einander ausüben.

Nun ist ferner in der angeführten Abhandlung Art. 21 nachgewiesen worden, dass diejenige Zahl i, welche zu dem im vorhergehenden Artikel definierten Maasse J gefügt, irgend eine Stromintensität bestimmt,

$$i = aeu = \frac{4}{c} \cdot eu$$

ist, wo eu die Menge Elektricität bezeichnet, welche bei dieser Stromintensität während des Zeitmaasses durch den Querschnitt des Leiters

geht. Wird nun dieselbe Stromintensität nach dem in der Mechanik festgesetzten allgemeinen Strommaasse K durch

$$kK = iJ$$

ausgedrückt, so ist

$$k = eu = \frac{c}{4}\, i\,.$$

Es ergiebt sich hieraus die Regel, nach welcher die nach dem im vorigen Artikel definierten besonderen Maasse ausgeführten Messungen zu reducieren sind, um sie von diesem besonderen Maasse unabhängig zu machen, nämlich: man multipliciere die erhaltenen Werthe mit $\frac{c}{4}$. Man erhält dadurch den Werth der elektrischen Stromstärke nach dem allgemeinen Strommaasse in der Mechanik ausgedrückt.

Eben so ergiebt sich aus Art. 24 der angeführten Abhandlung, dass eine elektromotorische Kraft, welche durch eine Zahl e und durch das im vorigen Artikel definierte besondere Maass E bestimmt ist, nach dem allgemeinen Maasse aller Kräfte in der Mechanik F durch die Zahl f bestimmt werde, so dass $fF = eE$ ist, wenn

$$f = \frac{4}{c}\, e$$

gemacht wird; denn es ist in dem angeführten Art. 24 folgender Ausdruck für die elektromotorische Kraft, welche ein constanter Strom auf einen bewegten Leiter ausübt, nach dem allgemeinen Kraftmaasse der Mechanik gegeben:

$$f = -\frac{\alpha\alpha'}{rr}\, i\,(\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta\cos\theta')\,.\,\alpha u'\cos\varphi\,.$$

Unter denjenigen Verhältnissen aber, für welche die hierdurch bestimmte elektromotorische Kraft dem im vorigen Artikel definierten besonderen Maasse gleich wird, ist

$$\frac{\alpha\alpha'}{rr}\, i = 1,\ \varepsilon = 0,\ \theta = \tfrac{1}{2}\pi,\ \varphi = \pi,\ u' = 1$$

folglich ist, für $e = 1$, $f = a = \frac{4}{c}$, oder allgemein

$$f = \frac{4}{c}\, e\,.$$

Es ergiebt sich hieraus die Regel, nach welcher die nach dem im vorigen Artikel definierten besonderen Maasse ausgeführten Messungen elektromotorischer Kräfte zu reducieren sind, um sie von diesem besonderen Maasse unabhängig zu machen, nämlich: man multipliciere die erhaltenen Werthe mit $\frac{4}{c}$. Man erhält dadurch den Werth der elektromotorischen Kraft nach dem allgemeinen Kraftmaasse der Mechanik ausgedrückt.

Soll endlich aus diesen allgemeinen Kraft- und Strommaassen der Mechanik, indem sie für die elektromotorischen Kräfte und elektrischen Ströme gebraucht werden, ein absolutes Widerstandsmaass auf die nämliche Weise wie im vorhergehenden Artikel aus den dort definierten besonderen Maassen abgeleitet werden, so nämlich, dass derjenige Widerstand zum Maasse genommen wird, welchen eine Kette besitzen muss, damit das Maass der elektromotorischen Kraft das Strommaass hervorbringe; so ergiebt sich, wenn w nach dem im vorhergehenden Artikel definierten Maasse den nämlichen Widerstand bezeichnet, welchen v nach dem neuen Maasse, folgende Gleichung:

$$v = \frac{16}{cc} w .$$

Die Geschwindigkeit c, mit welcher zwei elektrische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie auf einander gar nicht wirken sollen, ist bis jetzt noch nicht ermittelt worden, und dies ist der Grund, warum die besonderen Maasse, wie die im vorigen Artikel definierten, zur Zeit noch für den praktischen Gebrauch in der Elektrodynamik unentbehrlich sind, weil ohne Kenntniss der Geschwindigkeit c die Reduction der gemessenen Stromintensitäten, elektromotorischen Kräfte und Widerstände auf die bekannten Maasse der Mechanik nicht ausgeführt werden kann.

V.

UEBER DEN ZUSAMMENHANG DER THEORIE DER GALVANISCHEN KETTE MIT DEN ELEKTRISCHEN GRUNDGESETZEN.

28.

Die Theorie der galvanischen Kette bildet an sich einen Theil der Elektrodynamik und es sollten darin die Gesetze der galvanischen Kette in ihrem Zusammenhange mit den elektrischen Grundgesetzen entwickelt werden. Dies ist bisher nicht geschehen; vielmehr ist die Theorie der galvanischen Kette für sich allein betrachtet worden und die Gesetze der galvanischen Kette sind theils unmittelbar aus der Erfahrung entnommen, theils aus Annahmen abgeleitet worden, welche

ganz unabhängig von den elektrischen Grundgesetzen aufgestellt worden sind. Namentlich gilt dies von den Gesetzen der galvanischen Kette, wie sie Ohm gegeben, deren Richtigkeit und praktische Bedeutung übrigens allgemein anerkannt wird. Der Grund, warum bisher eine solche Entwickelung der Theorie der galvanischen Kette aus den elektrischen Grundgesetzen noch nicht gegeben worden ist, dürfte hauptsächlich in den mathematischen Schwierigkeiten liegen, welche eine solche Entwickelung, wenn sie vollständig und streng sein soll, findet. Indessen mögen hier einige specielle Erörterungen Platz finden, welche den Zusammenhang der Theorie der galvanischen Kette mit den elektrischen Grundgesetzen betreffen, und welche mit den in dieser Abhandlung betrachteten Gegenständen in näherem Zusammenhange stehen.

Im Laufe dieser Abhandlung ist häufiger auf die Ohm'schen Gesetze der galvanischen Kette verwiesen worden, was nothwendig war, weil alle Widerstandsmessungen wesentlich auf diesen Gesetzen beruhen und selbst die Definition des Widerstands und des Widerstandsmaasses darauf begründet werden musste; denn der Widerstand wird im Grunde nur durch die nach den Ohm'schen Gesetzen für jeden geschlossenen Leiter in dem Verhältnisse der elektromotorischen Kraft zur Stromintensität gegebene Constante definiert.

Die Ohm'schen Gesetze setzen voraus, dass die Intensität des elektrischen Stroms in allen Theilen der geschlossenen Kette gleich sei, wie es bei eingetretener Beharrlichkeit wirklich der Fall sein muss. Durch diese Voraussetzung ist das Gebiet, für welches die Ohm'schen Gesetze gelten, beschränkt und umfasst nicht alle Bewegungen der Elektricität in der Kette; denn es sind davon z. B. alle Bewegungen ausgeschlossen, welche die Elektricität in der Kette machen muss, ehe ein beharrlicher Zustand zu Stande kommt. Auch leuchtet ein, dass diese Gesetze nur in so weit erfahrungsmässig begründet sind, als sie die Abhängigkeit der in allen Theilen der Kette gleich gewordenen Stromintensität von der Summe aller elektromotorischen Kräfte in der Kette und von der Summe der Widerstände aller ihrer Theile betreffen, während ein wirkliches Grundgesetz die Stromintensität an irgend einer Stelle der Kette nur von der auf diese Stelle wirkenden elektromotorischen Kraft und von dem an dieser Stelle vorhandenen Widerstande abhängig machen darf. Nun hat zwar Ohm, um zu einem wirklichen Grundgesetze zu gelangen, die Verschiedenheit der elektrischen Ladung

der verschiedenen Theile der Kette in Betracht gezogen und hat das Gesetz zu begründen gesucht, dass bei gleicher Stromintensität der Unterschied der Ladung an zwei Stellen, zwischen welchen keine elektromotorische Kraft gegeben ist (kein Berührungspunkt verschiedener Metalle), dem Widerstande des zwischen beiden Stellen liegenden Theils der Kette proportional sei, und dass dagegen an einer solchen Stelle, wo eine elektromotorische Kraft gegeben ist (wo z. B. zwei verschiedene Metalle sich berühren), die Ladung von der einen Seite zur andern einen plötzlichen Sprung mache, und dass der Unterschied der Ladung auf beiden Seiten der für diese Stelle gegebenen elektromotorischen Kraft proportional sei; dass endlich bei verschiedener Stromintensität der Unterschied der elektromotorischen Ladung an zwei bestimmten Stellen desselben Leiters der Stromintensität proportional sei. Hierdurch geleitet, hat dann Ohm ein analoges Grundgesetz für die elektrische Strömung in jedem Theile der Kette in ihrer Abhängigkeit von der Vertheilung der elektrischen Ladung aufgestellt, wie Fourier für die Wärmeströmung in jedem Theile eines Wärmeleiters in ihrer Abhängigkeit von der Vertheilung der Temperatur, und hat nachgewiesen, dass die aus dieser Analogie gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung übereinstimmen, so weit als deren Resultate verbürgt werden können.

Ohm hat wirklich in der Vertheilung der elektrischen Ladung den wahren Schlüssel gefunden zur Eröffnung des Uebergangs von dem erfahrungsmässig begründeten, die ganze geschlossene Kette umfassenden Gesetze zu dem wahren Grundgesetze, wie es allgemein von jedem Theile der Kette aufgestellt werden muss; was aber die Wirkung dieser elektrischen Vertheilung auf die Bewegung der Elektricität betrifft, die er bloss nach der Analogie mit der Wirkung der Temperaturvertheilung auf die Bewegung der Wärme betrachtet hat, so liegen Annahmen zu Grunde, welche weder nothwendig, noch zulässig erscheinen; denn die Wirkung der freien Elektricität ist durch das allgemeine Grundgesetz der Elektricitätslehre oder, wenn man von den relativen Bewegungen abstrahiert, durch das Grundgesetz der Elektrostatik schon gegeben und kann daraus für jede Vertheilung im Leiter berechnet werden, woraus sich leicht die Unzulässigkeit willkührlicher Annahmen nach blosser Analogie mit der Wirkung der Temperaturvertheilung auf die Bewegung der Wärme nachweisen lässt. Schon was die Vertheilung selbst

betrifft, erscheint es hiernach unzulässig, eine andere Vertheilung der freien Elektricität als an der Oberfläche des Leiters anzunehmen. Ferner leuchtet ein wesentlicher Unterschied auch daraus ein, dass zwischen der Wärmefortpflanzung und der in der Richtung derselben vorhandenen Temperaturabnahme eine so nothwendige Beziehung stattfindet, dass erstere ohne die letztere gar nicht möglich ist. Eine solche Abhängigkeit der elektrischen Strömung von der Vertheilung der freien Elektricität findet in der galvanischen Kette nicht statt, weil die Kräfte, welche die elektrische Strömung hervorbringen, nicht bloss von der nächsten Umgebung, sondern auch aus grösseren Entfernungen wirken und daher ihren Sitz auch ganz ausserhalb des Leiters haben können, was bei einem Wärmeleiter nicht möglich ist.

Man nehme z. B. einen kreisförmigen kupfernen Ring zum Leiter, dessen Querschnitt überall gleich ist, und bewege in der durch seinen Mittelpunkt senkrecht auf seine Ebene gelegten Geraden einen Magnet. Der Magnet übt bekanntlich bei dieser Bewegung auf alle Ringelemente gleiche elektromotorische Kraft aus und es wird dadurch, weil allen Elementen auch gleicher Widerstand zukommt, eine gleiche elektrische Strömung gleichzeitig in allen Elementen hervorgebracht, woraus folgt, dass an keiner Stelle des Ringes eine grössere oder geringere Ansammlung von positiver oder negativer Elektricität entstehen kann. Wir haben hier also den Fall eines Stroms in einer geschlossenen Kette ohne eine Vertheilung freier Elektricität in der Kette. Das Gesetz der Abhängigkeit der Stromintensität von der Vertheilung der freien Elektricität im Leiter findet also in allen denjenigen Fällen keine Anwendung, wo die gegebenen elektromotorischen Kräfte sich über die ganze geschlossene Kette erstrecken und in allen Theilen den Widerständen proportional wirken. Nur bei ungleichmässiger Wirksamkeit der gegebenen elektromotorischen Kräfte in den verschiedenen Theilen der Kette tritt eine Vertheilung freier Elektricität ein, und das Factum, dass ein in allen Theilen der Kette gleichförmiger und beharrlicher Strom zu Stande kommt, beweist dann, dass diese Vertheilung der freien Elektricität im Leiter die Wirkung habe, alle Ungleichheiten in der ursprünglichen Wirkungsweise der elektromotorischen Kräfte auszugleichen. Wird nun aber diese Ausgleichung durch das Factum der Existenz eines beharrlichen Stroms als bewiesen betrachtet, so bleibt noch übrig: erstens nachzuweisen, wie eine solche Vertheilung

nach dem elektrischen Grundgesetze möglich ist und wie sie beschaffen sein müsse, zweitens, wie sie entstehe und erhalten werde.

29.

Nachweisung der Möglichkeit einer Vertheilung der freien Elektricität im Leiter, wodurch die Ungleichheiten der Wirksamkeit gegebener elektromotorischer Kräfte in den verschiedenen Theilen der Kette nach Proportion ihrer Widerstände ausgeglichen werden.

Jedes Theilchen freier (positiver oder negativer) Elektricität, welches sich an der Oberfläche eines Leiters befindet, übt elektromotorische Kräfte auf alle Theile des Leiters aus, welche die gegebenen elektromotorischen Kräfte der Kette an einigen Stellen schwächen, an andern verstärken, und es fragt sich daher, ob eine solche Vertheilung freier Elektricität auf der ganzen Oberfläche des Leiters möglich sei, durch welche die elektromotorische Kraft überall, wo sie zu schwach ist, verstärkt, wo sie zu stark ist, geschwächt, und auf diese Weise eine Ausgleichung der elektromotorischen Kraft in allen Theilen der Kette nach Proportion ihrer Widerstände zu Stande gebracht werde, welche die Bedingung eines gleichförmigen und beharrlichen Stroms ist. Diese Frage muss, wenn vor der Hand von dem Einflusse der relativen Bewegungen der elektrischen Theilchen gegen einander abstrahiert wird, aus dem Grundgesetze der Elektrostatik entschieden werden, wodurch die von der Elektricität bei jeder beliebigen Vertheilung an der Oberfläche auf alle Punkte im Innern des Leiters ausgeübten Kräfte bestimmt sind.

Poisson hat bekanntlich aus dem Grundgesetze der Elektrostatik folgendes Theorem bewiesen:

> Wenn auf einen Leiter von beliebiger Gestalt von aussen beliebige elektrische Kräfte wirken, so ist an der Oberfläche des Leiters immer eine solche Vertheilung freier Elektricität möglich — aber nur eine einzige — bei welcher die elektrischen Kräfte, welche von dieser vertheilten freien Elektricität herrühren, den von aussen her wirkenden elektrischen Kräften in allen Punkten im Innern des Leiters zugleich das Gleichgewicht halten.

Denkt man sich nun zunächst einen Leiter von cylindrischer Form und in der Richtung seiner Axe in grosser Entfernung eine concentrierte

Masse freien (positiven oder negativen) elektrischen Fluidums, welche auf alle Theile des Cylinders gleiche und seiner Axe parallele Kräfte ausübt; so folgt aus obigem Lehrsatze die Möglichkeit einer solchen Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Cylinders, aus welcher, bei dem Wegfall jener fernen Masse, für alle Theile des Cylinders gleiche und seiner Axe parallele elektromotorische Kräfte resultieren, nämlich diejenigen Kräfte, welche den von der fernen Masse vor ihrem Wegfall ausgeübten Kräften das Gleichgewicht gehalten hatten.

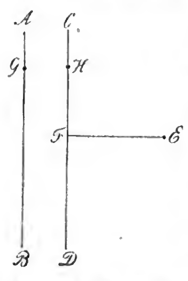
Denkt man sich dagegen einen gebogenen Stab und in der Richtung der Tangente eines seiner Elemente in grosser Entfernung eine concentrierte Masse freien (positiven oder negativen) Fluidums; so folgt eben so die Möglichkeit einer solchen Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche dieses Elements, aus welcher, bei dem Wegfall jener fernen Masse, für alle Theile des Elements gleiche und seiner Tangente parallele elektromotorische Kräfte resultieren, und diese Möglichkeit bleibt auch dann, wenn auf das betrachtete Element die elektrischen Ladungen aller andern Elemente des gebogenen Stabes wirken, wie auch diese Ladungen beschaffen sein mögen, nur dass alsdann die Vertheilungsweise der freien Elektricität an der Oberfläche des betrachteten Elements von der Ladung des übrigen Stabs abhängig ist.

Diese Betrachtung lässt sich nun auf alle Elemente des gebogenen Stabs anwenden, so dass für alle Elemente gleiche und ihren Tangenten parallele elektromotorische Kräfte resultieren. Die Ladungen aller einzelnen Elemente werden dadurch von der Ladung des ganzen Stabs abhängig gemacht, und die Ladung des ganzen Stabs muss endlich wiederum der Summe der Ladungen aller Elemente gleich gesetzt werden.

Eine auf solche Weise gewonnene Bestimmung der Ladung des ganzen gebogenen Stabs wird nun gelten, der Stab möge nur einen kleineren oder einen grösseren Theil von einem Kreise bilden. Die Ladungen in den Berührungsflächen je zweier an einander grenzender Elemente müssen sich neutralisieren, so dass die Vertheilung der freien Elektricität auf die Oberfläche des Stabs beschränkt bleibt, zu der aber wesentlich die Anfangsfläche und Endfläche des Stabs gerechnet werden müssen, welche daher nicht zusammenfallen dürfen.

Die Nothwendigkeit, Anfang und Ende des Stabs geschieden zu erhalten, wenn die an der Oberfläche vertheilte freie Elektricität in

allen Elementen des Stabs gleiche elektromotorische Kräfte nach tangentialer Richtung ausüben soll, folgt daraus, dass die Ladungen am Anfange und am Ende des Stabs, bei gegenseitiger Annäherung, keinem bestimmten Grenzwerthe sich nähern, sondern ins Unendliche wachsen müssten; wie man sich durch folgende Betrachtung überzeugen kann.



Es stelle *AB* die Anfangsfläche, *CD* die Endfläche des Stabs dar; der sehr kleine Abstand beider Flächen von einander heisse δ. Es darf angenommen werden, dass bei einer Verkleinerung von δ die Vertheilung der freien Elektricität auf der ganzen Staboberfläche mit Ausnahme von *AB* und *CD* nahe unverändert bleibt, woraus folgt, dass die für einen Punkt *E* des Stabs resultierende elektromotorische Kraft als unverändert angesehen werden kann, wenn nur die aus den Ladungen der beiden Flächen *AB* und *CD* für *E* resultierende elektromotorische Kraft gleich geblieben ist. *G* und *H* seien zwei gleiche, einander gegenüberliegende Elemente der Flächen *AB* und *CD*. Die Ladung des Elements *G* werde mit $-e$, die Ladung des Elements *H* mit $+e$ bezeichnet. Der Abstand *FH*, senkrecht auf die Richtung der für *E* resultierenden elektromotorischen Kraft, heisse β; der Abstand *FE* heisse α. Alsdann ergiebt sich die von *H* auf *E* nach der tangentialen Richtung *EF* wirkende Kraft aus dem Grundgesetze der Elektrostatik

$$= \frac{+\alpha e}{(\alpha\alpha+\beta\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

die von *G* auf *E* nach der nämlichen Richtung wirkende Kraft

$$= \frac{-(\alpha+\delta)e}{((\alpha+\delta)^2+\beta\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

folglich die Summe beider Kräfte, wenn δ gegen α sehr klein ist,

$$= \frac{2\alpha\alpha-\beta\beta}{(\alpha\alpha+\beta\beta)^{\frac{5}{2}}}\cdot\delta e\,.$$

Hieraus folgt also, dass die für *E* resultierende elektromotorische Kraft bei der Verkleinerung von δ unverändert bleibt, wenn das Product δe gleichen Werth behält. Für verschwindende Werthe von δ müsste also die Ladung e ins Unendliche wachsen, was zu beweisen war.

Zugleich leuchtet daraus ein, dass, wenn die im ganzen Stabe gleiche elektromotorische Kraft wachsen oder abnehmen soll, auch der Werth des Products δe sich proportional ändern müsse.

Bezeichnet endlich K einen zwischen den Flächen AB und CD gelegenen Punkt, so leuchtet ein, dass die Ladungen der Flächen AB und CD auf K eine elektromotorische Kraft nach entgegengesetzter Richtung wie auf E ausüben. Soll daher ein geschlossener Kreis gebildet werden, in welchem überall gleiche elektromotorische Kräfte in gleichem Sinne wirken, was nothwendig ist, wenn ein gleichförmiger und beharrlicher Strom zu Stande kommen soll, so muss K der Sitz einer von der Vertheilung der freien Elektricität an der Staboberfläche unabhängigen elektromotorischen Kraft sein, welches z. B. der Fall ist, wenn Kupfer und Zink im Punkte K einander berühren. Auch lässt sich nachweisen, dass die gegebene elektromotorische Kraft in allen Punkten K der Linie δ, welche die beiden entgegengesetzt geladenen Flächen verbindet, unter sonst gleichen Verhältnissen dem Produkte δe proportional sein müsse, und dass also dieses Produkt als ein Maass der gegebenen elektromotorischen Kraft betrachtet werden dürfe.*)

Aus diesen allgemeinen Betrachtungen lassen sich nun folgende

---

*) Es stellen AB und CD die beiden entgegengesetzt geladenen Flächen dar, deren Abstand $= \delta$ ist. G sei ein Element der Fläche AB, dessen Ladung mit e bezeichnet wird. Der Abstand FG, senkrecht auf die Richtung der für K resultierenden elektromotorischen Kraft, werde mit β, der Abstand FK mit α bezeichnet. Dann ergiebt sich die von G auf K nach der Richtung FK wirkende Kraft aus dem Grundgesetze der Elektrostatik

$$= \frac{e\alpha}{(\alpha\alpha + \beta\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

folglich für alle Punkte K von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \delta$

$$= e\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\sqrt{(\beta\beta + \delta\delta)}}\right).$$

Für alle Flächenelemente, welche in gleicher Entfernung β von F liegen, erhält man hiernach durch Multiplication mit $2\pi\beta$

$$2\pi e\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{(\beta\beta + \delta\delta)}}\right);$$

endlich für alle Flächenelemente von $\beta = 0$ bis $\beta = b$

$$2\pi e\left(\delta + b - \sqrt{(bb + \delta\delta)}\right)$$

oder, weil δ gegen b sehr klein ist,

$$2\pi e\delta .$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich für die von der Fläche CD ausgeübte Kraft, und es ergiebt sich folglich die Summe beider Kräfte $= 4\pi e\delta$, d. h. proportional dem Producte δe.

Resultate ziehen, welche eine Vergleichung mit den bekannten Gesetzen der galvanischen Kette gestatten.

1. Aus obiger Betrachtung folgt, dass in einem geschlossenen Ringe durch blosse Vertheilung der freien Elektricität an seiner Oberfläche kein Strom möglich ist, sondern dass wenigstens in einem Querschnitte dieses Ringes elektromotorische Kräfte, z. B. durch die Berührung von Kupfer mit Zink, gegeben sein müssen, wenn durch Vermittelung einer gewissen Vertheilung der freien Elektricität an der Ringoberfläche ein gleichförmiger und beharrlicher Strom im ganzen Ringe zu Stande kommen soll.

2. Wenn in einer bestimmten Kette der Strom verdoppelt werden soll, so muss die Menge der freien Elektricität auf der ganzen Oberfläche verdoppelt werden; folglich muss auch eine Verdoppelung des Factors e im Producte δe stattfinden, d. h. eine Verdoppelung der damit proportionalen elektromotorischen Kraft. Einer Verdoppelung der elektromotorischen Kraft entspricht also eine Verdoppelung der Stromintensität in der nämlichen Kette.

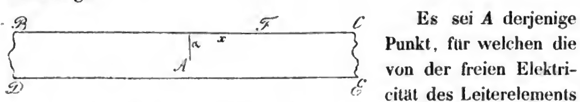
3. Werden alle Dimensionen einer Kette verdoppelt und soll dabei die elektromotorische Kraft in allen Punkten noch eben so gross wie vorher bleiben, so muss die Dicke der elektrischen Schicht an entsprechenden Stellen der Oberfläche unverändert geblieben sein, während die davon bedeckte Stelle der Oberfläche 4 Mal grösser geworden ist. Zugleich ergiebt das proportionale Wachsthum aller Dimensionen, dass auch der Abstand δ in dem Producte δe verdoppelt gedacht werden muss, wonach also, da e unverändert geblieben ist, das Product δe und die damit proportionale elektromotorische Kraft verdoppelt sein muss. Hieraus folgt, dass eine doppelte elektromotorische Kraft erfordert werde, um in einer Kette von doppelter Länge und vierfachem Querschnitte eine eben so starke elektrische Bewegung in allen Punkten hervorzubringen, wie in einer Kette von einfacher Länge und einfachem Querschnitte. Eine solche in allen Punkten gleich starke elektrische Bewegung giebt aber bei vierfachem Querschnitte die vierfache Stromintensität. Die doppelte elektromotorische Kraft bringt also in einer Kette von doppelter Länge und von vierfachem Querschnitte die vierfache Stromintensität hervor, was nach den bekannten Gesetzen der galvanischen Kette auch wirklich der Fall ist.

Eine vollständige Entwickelung der Gesetze der galvanischen Kette fordert eine nähere Bestimmung der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche der Kette.

30.

Ueber das Gesetz der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters eines gleichförmigen und beharrlichen Stroms.

Bei einem linearen Leiter ist es gestattet, für die Vertheilung der freien Elektricität auf der Oberfläche eine Vertheilung derselben in derjenigen Linie, welche die Axe des Leiters bildet, zu setzen. Es leuchtet dies in Beziehung auf alle Theile des Leiters von selbst ein, welche in grösserer Entfernung von demjenigen Punkte liegen, für welchen die von jener freien Elektricität ausgeübte elektromotorische Kraft bestimmt werden soll, und es bleibt daher nur übrig, den Beweis für denjenigen Theil des Leiters zu führen, welcher jenem Punkte zunächst liegt.



Es sei A derjenige Punkt, für welchen die von der freien Elektricität des Leiterelements $BCDE$ ausgeübte elektromotorische Kraft bestimmt werden soll; α bezeichne den unendlich kleinen Halbmesser des Leitungsdrahtes. Die Dicke der Schicht der freien Elektricität in dem Punkte F, dessen geringer Abstand von dem durch A gehenden Querschnitt des Leiters mit x bezeichnet werde, kann dargestellt werden durch

$$a + bx$$

und die elektromotorische Kraft welche die freie Elektricität des Flächenelements $2\pi\alpha dx$ bei F auf den Punkt A ausübt, durch

$$\frac{2\pi\alpha\,(a+bx)\,dx}{\alpha\alpha + xx}$$

woraus die Componente dieser Kraft nach der Richtung der Axe folgt,

$$= \frac{2\pi\alpha\,(a+bx)\,xdx}{(\alpha\alpha + xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

Der Integralwerth zwischen den Grenzen $x = -\lambda$ bis $x = +\lambda$ ist hiernach

$$2\pi\alpha b \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{xxdx}{(\alpha\alpha + xx)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\alpha b\left(\log\frac{\sqrt{(\lambda\lambda+\alpha\alpha)}+\lambda}{\sqrt{(\lambda\lambda+\alpha\alpha)}-\lambda} - \frac{2\lambda}{\sqrt{(\lambda\lambda+\alpha\alpha)}}\right)$$

oder, weil a gegen λ sehr klein ist,

$$= 4\pi ab \,.\, \log \frac{2\lambda}{e\alpha} = 4\pi ab\,(\log \lambda - \log \tfrac{e}{2}\,\alpha)$$

worin e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet.

Wäre nun dieselbe freie Elektricität, statt auf der Oberfläche des Leiters vertheilt, in seiner Axe concentriert, so würde von dem Axenelemente, in welchem die freie Elektricität $2\pi\alpha(a + x)dx$ concentriert wäre, auf A nach der Richtung der Axe eine elektromotorische Kraft wirken, welche dargestellt wird durch

$$\pm \frac{2\pi\alpha\,(a + bx)\,dx}{xx}$$

je nachdem x einen positiven oder negativen Werth hat. Der Integralwerth zwischen den Grenzen $x = -\lambda$ bis $x = -\frac{e}{2}\,\alpha$ ist

$$= 2\pi ab\left(\log \lambda - \log \tfrac{e}{2}\,\alpha\right) + 2\pi a\alpha\left(\tfrac{1}{\lambda} - \tfrac{2}{e\alpha}\right)$$

zwischen den Grenzen $x = + \frac{e}{2}\,\alpha$ bis $x = + \lambda$

$$= 2\pi ab\left(\log \lambda - \log \tfrac{e}{2}\,\alpha\right) - 2\pi a\alpha\left(\tfrac{1}{\lambda} - \tfrac{2}{e\alpha}\right);$$

folglich ist der Integralwerth zwischen den Grenzen $x = -\lambda$ bis $x = +\lambda$, mit Ausschluss des zwischen den Grenzen $x = -\frac{e}{2}\,\alpha$ bis $x = +\frac{e}{2}\,\alpha$ fallenden Theils,

$$= 4\pi ab\left(\log \lambda - \log \tfrac{e}{2}\,\alpha\right)$$

woraus hervorgeht, dass es gestattet ist, für die Vertheilung der freien Elektricität auf der Oberfläche eine Vertheilung derselben in der Axe des Leiters zu substituieren, wenn man in dem Integralwerthe der elektromotorischen Kraft denjenigen Theil ausschliesst, welcher zwischen den Grenzen $x = -\frac{e}{2}\,\alpha$ bis $x = +\frac{e}{2}\,\alpha$ liegt.

Hat z. B. der lineare Leiter die Gestalt eines Kreises, dessen Halbmesser $= r$ ist, und bezeichnet A den Anfangspunkt eines Bogens $AB = r\varphi$, welcher der Sitz der gegebenen elektromotorischen Kraft der Kette ist; so sei

$$f\varphi \,.\, d\varphi$$

die freie Elektricität des Bogenelements $rd\varphi$ am Ende des Bogens $r\varphi$. Der Werth des P o t e n t i a l s dieser elektrischen Masse im Punkte C am Ende des Bogens $AC = r\psi$ ist dann

$$= \frac{f\varphi \,.\, d\varphi}{2r \sin \frac{1}{2}\,(\varphi - \psi)}$$

folglich der Werth des Potentials der elektrischen Masse des ganzen Leiters im Punkte C

$$\frac{1}{2r}\int\frac{f\varphi\,.\,d\varphi}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)} = F\psi$$

wo die Integration von $\varphi = \psi + \frac{e}{2}\cdot\frac{a}{r}$ bis $\varphi = 2\pi + \psi - \frac{e}{2}\frac{a}{r}$ zu erstrecken ist. Hieraus ergiebt sich die auf den Punkt C ausgeübte elektromotorische Kraft, ausgedrückt durch den Differentialquotienten des Potentials in Beziehung auf den Bogen $r\psi$,

$$= \frac{d\,.\,F\psi}{rd\psi}\,.$$

Soll nun diese elektromotorische Kraft in allen Theilen des Leiters gleich sein, d. h. soll $\frac{d\,.\,F\psi}{rd\psi}$ einen constanten Werth c haben, so erhält man

$$F\psi = c\psi + \text{const.}$$

oder, bei symmetrischer Vertheilung der freien positiven und negativen Elektricität im Leiter, wo $F\pi = c\pi + \text{const.} = 0$ ist,

$$F\psi = c(\psi - \pi)\,.$$

Sollte nun auch die Auffindung der allgemeinen Form der Function $f\varphi$ Schwierigkeiten finden, so ist es doch nicht schwer, die von Ohm darüber aufgestellte Hypothese einer Prüfung zu unterwerfen und zu entscheiden, ob und in wie weit dieselbe zulässig sei.

Die Ohm'sche Hypothese besteht wesentlich darin, dass der Werth $f\varphi$ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ proportional mit φ wachse und dass also für den Fall der symmetrischen Vertheilung der positiven und negativen Elektricität im Leiter, wo $f(0) = -f(2\pi)$ ist,

$$f\varphi = a(\varphi - \pi)\,.$$

Dies vorausgesetzt, lässt sich der Werth des Potentials der freien Elektriticität des ganzen Leiters in demjenigen Punkte, für welchen $\varphi = \psi$ ist, folgendermassen bestimmen.

A sei der Anfangspunkt des Bogens $r\varphi$; $AB = BD = r\psi$. Alle Elemente des Bogens $r\varphi$ von A bis D lassen sich paarweise nach ihrem Abstande von B ordnen. Wenn nämlich das eine Element zu $\varphi = \psi - \chi$ gehört, dessen Abstand von $B = 2r\sin\frac{1}{2}\chi$ ist, so hat das zu $\varphi = \psi + \chi$ gehörende Element denselben Abstand von B. Die diesen beiden Elementen zugehörigen elekrischen Massen sind

$$a(\psi - \chi - \pi)\,d\chi \text{ und } a(\psi + \chi - \pi)\,d\chi$$

und der Werth des Potentials dieser Massen im Punkte B

$$\frac{a(\psi - \chi - \pi)\,d\chi}{2r\sin\frac{1}{2}\chi} \text{ und } \frac{a(\psi + \chi - \pi)\,d\chi}{2r\sin\frac{1}{2}\chi}\,,$$

folglich deren Summe

$$=\frac{a(\psi-\pi)\,d\chi}{r\sin\frac{1}{2}\chi}.$$

Der Werth des Potentials der freien Elektricität des ganzen Bogens AD im Punkte B ergiebt sich hieraus

$$\frac{a(\psi-\pi)}{r}\int_{\frac{\varepsilon\alpha}{2r}}^{\psi}\frac{d\chi}{\sin\frac{1}{2}\chi}=\frac{2a(\psi-\pi)}{r}\cdot\left(\log\text{tang}\,\tfrac{1}{4}\psi-\log\text{tang}\,\frac{\varepsilon\alpha}{8r}\right).$$

Der Punkt C des Kreises liege dem Punkte B diametral gegenüber, folglich der Bogen $ABC=r(\psi+\pi)$. Alle Elemente des Bogens $r\varphi$ von D über C nach A lassen sich ebenfalls paarweise ordnen nach ihrem Abstande von C. Wenn nämlich das eine Element zu $\varphi=\psi+\pi-\chi$ gehört, dessen Abstand von $C=2r\sin\frac{1}{2}\chi$ ist, so hat das zu $\varphi=\psi+\pi+\chi$ gehörende Element denselben Abstand von C. Die diesen beiden Elementen zugehörigen elektrischen Massen sind

$$a(\psi-\chi)\,d\chi \text{ und } a(\psi+\chi)\,d\chi$$

und der Werth des Potentials dieser Massen im Punkte B

$$\frac{a(\psi-\chi)\,d\chi}{2r\sin\frac{1}{4}(\pi-\chi)} \text{ und } \frac{a(\psi+\chi)\,d\chi}{2r\sin\frac{1}{4}(\pi-\chi)}$$

folglich deren Summe

$$=\frac{a\psi}{r}\cdot\frac{d\chi}{\cos\frac{1}{2}\chi}.$$

Der Werth des Potentials der freien Elektricität des ganzen Bogens DCA im Punkte B ergiebt sich hieraus

$$\frac{a\psi}{r}\int_{0}^{\pi-\psi}\frac{d\chi}{\cos\frac{1}{2}\chi}=-\frac{2a\psi}{r}\log\text{tang}\,\tfrac{1}{4}\psi$$

der Werth des Potentials der freien Elektricität des ganzen Kreises also

$$=-\frac{2a\psi}{r}\log\text{tang}\,\frac{\varepsilon\kappa}{8r}-\frac{2a\pi}{r}\left(\log\text{tang}\,\tfrac{1}{4}\psi-\log\text{tang}\,\frac{\varepsilon\alpha}{8r}\right).$$

Hieraus ergiebt sich die auf den Punkt B ausgeübte elektromotorische Kraft, ausgedrückt durch den Differentialquotienten des Potentials in Beziehung auf den Bogen $r\psi$,

$$=-\frac{2a}{rr}\log\text{tang}\,\frac{\varepsilon\alpha}{8r}-\frac{a\pi}{rr\sin\frac{1}{2}\psi}$$

oder

$$=\frac{2a}{rr}\log\cot\frac{\varepsilon\alpha}{8r}-\frac{a\pi}{rr\sin\frac{1}{2}\psi}.$$

rur diejenigen Werthe von ψ, welche von π wenig verschieden sind, ergiebt sich hiernach die elektromotorische Kraft nahe gleich; je mehr aber der Werth von ψ dem Werthe von 0 oder 2π nahe kommt, desto tiefer sinkt die elektromotorische Kraft unter jenem Grenzwerthe herab, woraus also folgt, dass die Ohm'sche Hypothese über die Vertheilung der freien Elektricität nur für den mittlern Theil der Kette näherungsweise zulässig ist.

So wie nun nach dieser Hypothese der Werth der elektromotorischen Kraft in allen Theilen der Kette kleiner ist, als der für die Mitte der Kette gültige Grenzwerth, so lässt sich auch leicht eine Hypothese aufstellen, nach welcher er grösser sein würde. Die Ohm'sche Hypothese bedarf nämlich nothwendig einer Ergänzung, wenn sie nicht mit dem Satze in Widerspruch stehen soll, dass aus der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche eines Leiters eine im Innern des Leiters überall gleiche elektromotorische Kraft nur dann resultieren könne, wenn zwei Querschnittsflächen des Leiters zu jener Oberfläche gehören (s. S. 275). Denn hiernach muss in unserer linearen Darstellung alle in diesen beiden Querschnittsflächen befindliche freie Elektricität in zwei Punkten concentriert gedacht werden, während in der ganzen übrigen Kette nur die in der Begrenzungslinie eines Querschnitts befindliche Elektricität in einem Punkte concentriert gedacht wird. Es ergiebt sich daraus, dass wenigstens in den jene beiden Querschnitte darstellenden Endpunkten eine von Ohm nicht berücksichtigte Concentration von freier Elektricität stattfinden müsse. Bezeichnet man diese mit $\pm \varepsilon$, wo das obere Vorzeichen für den einen, das untere für den andern Punkt gilt, und bezeichnet δ den kleinen Abstand beider Punkte von einander, so lässt sich die elektromotorische Kraft, welche dadurch für jeden Punkt der Kette noch hinzukommt, nach demselben Gesetze bestimmen, welches Gauss für die Wirkung eines Magnets in die Ferne gegeben hat. Siehe »Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840« S. 33. 34. Ist nämlich ACA' der kreisförmige Leiter und in A die Contaktstelle, und soll die elektromotorische Kraft bestimmt werden, welche durch die freie Elektricität $\pm \varepsilon$ zu beiden Seiten von A im Punkte C des Leiters hinzukommt; so ziehe man in A die Tangente und verlängere sie, bis sie in B die verlängerte Gerade $A'C$ schneidet, wo A' denjenigen Punkt des Kreises bezeichnet, welcher dem Punkte A diametral gegenüber

liegt; ferner mache man $AD = \frac{1}{3} AB$ und ziehe CD; so ist CD die Richtung der elektromotorischen Kraft, welche $\pm \varepsilon$ in C ausübt, und die Grösse dieser Kraft wird dargestellt durch

$$\frac{CD}{AD} \cdot \frac{\partial\varepsilon}{AC^3}.$$

Zieht man endlich die Tangente des Kreises in C und fällt darauf das Perpendikel DE; so ergiebt sich die Componente nach der Richtung der Kreistangente in C, d. i. die gesuchte elektromotorische Kraft

$$= \frac{CE}{CD} \cdot \frac{CD}{AD} \cdot \frac{\partial\varepsilon}{AC^3} = \frac{CE}{AD} \cdot \frac{\partial\varepsilon}{AC^3}.$$

Bezeichnet man den Halbmesser des Kreises mit r und den Kreisbogen AC mit ψ, so findet man dafür den Ausdruck

$$\frac{1 + \cos\frac{1}{2}\psi^2}{\sin\frac{1}{2}\psi^3} \cdot \frac{\partial\varepsilon}{8r^3}.$$

Fügt man nun diese elektromotorische Kraft der nach der Ohm'schen Hypothese gefundenen noch hinzu, so erhält man

$$\frac{2a}{rr}\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \frac{a\pi}{rr\sin\frac{1}{2}\psi} + \frac{1 + \cos\frac{1}{2}\psi^2}{\sin\frac{1}{2}\psi^3} \cdot \frac{\partial\varepsilon}{8r^3}.$$

Auch dieser Werth ist nahe constant für solche Werthe von ψ, welche von π wenig verschieden sind, wie man ersieht, wenn man den Differentialquotienten entwickelt, nämlich

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\psi}{2rr\sin\frac{1}{2}\psi^2}\left(a\pi - \frac{\partial\varepsilon}{4r}\left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{1 + \cos\frac{1}{2}\psi^2}{\sin\frac{1}{2}\psi^2}\right)\right)$$

welcher für $\psi = \pi$ Null ist. Ausserdem kann aber der Werth von $\partial\varepsilon$ so bestimmt werden, dass auch der zweite und dritte Differentialquotient für $\psi = \pi$ Null ist, welches der Fall ist, wenn

$$\partial\varepsilon = \frac{8}{5} a\pi r$$

ist. Substituiert man diesen Werth von $\partial\varepsilon$ in dem Ausdruck der elektromotorischen Kraft, so erhält man

$$\frac{2a}{rr}\log\cot\frac{e\alpha}{8r} + \frac{2a\pi}{5rr\sin\frac{1}{2}\psi^3}\left(3\cos\frac{1}{2}\psi^2 - 2\right)$$

dessen Differentialquotient

$$= -\frac{3}{5}\,\frac{a\pi}{rr}\,\frac{\cos\frac{1}{2}\psi^3}{\sin\frac{1}{2}\psi^4}$$

für $\psi = \pi$ Null ist, weil er $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$ zum Factor hat. Auch sieht man, dass die beiden folgenden Differentialquotienten für $\psi = \pi$ Null werden, weil sie ebenfalls den Factor $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$ haben.

Man ersieht hieraus, dass nach dieser Hypothese der Werth der elektromotorischen Kraft in allen anderen Theilen der Kette grösser ist, als der für die Mitte der Kette gültige Grenzwerth, statt er nach der

Ohm'schen Hypothese kleiner war. Die richtige Hypothese über die Vertheilung der freien Elektricität, aus welcher sich eine überall gleiche elektromotorische Kraft ergeben soll, ist also zwischen den von den beiden obigen Hypothesen gegebenen Grenzen eingeschlossen, was so viel heisst als: die elektrische Ladung der Kette wächst von dem Indifferenzpunkte zu dem Contaktpunkte nicht gleichförmig, sondern allmählig beschleunigt. Die daraus hervorgehende, überall gleiche elektromotorische Kraft wird dann muthmasslich zwischen den durch die beiden obigen Hypothesen gegebenen Grenzwerthen liegen, nämlich

$$\frac{2a}{rr}\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \frac{1}{2}\pi\right) \text{ und } \frac{2a}{rr}\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \frac{2}{5}\pi\right).$$

Der Factor a bezieht sich dabei auf das Gefälle der elektrischen Ladung in der Mitte der Kette, wenn man nach Ohm unter Gefälle den Differentialquotienten der Ladung $f\varphi$ in Beziehung auf den Bogen φ versteht.

31.

Die Vertheilung der freien Elektricität in einem linearen Leiter, durch welchen ein constanter Strom geht, und die Grösse der von dieser Vertheilung abhängigen elektromotorischen Kraft kann in jedem einzelnen Falle genähert auf folgende Weise bestimmt werden. Der Einfachheit wegen soll auch hier für den Leiter die Form eines Kreises angenommen werden und für einen einzigen Punkt desselben eine elektromotorische Kraft $= a$ gegeben sein.

Theilt man den Kreis durch die Punkte A, (A^1), B, (A_1) in vier gleiche Theile und ist B der Punkt, für welchen die elektromotorische Kraft $= a$ gegeben ist; so lässt sich leicht eine Vertheilung freier Elektricität in den beiden Punkten (A^1) und (A_1) angeben, durch welche die elektromotorischen Kräfte in den beiden Punkten A und B ausgeglichen werden. Denn bezeichnet $+e$ die freie Elektricität in (A^1), $-e$ in (A_1) und r den Halbmesser des Kreises, so ist $2r\sin\frac{1}{4}\pi = r\sqrt{2}$ der Abstand der Punkte A und B von (A^1) oder (A_1). Hieraus ergiebt sich nach dem Grundgesetze der Elektrostatik die elektromotorische Kraft nach der Richtung der Tangente des Kreises

$$\text{in } B = a - \frac{2e}{4rr\sin\frac{1}{4}\pi^2}\cdot\cos\frac{1}{4}\pi = a - \frac{e}{rr}\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{in } A = + \frac{2e}{4rr\sin\frac{1}{4}\pi^2}\cdot\cos\frac{1}{4}\pi = + \frac{e}{rr}\sqrt{\frac{1}{2}}$$

folglich für die verlangte Ausgleichung

$$a = \frac{e}{rr} \cdot \sqrt{2}$$

oder

$$\pm e = \pm arr \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2}} \,.$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich, wenn der Kreis durch die Punkte A, (A^1), A^1, (A^2), etc. in $4n$ gleiche Theile getheilt wird und in dem A diametral gegenüberliegenden Punkte B die elektromotorische Kraft $= a$ gegeben ist, eine solche Vertheilung freier Elektricität in $2n$ Punkten (A^1), (A^2), etc., durch welche die elektromotorischen Kräfte in den $2n$ Punkten A, A^1, etc. ausgeglichen werden. Denn bezeichnet $\pm e_1$ die freie Elektricität in (A^1), (A_1), $\pm e_2$ in (A^2), (A_2), etc., und r den Halbmesser des Kreises, und setzt man $\dfrac{\cos\frac{(2m-1)\pi}{4n}}{4rr\left[\sin\frac{(2m-1)\pi}{4n}\right]^2} = p_m$, so findet man die elektromotorische Kraft nach der Richtung der Tangente des Kreises

$$\text{in } B = a - 2p_n \,.\, e_1 - 2p_{n-1} \,.\, e_2 - \ldots - 2p_1 \,.\, e_n$$

$$\text{in } A = 2p_1e_1 + 2p_2e_2 + \ldots + 2p_ne_n$$

in A^m oder in A_m

$$= - p_me_1 - p_{m-1}e_2 - \ldots - p_1e_m + p_1e_{m+1} + \cdots + p_{n-m}e_n$$
$$+ p_{m+1}e_1 + p_{m+2}e_2 + \ldots + p_ne_{n-m} - p_ne_{n-m+1} - \ldots - p_{n-m+1}e_n$$

worin für m alle ganzen Zahlen von 1 bis $n-1$ gesetzt werden können. Durch Gleichsetzung aller dieser $(n+1)$ Werthe erhält man n Gleichungen zur Bestimmung der n unbekannten Grössen e_1, e_2, ... e_n.

Ferner ergiebt sich der Mittelwerth der beiden ersten von obigen $(n+1)$ gleichgesetzten elektromotorischen Kräften k

$$k = \tfrac{1}{2}a + (p_1 - p_n)e_1 + (p_2 - p_{n-1})e_2 + \ldots$$

und die Summe aller zusammen

$$(n+1)k = a + (p_1 - p_n)e_1 + (p_2 - p_{n-1})e_2 + \ldots$$

folglich

$$(n+1)k - a = k - \tfrac{1}{2}a$$

oder

$$a = 2nk\,.$$

Z. B. für $n = 2$ ergiebt sich

$$e_1 = 0{,}01567 \,.\, 4rra$$
$$e_2 = 0{,}05833 \,.\, 4rra$$
$$k = \tfrac{1}{4}a$$

für $n = 4$:

$$e_1 = 0{,}001537 \,.\, 4rra$$
$$e_2 = 0{,}004744 \,.\, 4rra$$
$$e_3 = 0{,}008570 \,.\, 4rra$$
$$e_4 = 0{,}015922 \,.\, 4rra$$
$$k = \tfrac{1}{8}\, a$$

für $n = 8$:

$$e_1 = 0{,}0001582 \,.\, 4rra$$
$$e_2 = 0{,}0004771 \,.\, 4rra$$
$$e_3 = 0{,}0008047 \,.\, 4rra$$
$$e_4 = 0{,}0011495 \,.\, 4rra$$
$$e_5 = 0{,}0015271 \,.\, 4rra$$
$$e_6 = 0{,}0019726 \,.\, 4rra$$
$$e_7 = 0{,}0025951 \,.\, 4rra$$
$$e_8 = 0{,}0041187 \,.\, 4rra$$
$$k = \tfrac{1}{16}\, a\,.$$

Je grösser die Zahl n ist, desto mehr nähert sich der Werth von e_1 den Werthen

$$\tfrac{1}{3}\, e_2\,,\ \tfrac{1}{5}\, e_3 \ldots .$$

Vertheilt man nun die Massen e_1, $e_2 \ldots e_m$, für welche die Abweichungen von den Massen $e_1, 3e_1, \ldots (2m-1)\, e_1$ als unmerklich vernachlässigt werden dürfen, auf die m Kreisbogen $\frac{\pi r}{n}$, in deren Mitte sie liegen, dem Abstande x vom Punkte A proportional, so ist, wenn b einen constanten Factor bezeichnet,

$$b \int_0^{\frac{m}{n}\pi r} x dx = \tfrac{1}{2}\, b \cdot \frac{mm\pi\pi rr}{nn} = e_1 + e_2 + \ldots + e_m = mme_1\,,$$

folglich
$$b = \frac{2nn}{\pi\pi} \cdot \frac{e_1}{rr}\,.$$

Nun war die elektromotorische Kraft der in der Mitte der m Kreisbogen $\frac{\pi r}{n}$ concentrierten Massen e_1, $e_2 \ldots . e_m$ im Punkte A, wenn der Kreisbogen $\frac{m}{n}\pi r$ so klein ist, dass seine Abweichung von der geraden Linie als unmerklich betrachtet werden darf,

von e_1
$$= \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot e_1$$

von e_2
$$= \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot \tfrac{1}{9}\, e_2 = \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot \tfrac{1}{3}\, e_1$$

von e_m
$$= \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot \frac{1}{(2m-1)^2}\, e_m = \frac{4nn}{\pi\pi rr} \cdot \frac{1}{2m-1} \cdot e_1$$

also die ganze von diesen m Massen im Punkte A ausgeübte elektromotorische Kraft

$$= \frac{4nn}{\pi\pi rr}\left(1 + \frac{1}{3} + \cdot\cdot + \frac{1}{2m-1}\right) e_1 = 2\left(1 + \frac{1}{3} + \cdot\cdot + \frac{1}{2m-1}\right) b\,.$$

Die elektromotorische Kraft dagegen, welche von der nämlichen, nach dem angegebenen Gesetze stetig auf den ganzen Bogen $\frac{m}{n}\pi r$ vertheilten Masse im Punkte A ausgeübt wird, wenn diese lineare Vertheilung nach Art. 30 die Stelle der wirklichen Vertheilung auf der Oberfläche eines dünnen Drahts von dem Halbmesser α vertritt, wird gefunden

$$b\int_{\frac{e\alpha}{2}}^{\frac{m}{n}\pi r} \frac{dx}{x} = b \log \text{nat} \frac{2m\pi r}{ne\alpha}\,.$$

Diese beiden Ausdrücke für die von den m Massen im Punkte A ausgeübte elektromotorische Kraft sind gleich, wenn α einen solchen Werth erhält, dass

$$2\left(1 + \frac{1}{3} + \cdot\cdot + \frac{1}{2m-1}\right) = \log \text{nat} \frac{2m\pi r}{ne\alpha}$$

d. i.

$$e\alpha = \frac{2m}{n}\pi r e^{-2\left(1 + \frac{1}{3} + \cdot\cdot + \frac{1}{2m-1}\right)}$$

ist, worin e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet. Je grösser die Zahl n und folglich auch die Zahl m ist, desto geringer ist der Einfluss, welchen es auf den Werth von α hat, ob die Zahl m um einen oder einige Einheiten grösser oder kleiner genommen wird. Denn bezeichnet m eine grössere Zahl und α' den Werth, welchen α erhält, wenn m um 1 vergrössert wird, so lässt sich α' darstellen durch $\frac{2m^2+3m+1}{2m^2+3m}\cdot\alpha$, was für grosse Werthe von m nur wenig von α verschieden ist. Für diesen Werth von α können also die in den Mittelpunkten der m Kreisbogen $\frac{\pi r}{n}$ concentrierten Massen freier Elektricität an die Stelle einer gleich grossen, an der Oberfläche des Leiters stetig vertheilten Masse gesetzt werden; denn für den dem betrachteten Punkte zunächst liegenden Theil der Kette folgt dies aus der eben nachgewiesenen Gleichheit der elektromotorischen Kräfte, für die ferneren Theile der Kette leuchtet es aber eben so wie Art. 30 von selbst ein.

Für den oben betrachteten Fall, wenn $n = 8$ ist, sieht man leicht, dass m nicht grösser als 2 genommen werden kann; folglich

$$e\alpha = \frac{1}{2}\pi r e^{-\frac{8}{3}} = 0{,}10915\,.\,r\,.$$

Dieser Werth von α ist nun allerdings, weil so kleine Werthe von n und m ihm zu Grunde gelegt worden, nicht als genau zu betrachten und ergiebt sich ausserdem zu gross, als dass die Art. 30 entwickelten Regeln, welche nur für kleine Werthe von α gelten, mit hinreichender Genauigkeit angewendet werden könnten. Eine genauere Anwendung dieser Regeln würde fordern, dass n nicht kleiner als 32 wäre, wo, wenn man $m = 4$ annähme,

$$e\alpha = \tfrac{1}{4}\,\pi r e^{-\frac{352}{105}} = 0{,}02749\,.\,r$$

erhalten würde. Der vorliegende Fall möge daher nur zur Erläuterung dienen, wie auf dem angegebenen Wege, trotz der Ungenauigkeit und der Grösse von α, die Vertheilung der freien Elektricität im Leiter und die daraus resultierende elektromotorische Kraft doch einigermassen näherungsweise bestimmt werde. Ausser dem Werthe von $e\alpha$

$$e\alpha = 0{,}10915\, r$$

erhält man nämlich für diesen Fall

$$b = \frac{32}{\pi\pi} \cdot \frac{e_1 + e_2}{rr} = 0{,}008239\,.\,a$$

und die in der ganzen Kette gleiche elektromotorische Kraft

$$k = \tfrac{1}{16}\, a\,.$$

Diese Resultate lassen sich nur mit den S. 285 gegebenen Formeln vergleichen, wonach dieselbe elektromotorische Kraft näherungsweise durch folgende beide Ausdrücke dargestellt werden soll, nämlich durch

$$\frac{2a}{rr}\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \frac{1}{2}\pi\right)$$

oder durch

$$\frac{2a}{rr}\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \frac{2}{5}\pi\right)$$

wobei zu beachten ist, dass dort das Massenelement der freien Elektricität in dem Bogenelemente $rd\varphi$, welches in einer kleinen Entfernung $r\varphi$ vom Indifferenzpunkte A sich befindet, durch $a\varphi d\varphi$ ausgedrückt worden ist, während hier dasselbe Massenelement mit $bxdx$ bezeichnet wurde, wo $x = r\varphi$ und $dx = rd\varphi$ ist: es ist also in diesen beiden Formeln $a = brr$ zu setzen. Hiernach ergiebt sich nun näherungsweise entweder

$$k = 2b\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \frac{1}{2}\pi\right) = 0{,}04488\,.\,a$$

oder

$$k = 2b\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \frac{2}{5}\pi\right) = 0{,}05006\,.\,a$$

statt oben $k = \frac{1}{16} a = 0{,}0625 \,.\, a$ gefunden worden ist. Man sieht also hieraus, dass, wenn der oben berechnete Werth von k mit den beiden letzteren Näherungswerthen auch nicht genau übereinstimmt, was bei der Ungenauigkeit und Grösse des Werths von a unmöglich ist, jener Weg doch selbst unter diesen ungünstigen Verhältnissen wenigstens zu einem Werthe für k von gleicher Grössenordnung führt. Eine grössere Uebereinstimmung darf erwartet werden, wenn die Rechnung z. B. für $n = 32$ oder für noch grössere Zahlen ausgeführt würde. Durch eine angemessene Vergrösserung der Zahlen n und m würde sich die Vertheilung der freien Elektricität in dem linearen Leiter sowohl, als auch die davon abhängige elektromotorische Kraft näherungsweise mit jeder verlangten Schärfe bestimmen lassen.

Es ist übrigens kaum nöthig, besonders zu bemerken, dass in obiger Darstellung die Kreisform des Leiters nur beispielsweise zur Vereinfachung der Rechnung gewählt worden ist, dass aber dieselbe Methode für jede andere lineare Form des Leiters anwendbar bleibt. Dasselbe gilt auch, wenn statt einer elektromotorischen Kraft mehrere solche Kräfte an verschiedenen Stellen des Leiters gegeben sind, oder wenn der Leiter in Abtheilungen von verschiedenem specifischen Widerstande zerfällt, und daher eine ungleichförmige Vertheilung der elektromotorischen Kraft nach Proportion dieses Widerstandes stattfinden muss. Ueberhaupt ist die Anwendung dieser Methode, abgesehen von dem Umfange der Rechnung, nur dadurch beschränkt, dass lineare Leiter vorausgesetzt werden.

32.

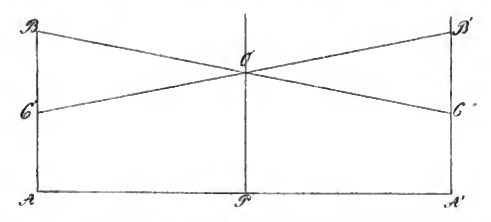
Nachweisung, wie die zu einem gleichförmigen und beharrlichen Strome nothwendige Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des geschlossenen Leiters entstehe.

Es leuchtet ein, dass, wenn nur in einzelnen Punkten einer geschlossenen Kette elektromotorische Kräfte gegeben sind, unmittelbar nur in diesen Punkten eine elektrische Strömung beginnen kann und nicht in der ganzen Kette; denn in allen denjenigen Theilen der Kette, auf welche keine elektromotorischen Kräfte wirken, werden die elektrischen Fluida auch nicht bewegt. Beginnen aber die elektrischen Fluida an den Stellen, wo elektromotorische Kräfte gegeben sind, sich zu be-

wegen, und zwar das positive Fluidum nach der einen Richtung, das negative nach der entgegengesetzten Richtung, während die Fluida vor ihnen noch in Ruhe beharren, so wird durch dieses Fortschieben des positiven Fluidums nach der einen Seite zu auf dieser Seite eine Ansammlung von freier positiver Elektricität hervorgebracht, welche sogleich eine elektromotorische Kraft vorwärts und rückwärts ausübt. Rückwärts schwächt sie die Wirkung der gegebenen elektromotorischen Kraft oder hebt dieselbe auf, vorwärts übt sie eine elektromotorische Kraft in gleichem Sinne aus, wie die gegebene, nur an einer andern Stelle der Kette. Dasselbe gilt auch von dem in entgegengesetzter Richtung fortgeschobenen negativen Fluidum, so lange die elektrischen Fluida in dem vor ihm gelegenen Theile der Kette in Ruhe verharren. Auch die daraus sich ergebende Ansammlung freier negativer Elektricität wirkt sogleich rückwärts und vorwärts, schwächt nämlich rückwärts die Wirkung der gegebenen elektromotorischen Kraft und übt vorwärts eine elektromotorische Kraft in gleichem Sinne aus, wie die gegebene, nur an einer andern Stelle der Kette. Setzt man diese Betrachtung fort, so übersieht man im Allgemeinen, dass nur bei einem gleichförmigen Strome in allen Theilen der Kette diese Ansammlungen freier Elektricität zu wachsen aufhören und stationär werden können, und dass jede Abweichung von der Gleichförmigkeit des Stroms unmittelbar eine Veränderung in diesen Ansammlungen mit sich führt, welche so lange zunimmt, bis die Ungleichförmigkeit des Stroms wieder verschwunden ist.

Die Art. 29, 30 erörterte Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters ist nun zwar der Art, dass kein Gleichgewicht der vertheilten freien Elektricität dabei bestehen kann; denn dazu wäre nöthig, dass die Resultante aller Kräfte, welche ein Theilchen der freien Elektricität an der Oberfläche von allen übrigen erleidet, gegen die Oberfläche senkrecht und nach aussen gerichtet wäre, was nicht der Fall ist. Denn aus der Art. 29 gegebenen Darstellung erhellt von selbst, dass ausser einer gegen die Oberfläche senkrechten, nach aussen gerichteten Kraft noch eine tangentiale Kraft für jedes Theilchen der freien Elektricität an der Oberfläche resultiere, woraus folgt, dass diese freie Elektricität an der Oberfläche nicht in Ruhe beharren könne, sondern an der Strömung, welche im Innern stattfindet, Antheil nehmen müsse. Diese Theilnahme der freien Elektricität der Oberfläche an der Strö-

mung im Innern kann aber mit einer unveränderten Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters wohl bestehen. Denn stellt man die Vertheilung aller strömenden positiven Elektricität, am Rande und im Innern, für den zu einer geraden Linie ausgestreckt gedachten Leiter *AA'* durch die Ordinaten einer anderen geraden



Linie *BC* dar und eben so die Vertheilung aller strömenden negativen Elektricität durch die Ordinaten einer dritten geraden Linie *B'C'*, welche die Linie *BC* in *O* schneidet, so sind nach dieser Darstellung im Querschnitt *OP* beide Fluida in gleicher Menge vorhanden; von *P* nach *A* zu wächst aber der Ueberschuss an positiver Elektricität proportional mit dem Abstande von *P*; von *P* nach *A'* zu wächst der Ueberschuss an negativer Elektricität ebenfalls proportional mit dem Abstande von *P*. Die allgemeine Strömung wird alsdann durch ein gleich schnelles Fortrücken der Linien *BC* und *B'C'* in entgegengesetzter Richtung parallel mit *AA'* dargestellt, woraus sich leicht ergiebt, dass die Ordinate des Schneidungspunktes beider Linien *PO*, d. h. der Indifferenzpunkt der Kette, unverrückt bleibt und dass auch durch dieses Fortrücken das Wachsthum des Ueberschusses an einer von beiden Elektricitäten mit dem Abstande von *P* unverändert bleibt, wenn nur vorausgesetzt werden darf, dass in den Contaktpunkten *A*, *A'* die fortgerückte Elektricität durch neu geschiedene immer so ersetzt wird, dass die fortgerückten Geraden *BC* und *B'C'* rückwärts immer so weit verlängert werden, dass sie bis zu den Ordinaten der Punkte *A*, *A'* sich erstrecken. Nach dieser bildlichen Darstellung könnte es scheinen, als wenn die Menge der zwischen *A* und *A'* strömenden Elektricität immer grösser würde. Dies kommt daher, weil dabei die in *A* und *A'* immer neu geschiedene und nach entgegengesetzten Seiten bewegte Elektricität in Rechnung gebracht ist, während auf die zwischen *A* und *A'* durch Wieder-

vereinigung zur Ruhe kommenden Elektricität keine Rücksicht genommen ist. Diese allmählige Wiedervereinigung beider elektrischen Fluida zwischen A und A' lässt sich aber auch leicht bildlich darstellen durch ein Fortrücken der Abscissenlinie nach oben, welches mit solcher Geschwindigkeit geschehen kann, dass die Ordinate PO immer gleiche Länge behält, wodurch ausgedrückt wird, dass die Menge der daselbst befindlichen positiven und negativen Elektricität unverändert bleibt.

In dieser Darstellung ist das Ohm'sche Gesetz der Proportionalität für die Ladung der Kette angenommen. Sollte auf die in den vorhergehenden Artikeln erörterte Abweichung von diesem Gesetze Rücksicht genommen werden, so müsste zugleich auch der Unterschied der Geschwindigkeit in Rechnung gebracht werden, mit welcher die beiden Elektricitäten strömen müssen, wenn, bei einem vorhandenen Überschuss der einen, gleiche Quantitäten von beiden durch den Querschnitt gehen sollen. Auch dürfte dann, bei genauerer Erörterung, das elektrostatische Princip, welches hier der Einfachheit wegen zum Grunde gelegt worden ist, nicht mehr genügend befunden und daher das Zurückgehen auf das allgemeine Grundgesetz der elektrischen Wirkung für nothwendig erachtet werden.

33.

Während des Drucks dieser Abhandlung ist in Poggendorffs Annalen Bd. 79. S. 506 eine von Herrn Dr. Kirchhoff der physicalischen Gesellschaft zu Berlin gemachte Mittheilung erschienen: „Ueber eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst", worin die Principien, auf welchen auch die vorhergehenden Erörterungen beruhen, einer genaueren Prüfung unterworfen worden sind. Insbesondere ist gezeigt worden, dass die Ohm'schen Gesetze der galvanischen Kette in keinem nothwendigen Zusammenhange mit der von Ohm bei ihrer Ableitung, im Widerspruche mit dem elektrostatischen Grundgesetze, gemachten Voraussetzung stehen, dass die Elektricität in einem Leiter sich in Ruhe befinden könne, wenn sie den Rauminhalt desselben mit gleichmässiger Dichtigkeit erfülle; dass vielmehr die Ableitung jener Gesetze unverändert bleibe, wenn man statt jener mit dem elektrostatischen Grundgesetze in Widerspruch stehenden Voraussetzung eine andere damit übereinstimmende

und daraus mit Nothwendigkeit resultierende substituiert, nämlich dass das neutrale elektrische Fluidum in einem Leiter sich in Ruhe befinden könne, wenn das Potential der an seiner Oberfläche vertheilten freien Elektricität im Innern des Leiters überall gleichen Werth hat, und wenn man, im Verlaufe der Ableitung, im Innern des Leiters den Potentialwerth der freien, an der Oberfläche befindlichen Elektricität für die Dichtigkeit der Elektricität setzt, welche nach Ohm im Innern des Leiters selbst stattfinden soll. Die von Kirchhoff hiervon gegebene Nachweisung ist so kurz gefasst, dass sie keinen Auszug gestattet, und es muss deshalb auf das Original selbst verwiesen werden. Es möge daraus nur die Schlussbemerkung angeführt werden, welche Kirchhoff beigefügt hat, durch die er die Zurückführung der Gesetze der galvanischen Kette auf das Grundgesetz der Elektrostatik zu rechtfertigen sucht, da doch die Gesetze der galvanischen Kette elektrodynamische Erscheinungen betreffen, zu deren Erklärung sonst das elektrostatische Grundgesetz im Allgemeinen nicht genügt. Es heisst a. a. O. S. 512:

«Den durchgeführten Betrachtungen liegt das elektrostatische Gesetz der Wirkung elektrischer Theilchen zu Grunde. Aus diesem Gesetze lassen sich die Ampère'schen elektrodynamischen Erscheinungen und die Inductionserscheinungen nicht erklären; Weber hat ein allgemeineres Gesetz gefunden, durch welches es ihm gelungen ist, jene Erscheinungen zu erklären, ein Gesetz, in dessen Ausdruck die relative Geschwindigkeit der Theilchen, deren Wirkung auf einander betrachtet wird, vorkommt, und das in das elektrostatische übergeht, wenn diese Geschwindigkeit verschwindet. Um die verschiedenen Felder der Elektricitätslehre unter einen Gesichtspunkt zu bringen, muss man sich daher die Aufgabe stellen, die Gesetze der Strömungen in der geschlossenen Kette aus dem Weber'schen Gesetze abzuleiten. Diese Herleitung scheint schwer zu sein, doch ist es leicht, *a posteriori* zu beweisen, dass die Vorstellung von den Strömungen, zu denen die Annahme des elektrostatischen Gesetzes geführt hat, auch mit dem Weber'schen Gesetze in Einklang ist, wenn man noch eine gewisse Hypothese zu Hülfe nimmt, die Hypothese nämlich, dass bei der Berechnung der Kraft, welche eine Scheidung der beiden Elektricitäten in dem Raumelemente v eines der Leiter hervorbringt, die Elektricitäten in v als ruhend angesehen werden müssen. Diese Annahme hat nichts Widerstrebendes,

wenn man sich vorstellt, dass die Bewegung der Elektricität in einem Leiter nur von Molecül zu Molecül vor sich geht, so dass jedes Elektricitätstheilchen bei einem Molecüle, bei dem es ankommt, einen Ruhepunkt findet. Bei dieser Vorstellung kann man leicht zugeben, dass die Elektricitätsmenge, die von einem Molecüle zu einem benachbarten übergeführt wird, nur durch die Kräfte bedingt wird, die auf die Elektricitätstheilchen ausgeübt werden, während sie noch an jenem Molecül sich in Ruhe befinden, nicht aber durch die Kräfte, die auf sie wirken, während sie schon auf dem Wege zum folgenden Molecül sind. In Bezug auf die Theorie der Induction, die Weber gegeben hat, ist es gleichgültig, ob man diese Annahme macht oder nicht. Macht man dieselbe und denkt sich übrigens die Strömungen in der Kette so, wie sie die Voraussetzung des elektrostatischen Gesetzes ergeben hat, so ist es, in Bezug auf die Grösse und die Richtung der Kraft, welche die Elektricitäten in dem Elemente v zu scheiden strebt, — also in Bezug auf die elektromotorische Kraft, wie Weber sie nennt, — gleichgültig, ob man von dem elektrostatischen oder dem Weber'schen Gesetze ausgeht. Der Unterschied, der möglich wäre, müsste nämlich herrühren von den Kräften, welche die in den andern Theilen des Systems strömenden Elektricitäten ausüben, und diese Kräfte tragen nach Dem, was Weber bewiesen hat, zu jener elektromotorischen Kraft nichts bei, da die Strömungen constant sind und gleiche Mengen der beiden Elektricitäten nach entgegengesetzten Richtungen mit derselben Geschwindigkeit führen.»

34.

Durch Vergleichung elektromotorischer und galvanometrischer Beobachtungen der galvanischen Kette diejenige relative Geschwindigkeit zweier elektrischer Massen zu bestimmen, bei welcher weder Anziehung noch Abstossung stattfindet.

Ist das Gesetz der Vertheilung der freien Elektricität an der Oberfläche des Leiters eines gleichförmigen und beharrlichen Stroms gegeben, so lässt sich darauf eine für die Elektricitätslehre im Allgemeinen wichtige Anwendung gründen. Es leuchtet nämlich ein, dass alsdann die elektromotorische Kraft einer Kette auf doppelte Weise bestimmt werden kann, nämlich erstens aus ihrer Wirkung, d. h. aus der Inten-

sität des von ihr bei einem bekannten Widerstande der Kette hervorgebrachten Stroms. Hierdurch wird die Bestimmung der elektromotorischen Kraft von den Messungen der Stromintensität und des Widerstands der Kette abhängig gemacht, welche beide, wie in dieser Abhandlung gezeigt worden ist, nach absoluten Maassen ausführbar sind. Zweitens kann sie aus ihrer Ursache bestimmt werden, d. h. aus der auf der Oberfläche des Leiters vertheilten freien Elektricität. Sind die Stromintensität i und der Widerstand der Kette w nach den Art. 26 definierten Maassen gefunden, so wird die elektromotorische Kraft der ganzen Kette nach dem dort angegebenen Maasse durch das Produkt

$$iw$$

bestimmt, und dieser Werth kann nach Art. 27 durch Multiplication mit $\frac{4}{c}$ auf das allgemeine Kraftmaass der Mechanik reduciert werden, wo c die relative Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher zwei elektrische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie einander weder anziehen noch abstossen sollen. Die elektromotorische Kraft der ganzen Kette ist also nach dem allgemeinen Kraftmaasse der Mechanik, aus ihrer Wirkung berechnet,

$$= \frac{4}{c}\, iw\,.$$

Zur Bestimmung der elektromotorischen Kraft derselben Kette aus ihrer Ursache möge nun der im 30. Artikel gefundene Ausdruck

$$\frac{2a}{rr}\left(\log\, \cot \frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi\right)$$

zum Grunde gelegt werden, worin β einen kleineren Werth als $\frac{1}{2}$ und einen grösseren als $\frac{2}{5}$ hat. Nach Seite 281 bezeichnet hierin a denjenigen Factor, welcher mit $(\varphi - \pi)d\varphi$ multipliciert die Masse der freien Elektricität giebt, welche auf dem Längenelemente der Kette $rd\varphi$ am Ende des Bogens $r\varphi$ vertheilt ist. Ist nun die Masse der freien Elektricität zweier Elemente der Kette von der Länge dx, das eine am Ende des Bogens $\pi - \chi$, das andere am Ende des Bogens $\pi + \chi$ wirklich gemessen und erstere $= Edx$, letztere $= E'dx$ gefunden, so ist

$$Edx = -\, a\chi d\chi$$
$$E'dx = +\, a\chi d\chi$$

und $rd\chi = dx$ zu setzen; folglich

$$a = \frac{r}{2\chi}\,(E' - E).$$

Setzt man nun diesen Werth für a in obigen Ausdruck, so erhält man

$$\frac{E-E}{r\chi}\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r}-\beta\pi\right).$$

Dieser Ausdruck giebt aber nicht die elektromotorische Kraft für die ganze Länge der Kette, sondern nur für ein dem Längenmaasse gleiches Stück der Kette und muss mit der Länge der Kette $= 2\pi r$ multipliciert werden, wenn die elektromotorische Kraft der ganzen Kette erhalten werden soll, nämlich:

$$\frac{2\pi}{\chi}(E'-E)\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r}-\beta\pi\right).$$

Hiernach ergiebt sich nun endlich durch Gleichsetzung der nach beiden Methoden bestimmten elektromotorischen Kraft der ganzen Kette folgende Gleichung:

$$\frac{4}{c}\,iw=\frac{2\pi}{\chi}(E'-E)\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r}-\beta\pi\right)$$

oder

$$c=\frac{2\chi}{\pi}\,\frac{iw}{E'-E}\cdot\frac{1}{\log\cot\frac{e\alpha}{8r}-\beta\pi}.$$

Es ist also hierdurch diejenige Geschwindigkeit c bestimmt, mit welcher zwei elektrische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie einander weder abstossen noch anziehen sollen. Aus dem Grundgesetze der Wechselwirkung zweier elektrischer Massen, wie es in der ersten Abhandlung über «Elektrodynamische Maassbestimmungen» ausgesprochen worden ist, so wie aus Art. 27 in dieser Abhandlung, wo gezeigt worden ist, dass, wenn diese Geschwindigkeit c bekannt ist, alle elektromotorischen Kräfte nach dem in der Mechanik festgesetzten Kraftmaasse ausgedrückt werden können, leuchtet die Wichtigkeit der Bestimmung dieser Geschwindigkeit c von selbst ein. Bei dieser Bedeutung von c ist es aber selbst schon von Interesse, die Möglichkeit einer solchen Bestimmung nachzuweisen, auch wenn die wirkliche Ausführung auf Hindernisse stossen sollte, welche noch nicht überwunden werden könnten, weil es dazu noch an den geeigneten Instrumenten fehlt. In der That dürften jetzt noch solche Hindernisse der Ausführung der feinen elektrometrischen Messungen entgegenstehen, durch welche die Grössen E' und E gefunden werden sollen. Alle unsere jetzigen Elektroskope und Elektrometer scheinen zur Ausführung dieser Messungen nicht geeignet: es würde damit nur möglich sein, das Verhältniss der Grössen E und E' zu bestimmen, aber nicht ihren absoluten Werth, wenigstens ist bisher kein Versuch dieser Art damit ge-

macht worden. Die Construction neuer Elektroskope und Elektrometer, welche dazu geeigneter wären, bildet aber eine Aufgabe für sich, mit der wir uns hier nicht beschäftigen, weil wir uns in dieser Abhandlung nur auf elektrodynamische Maassbestimmungen beschränken.

35.

Ueber das Verhältniss der Geschwindigkeit der Strömung zur Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Stroms.

Ueber die Geschwindigkeit, mit welcher die elektrischen Fluida selbst in den Leitern sich bewegen, liegen noch gar keine Data vor. Man weiss nur, dass die Geschwindigkeit, mit welcher manche elektrische Phänomene, wie der Blitz, sich verbreiten, sehr gross sein müsse, da auch ihre Verbreitung durch die grössten Räume nicht den kleinsten messbaren Zeitraum erfordert. Eben so weiss man nur, dass die Verbreitung eines galvanischen Stroms durch eine lange Kette mit ausserordentlicher Geschwindigkeit geschehe, weil die Zeit, welche erfordert wird, bis ein an einer bestimmten Stelle der Kette erregter Strom in allen Theilen der Kette gleiche Intensität erlangt, so klein ist, dass sie bisher noch auf keine Weise hat gemessen werden können. Die Versuche von Wheatstone über die Ungleichzeitigkeit der Funken, welche an verschiedenen Stellen eines unterbrochenen Leitungsdrahts hervorgebracht werden, wenn die in zwei Conductoren angesammelten positiven und negativen Elektricitäten durch den Leitungsdraht sich mit einander vereinigen, geben ebenfalls über die Geschwindigkeit, mit welcher die elektrischen Fluida sich bewegen, keine Auskunft, sondern nur über die Fortpflanzung der Bewegung durch das neutrale elektrische Medium im Leitungsdrahte; denn das Erscheinen des Funkens setzt voraus, dass das an der betreffenden Stelle befindliche neutrale elektrische Medium in Bewegung gesetzt worden ist; setzt aber keineswegs voraus, dass die in den beiden Conductoren zuvor angesammelte positive oder negative Elektricität selbst durch den Leitungsdraht bis zu dieser Stelle hin gedrungen sei. Die von Wheatstone beobachtete Ungleichzeitigkeit der Funken an verschiedenen Unterbrechungsstellen des Leitungsdrahts kann daher nur Aufschluss geben über die Geschwindigkeit der Verbreitung der Bewegung durch das neutrale elektrische Medium in den dazwischen liegenden Theilen des Leitungsdrahts. Auch in einer ge-

schlossenen und nirgends unterbrochenen Kette, worin durch elektromotorische Kräfte das Gleichgewicht der elektrischen Fluida fortwährend gestört wird, müssen zweierlei Geschwindigkeiten unterschieden werden, nämlich die einer von Theilchen zu Theilchen fortgepflanzten Bewegung und die einer jedem Theilchen eigenthümlichen Bewegung: die erstere heisst die Geschwindigkeit der Stromverbreitung, die letztere heisst die Stromgeschwindigkeit. Bei einem beharrlichen Strome in einer homogenen Kette ist die Stromgeschwindigkeit überall gleich. Ein solcher Strom heisst ein gleichförmiger, weil er sich durch die ganze Kette gleichförmig verbreitet hat, und so lange er unverändert fortdauert, ist von keiner weiteren Stromverbreitung mehr die Rede. Soll von einer Stromverbreitung wieder die Rede sein, so muss irgend eine Veränderung mit dem Strome vorgehen: der Strom muss stärker oder schwächer werden. Es fragt sich dann, ob jede Aenderung in der Stärke des Stroms, d. i. jede Aenderung in der Stromgeschwindigkeit, in allen Theilen der Kette gleichzeitig oder allmählig, in einem Theile nach dem andern, eintritt. Im erstern Falle würde man sagen, der Strom verbreite sich mit unendlicher Geschwindigkeit durch die Kette oder die Geschwindigkeit der Stromverbreitung sei unmessbar; im andern Falle würde man sagen, der Strom verbreite sich mit endlicher Geschwindigkeit durch die Kette, oder die Geschwindigkeit der Stromverbreitung sei messbar. Es geht hieraus hervor, dass die Messung der Geschwindigkeit der Stromverbreitung eine Veränderung oder einen Wechsel der Stromstärke in der Kette voraussetze, ohne welche von einer solchen Messung gar nicht die Rede sein kann.

Es ist nun schon S. 273 an einem Beispiele erläutert worden, dass Aenderungen der Stromstärke oder der Stromgeschwindigkeit in der That möglich sind, welche in allen Theilen der Kette gleichzeitig eintreten, nämlich wenn die gegebenen elektromotorischen Kräfte, welche die Aenderung verursachen, auf alle Theile der Kette unmittelbar, nach Proportion ihres Widerstands, wirken. Ein solcher besonderer Fall beweist aber die Unmessbarkeit der Geschwindigkeit der Stromverbreitung im Allgemeinen noch nicht. Sollte die Geschwindigkeit der Stromverbreitung im Allgemeinen unmessbar genannt werden, so müsste diese Gleichzeitigkeit der Stromänderung in allen Theilen der Kette in allen Fällen stattfinden, insbesondere auch dann, wenn die

gegebene elektromotorische Kraft, welche die Aenderung verursacht. unmittelbar nur auf einen Theil der Kette wirkt. Für diesen Fall ergiebt sich aber aus dem in den vorhergehenden Artikeln erörterten Zusammenhange der Gesetze der galvanischen Kette mit den elektrischen Grundgesetzen, dass die veränderte Stromgeschwindigkeit in demjenigen Theile der Kette, wo sie durch die gegebene elektromotorische Kraft unmittelbar hervorgebracht wurde, einige Zeit gedauert haben müsse, ehe sie in anderen Theilen der Kette eintreten könne, nämlich darum, weil dem Eintritt dieser Stromänderung in andern Theilen der Kette nothwendig eine neue Ansammlung freier Elektricität vorangegangen sein muss, welche auf diese Theile der Kette eine elektromotorische Kraft ausübt, welche zur Hervorbringung der Stromänderung in diesen Theilen nothwendig ist. Diese neue Ansammlung freier Elektricität kann aber nur durch die Stromänderung in einem Theile der Kette in derjenigen Zeit hervorgebracht werden, in welcher in den übrigen Theilen der Kette diese Stromveränderung noch nicht stattgefunden hat. Es ergiebt sich also hieraus, dass die durch eine gegebene elektromotorische Kraft unmittelbar nur an einer Stelle der Kette hervorgebrachte Stromänderung unmöglich in allen andern Theilen der Kette ganz gleichzeitig eintreten könne, sondern sie kann nur allmählig in einem Theile nach dem andern entstehen, nachdem die zu ihrer Hervorbringung in jedem Theile nothwendige Ansammlung freier Elektricität sich vorher gebildet hat.

Hält man sich z. B. der Einfachheit wegen an die näherungsweise zulässige Ohm'sche Hypothese von der Vertheilung der freien Elektricität im Leiter, wonach die freie Elektricität des Längenelements der Kette $rd\varphi$ am Ende des Bogens φ durch $a(\varphi-\pi)\,d\varphi$ dargestellt wird, so ergiebt sich hieraus für die freie negative Elektricität der einen Hälfte des kreisförmigen Leiters der Integralwerth

$$= a\int_0^\pi (\varphi - \pi)\,d\varphi = -\frac{\pi\pi}{2}a\,,$$

für die freie positive Elektricität der anderen Hälfte der Integralwerth

$$= a\int_\pi^{2\pi} (\varphi - \pi)\,d\varphi = +\frac{\pi\pi}{2}a\,,$$

worin nach S. 296

$$a = \frac{r}{2\chi}(E' - E)$$

ist, wenn Edx die Masse der freien Elektricität des Längenelements dx am Ende des Bogens $r(\pi - \chi)$, $E'dx$ die Masse der freien Elektricität eines gleich langen Elements dx am Ende des Bogens $r(\pi + \chi)$ bezeichnet. Die Länge des zwischen diesen beiden Elementen liegenden Stücks der Kette ist folglich $= 2r\chi$. Bezeichnet man nun die Masse der freien Elektricität zweier eben solcher Elemente dx, zwischen denen aber nur ein dem Längenmaasse gleiches Stück der Kette liegt, mit εdx und $\varepsilon' dx$, so erhält man

$$\varepsilon' - \varepsilon = \frac{E' - E}{2r\chi},$$

folglich

$$a = rr(\varepsilon' - \varepsilon),$$

und setzt man diesen Werth von a in den obigen Ausdruck des Integralwerthes der freien negativen und positiven Elektricität, so erhält man dafür

$$-\frac{\pi\pi rr}{2}(\varepsilon' - \varepsilon) \text{ und } + \frac{\pi\pi rr}{2}(\varepsilon' - \varepsilon).$$

Die hieraus resultierende elektromotorische Kraft ist nach S. 297

$$\frac{2\pi}{\chi}(E' - E)\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \beta\pi\right) = 4\pi r(\varepsilon' - \varepsilon)\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \beta\pi\right).$$

Bezeichnet man den Widerstand des Leiters für die Einheit der Länge und des Querschnitts, nach dem Art. 27 festgesetzten Maasse, mit k und folglich den Widerstand der ganzen Kette, deren Länge $= 2\pi r$ und deren Querschnitt $= \pi\alpha\alpha$ ist, durch $\frac{2r}{\alpha\alpha}k$; so stellt der Quotient jener elektromotorischen Kraft und dieses Widerstands die Stromintensität eu dar, wo e die Masse der in einem dem Längenmaasse gleichen Stücke der Kette enthaltenen positiven oder negativen Elektricität und u die Stromgeschwindigkeit bezeichnet, folglich

$$4\pi r(\varepsilon' - \varepsilon)\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \beta\pi\right) = \frac{2r}{\alpha\alpha}k \,.\, eu.$$

Soll nun in dieser Kette die Stromintensität eu in dem Verhältniss von $1 : n$ sich ändern, so muss neu an die Stelle von eu treten, folglich auch $n(\varepsilon' - \varepsilon)$ an die Stelle von $(\varepsilon' - \varepsilon)$, wodurch der Integralwerth der freien negativen und positiven Elektricität folgenden Ausdruck erhält:

$$-\frac{\pi\pi rr}{2} \cdot n(\varepsilon' - \varepsilon) \text{ und } + \frac{\pi\pi rr}{2} \cdot n(\varepsilon' - \varepsilon).$$

Die Aenderung dieses Integralwerths ergiebt sich hieraus

$$= -\frac{\pi\pi rr}{2}(n-1)(\varepsilon'-\varepsilon) \text{ und } = +\frac{\pi\pi rr}{2}(n-1)(\varepsilon'-\varepsilon).$$

Die Möglichkeit dieser Aenderung setzt aber voraus, dass die Zunahme der Stromgeschwindigkeit $=(n-1)u$ am Anfange der Kette, wo die Verstärkung der elektromotorischen Kraft stattfindet, durch welche die Aenderung der Stromintensität bewerkstelligt wird, früher eintrete, als in der Mitte der Kette, welche von dieser Stelle am weitesten entfernt ist, und zwar um einen Zeitraum T, in welchem in Folge der Geschwindigkeitsänderung $(n-1)u$ durch den Querschnitt der Kette eine Masse negativer oder positiver Elektricität $=(n-1)eu\,.\,T$ geht, welche der obigen Aenderung des Integralwerths gleich ist, woraus folgende Gleichung sich ergiebt:

$$\frac{\pi\pi rr}{2}(n-1)(\varepsilon'-\varepsilon) = (n-1)eu\,.\,T.$$

Hieraus folgt, mit Zuziehung der vorher gefundenen Gleichung

$$4\pi r(\varepsilon'-\varepsilon)\left(\log\cot\frac{\epsilon\alpha}{8r}-\beta\pi\right) = \frac{2r}{\alpha\alpha}k\,.\,eu,$$

der Zeitraum T

$$T = \frac{\pi\pi rr}{2}\cdot\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{eu} = \frac{\pi rr}{4\alpha\alpha}\,\frac{k}{\log\cot\frac{\epsilon\alpha}{8r}-\beta\pi}.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass im ersten Augenblicke der Aenderung die Stromgeschwindigkeit im ersten Elemente der Kette sogleich von n zu nu übergehe und dass diese neue Stromgeschwindigkeit nu in diesem Elemente von dann an unverändert beharre. Unter der Voraussetzung, dass ein ähnlicher plötzlicher Uebergang der Stromgeschwindigkeit von u zu nu in allen Theilen der Kette stattfinde, lässt sich endlich die Geschwindigkeit der Stromverbreitung in jedem Theile der Kette bestimmen. Unter dieser Voraussetzung wird nämlich die Zeit t, in welcher der Strom durch ein dem Bogen $r\psi$ entsprechendes Stück der Kette fortgepflanzt wird, durch folgende Gleichung bestimmt:

$$t = \frac{\psi\psi rr}{4\pi\alpha\alpha}\cdot\frac{k}{\log\cot\frac{\epsilon\alpha}{8r}-\beta\pi}.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung in Beziehung auf t und ψ erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{rd\psi}{dt}$,

$$\frac{rd\psi}{dt} = \frac{2\pi\alpha\alpha}{kr\psi}\left(\log\cot\frac{\epsilon\alpha}{8r}-\beta\pi\right),$$

wonach also diese Geschwindigkeit desto kleiner ist, je grösser das Stück $r\psi$ der Kette ist, durch welches sich die Stromänderung schon verbreitet hat.

In diesem Ausdrucke der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet k den Widerstand des Leiters für die Einheit seiner Länge und seines Querschnitts und zwar nach dem Art. 27 definierten Maasse. Bezeichnet man mit q den nach bekannten Methoden messbaren Widerstand desselben Leiters für dieselbe Länge und denselben Querschnitt nach dem Art. 26 definierten Maasse, so ist nach Art. 27

$$k = \frac{16}{cc} q ,$$

und setzt man diesen Werth von k in die obige Gleichung, so erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{rd\psi}{dt}$,

$$\frac{rd\psi}{dt} = \frac{\pi ccaa}{8qr\psi}\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \beta\pi\right) ,$$

woraus hervorgeht, dass, wenn die Geschwindigkeit c bekannt wäre, mit welcher zwei elektrische Massen gegen einander bewegt werden müssen, wenn sie sich weder anziehen noch abstossen sollen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{rd\psi}{dt}$ daraus berechnet werden könnte, und dass umgekehrt, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{rd\psi}{dt}$ gemessen würde, jene Geschwindigkeit c sich daraus berechnen lassen würde. Könnten aber beide Geschwindigkeiten c und $\frac{rd\psi}{dt}$ aus unabhängigen Beobachtungen bestimmt werden, so würden dadurch die Mittel gewonnen, die Richtigkeit der obigen Gleichung an der Erfahrung zu prüfen. Es ergiebt sich aus dieser Gleichung, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{rd\psi}{dt}$ nicht bloss in verschiedenen Ketten, sondern auch an verschiedenen Stellen einer und derselben Kette verschieden ist; denn der Zahlencoefficient $\frac{1}{8}\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \beta\pi\right)$ hat für verschiedene Ketten verschiedene Werthe, und in einer und derselben Kette, für welche der Zahlencoefficient $\frac{1}{8}\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \beta\pi\right) = n$ gegeben ist, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit an einer bestimmten Stelle der Kette dem Widerstande desjenigen Stücks $r\psi$ umgekehrt proportional, durch welches die Stromverbreitung von ihrem Ursprunge an bis dahin stattgefunden hat. Bezeichnet man diesen Widerstand nach dem Art. 26 definierten Maasse mit $w = \frac{r\psi}{\pi aa}\cdot q$, so ist $\frac{rd\psi}{dt} = n\,.\,\frac{cc}{w}\cdot$ Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nimmt also ab, je weiter die Verbreitung von ihrem Ursprunge sich entfernt, und wird also in recht langen Ketten sich viel leichter messen lassen, als in kürzeren.

Was aber endlich die Stromgeschwindigkeit u betrifft, so sieht man

leicht, dass die Bestimmung derselben, abgesehen von den Hindernissen, welche die Ausführung der Messung der Geschwindigkeit c auf dem Art. 34 oder auf dem in diesem Artikel angegebenen Wege findet, vorzüglich an der gänzlichen Unkenntniss derjenigen Masse positiver oder negativer Elektricität $\pm e$ scheitert, welche in einem dem Längenmaasse gleichen Stücke des Leiters enthalten ist; denn zur Bestimmung des Products eu hat man nach Art. 27 die Gleichung

$$eu = \frac{c}{4}\, i\,,$$

wo i in bekannter Weise gemessen werden kann. Die Möglichkeit, über die Werthe von e und u einzeln Auskunft zu erhalten, würde, wie es scheint, darauf beruhen, dass der Widerstand eines Leiters, welcher bisher nur aus seinen Wirkungen definiert worden ist, nämlich aus der Abhängigkeit, in welcher bei einer gegebenen elektromotorischen Kraft die Stromintensität von ihm steht, auch aus seinen Ursachen näher definiert werden könnte. Gelänge es nämlich, die Ursachen des Widerstands in den Leitern zu erforschen, und ergäbe sich daraus zum Beispiel, dass der Widerstand eines Leiters von dem Werthe e, welcher dem Leiter zukommt, abhängig sei, und zwar, dass derselbe desto grösser oder kleiner sei, je kleiner oder grösser der Werth von e sei, und durch $\frac{d}{e}$ dargestellt werden könne, wo d unabhängig von e aus der sonstigen Beschaffenheit des Leiters bestimmt werde; so leuchtet ein, dass nach Art. 27 für i der Quotient der elektromotorischen Kraft $\frac{4}{c}\,\varepsilon$ (worin ε nach Art. 26 messbar ist) und des Widerstands $\frac{d}{e}$ gesetzt werden kann, folglich

$$eu = \frac{c}{4}\, i = \frac{\varepsilon}{d}\, e$$

also

$$u = \frac{\varepsilon}{d}\,.$$

Aus dieser Bestimmung von u würde dann zugleich auch der Werth von e sich ergeben. Es geht hieraus die Wichtigkeit hervor, welche eine nähere Nachforschung über die bisher noch nicht erörterten Ursachen des Widerstands für die Elektricitätslehre haben könnte.

36.

Ueber die Ursachen des Widerstands der Leiter.

Zu einer vollständigen Kenntniss des Widerstands genügt es nicht, die Grösse des Widerstands aus seinen Wirkungen zu definieren, d. i. aus der Stärke des durch eine gegebene elektromotorische Kraft her-

vorgebrachten Stroms, sondern es gehört auch dazu, die Grösse des Widerstands aus ihren Ursachen zu definieren. Ohne diese wesentliche Ergänzung ist unsere Kenntniss von dem Wesen des Widerstands mangelhaft, und die ermittelte Grösse desselben ist eine blosse Hülfsgrösse der Elektrodynamik, deren wahre physische Bedeutung noch unbekannt ist. Wenn nun der Widerstand bisher bloss nach seinen Wirkungen betrachtet worden ist, so liegt der Grund davon darin, dass über die Ursachen desselben bisher noch gar nichts Wesentliches ermittelt worden ist. Es ist bloss die Abhängigkeit des Widerstands von den äusseren Dimensionen des Leiters, nämlich von seiner Länge und von seinem Querschnitt, ermittelt worden, aber diese Abhängigkeit betrifft bloss den absoluten Widerstand eines Leitungsdrahts und hat keine Beziehung auf den specifischen Widerstand des leitenden Metalls, über dessen Ursachen gar nichts bekannt ist. Diese Ursachen scheinen so tief in der Natur der Körper verborgen zu liegen, dass sie auf den bisherigen Wegen der Forschung unzugänglich sind. Kurz, die Frage nach den Ursachen des galvanischen Widerstands führt zu einem noch ganz unangebauten Gebiete der Wissenschaft. Ich werde mich daher nur auf eine einzelne Erörterung beschränken, nämlich darüber, in welcher Beziehung dieser Widerstand mit der Natur der elektrischen Fluida selbst, wie dieselben definiert worden sind, und mit deren Verhalten im elektrischen Doppelstrome stehe, wie dasselbe nach der gewöhnlichen Vorstellung auch hier immer angenommen und festgehalten worden ist.

Die Frage nach den Ursachen des Widerstands lässt sich zunächst specieller darauf richten, in wie weit diese Ursachen in dem ponderabelen Träger des Stroms, und in wie weit dieselben in den darin enthaltenen elektrischen Fluidis liegen. Dass die Gegenwart der ponderabelen Theile die Canäle, durch welche die elektrischen Fluida strömen, mehr oder weniger beengen und dadurch auf die elektrische Strömung Einfluss haben können, leuchtet von selbst ein; es fragt sich aber, ob diese Ursache zur Erklärung des Widerstands allein schon genüge. Diese Ursache des Widerstands würde bloss die Masse des elektrischen Fluidums beschränken, welche an der Strömung Theil nehmen könnte. Es liegt aber in dem Wesen des Widerstands, wie wir ihn aus seinen Wirkungen kennen, dass durch die Grösse des Widerstands nicht bloss die Masse des elektrischen Fluidums beschränkt wird, welche an der Strombewegung Theil nimmt, sondern, dass auch die Bewegung selbst

beschränkt wird. Diese Beschränkung der Bewegung selbst kann aber ihren Grund in der blossen Gegenwart der ponderabelen Theile nicht haben, sondern setzt nothwendig Kräfte voraus, welche den fortwirkenden elektromotorischen Kräften der Kette das Gleichgewicht halten, weil ohnedem jene Kräfte die elektrischen Fluida in ihrer Bewegung immerfort beschleunigen müssten, was bei einem gleichförmigen und beharrlichen Strome nicht der Fall ist.

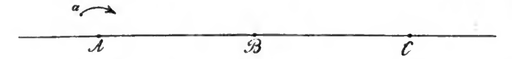
Es fragt sich also ferner, woher die Kräfte rühren, welche bei einem gleichförmigen und beharrlichen Strome den fortwirkenden elektromotorischen Kräften das Gleichgewicht halten und dadurch eine fernere Beschleunigung der elektrischen Fluida in ihrer Bewegung verhindern? Sind diese Kräfte rein elektrische Kräfte, oder sind es Kräfte, welche die ponderabelen Theile auf die elektrischen Fluida, die an ihnen vorbeigehen, ausüben? Setzen wir in dem galvanischen Strome, wie wir es stets gethan haben, zwei elektrische Fluida voraus, die gleichzeitig durch denselben Leiter in entgegengesetzten Richtungen strömen, so liegt es sehr nahe, eine Ursache des Widerstands für die Bewegung jedes Fluidums in dem ihm entgegenkommenden Fluidum zu suchen. Das positive und das negative Fluidum werden nämlich in dem Augenblicke der Begegnung sich zu neutralem Gemische verbinden, und so leicht auch diese neutrale Verbindung wieder zu scheiden sein möge, so wird doch eine solche neue Scheidung nur durch eine neue elektromotorische Kraft erfolgen können, und nicht in Folge einer Beharrung derjenigen Bewegungen, welche beide Fluida vor ihrer Vereinigung besassen, weil diese durch ihre Begegnung und Verbindung mit einander als aufgehoben betrachtet werden muss. Es geht daraus hervor, dass während jedem Fluidum für sich bei seinen Bewegungen Beharrung zugeschrieben werden muss, beiden Fluidis zusammen bei ihrer Bewegung im Doppelstrome keine Beharrung zukommt. Wenn aber auch dieser Grund, warum den elektrischen Fluidis bei ihrer Bewegung im Doppelstrome keine Beharrung zukommt, der richtige ist, so gewinnt man doch dadurch noch keine deutliche Einsicht in den Hergang selbst, so lange die Kräfte unbekannt sind, welche die Verbindung und Vereinigung der elektrischen Fluida bei ihrer Begegnung bewirken, und welche bei ihrer wiederholten Scheidung überwunden werden müssen. Es fragt sich, ob dabei noch andere Kräfte in Betracht kommen, als diejenigen, welche durch das allgemeine elektrische Grund-

gesetz schon bestimmt sind, z. B. ob dabei besondere Molecularkräfte der elektrischen Fluida wirksam sind. Wäre dies nicht der Fall, so müsste der Hergang bei der abwechselnden Verbindung und Scheidung der elektrischen Fluida im Doppelstrome nach dem bekannten Grundgesetze der elektrischen Wirkung genauer bestimmt werden. Ohne eine solche genauere Bestimmung lässt sich im Allgemeinen nur mit einiger Wahrscheinlichkeit annehmen, dass die Intensität eines elektrischen Doppelstroms ausser von der Masse der elektrischen Fluida, welche an der Strömung Theil nimmt, von der Zahl der Scheidungen abhänge, welche in bestimmter Zeit erfolgen, und dass die Zahl dieser Scheidungen der während dieser Zeit fortwirkenden elektromotorischen Kraft proportional sein müsse. Ergäbe sich z. B., dass durch gleiche elektromotorische Kraft jedes elektrische Theilchen in gleicher Zeit immer eine gleiche Zahl Verbindungen und Scheidungen erlitte und dadurch eine gleiche Wegstrecke fortgeführt würde, so wäre die Stromgeschwindigkeit u für gleiche elektromotorische Kraft immer die nämliche, und es würde dann die Stromintensität für gleiche elektromotorische Kraft bloss mit der Menge der Elektricität e variiren, welche auf einer solchen Wegstrecke (z. B. in der Längeneinheit des Leiters) enthalten wäre, und zwar proportional damit sein, woraus hervorginge, dass der sogenannte Widerstand gleichfalls nur mit e variirte und zwar dem Werthe von e umgekehrt proportional wäre, welches derjenige Fall ist, welcher am Ende des vorigen Artikels als Erläuterung angeführt wurde.

Sollte in der abwechselnden Verbindung und Scheidung der elektrischen Fluida bei ihrer Begegnung im Doppelstrome die Ursache des Widerstands wirklich enthalten sein, so würde daraus ferner die Unmöglichkeit eines beharrlichen Doppelstroms ohne fortwirkende äussere elektromotorische Kraft folgen, und es würde sich dann fragen, wie damit die Annahme von beharrlichen Molecularströmen zur Erklärung der magnetischen und diamagnetischen Erscheinungen verträglich wäre. Die Möglichkeit solcher Molecularströme müsste dann nothwendig auf einer Wirkung der ponderabelen Molecule beruhen, durch welche die Bahnen der in entgegengesetzten Richtungen um jene Molecule sich bewegenden elektrischen Fluida von einander getrennt erhalten würden, indem z. B. das eine Fluidum eine engere Kreisbahn, das andere Fluidum eine weitere Kreisbahn um das Mole-

cule beschriebe, sodass die beiden Fluida sich bei ihren Bewegungen nirgends begegnen und vereinigen könnten.

Zur Erläuterung des Hergangs bei der abwechselnden Verbindung und Scheidung der elektrischen Fluida im Doppelstrome, wie er aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung ohne Zuziehung besonderer Molecularkräfte dieser Fluida abzuleiten wäre, diene folgende Betrachtung. In *A*, *B*, *C* . . seien positiv elektrische Massen, von denen zunächst angenommen werden möge, dass sie an den Orten, wo sie sich befinden, festgehalten würden. In *a* befinde sich gegenwärtig eine



bewegliche negativ elektrische Masse, auf welche die benachbarte positive Masse in *A* so stark wirke, dass dagegen die Wirkung der entfernten Massen in *B*, *C* . . vernachlässigt werden könne. Die Massen in *A* und *a* wirken auf einander mit einer Kraft, die von ihrer Grösse, Entfernung, relativen Geschwindigkeit und deren Aenderung abhängt; indess möge hier der Einfachheit wegen angenommen werden, dass die aus der relativen Geschwindigkeit und deren Aenderung sich ergebende Correction der elektrostatischen (von den Massen und der Entfernung abhängigen) Kraft gegen diese letztere so gering sei, dass sie ebenfalls vernachlässigt werden dürfe. Unter diesen Voraussetzungen folgt, dass, wenn keine andere Kraft auf die Masse in *a* wirkt, diese Masse den Gesetzen der Bewegung durch Centralkräfte, welche dem Quadrat der Entfernung verkehrt proportional sind, folgen müsse. Die Masse in *a* wird folglich nach den Kepler'schen Gesetzen z. B. eine elliptische Bahn um *A* beschreiben. Es wird aber eine Störung in dieser Bewegung der betrachteten Masse um *A* eintreten, sobald ausser der Centralkraft eine elektromotorische Kraft parallel mit der Linie *AB* mit constanter Intensität auf die betrachtete Masse wirkt. Die Elemente der bisherigen elliptischen Bewegung werden nun fortwährend geändert werden, und die von der betrachteten Masse beschriebene Bahn wird dadurch in eine Spirallinie übergehen, in welcher die betrachtete Masse endlich so weit von *A* fortgeführt wird, dass sie aus der Wirkungssphäre von *A* in die Wirkungssphäre von *B* gelangt, und so fort, nachdem sie eine Anzahl Spiralwindungen um *B* beschrieben hat, auch von *B* so weit fortgeführt wird, dass sie aus der Wirkungssphäre von *B* in

die Wirkungssphäre von *C* gelangt. Auf diese Weise kann also eine elektromotorische Kraft ein Fortströmen der negativen Elektricität in der Richtung *ABC* bewirken, an welchem die positiven Massen in *A*, *B*, *C* keinen Antheil nehmen. Das Wesentliche dieser Betrachtung besteht darin, dass, sobald die elektromotorische Kraft zu wirken aufhört, die betrachtete Masse sogleich wieder nach den Kepler'schen Gesetzen in elliptischer Bahn um diejenige positive Masse sich bewegen wird, in deren Nähe sie sich gerade befindet, weil nach Wegfall der störenden Kraft keine weitere Aenderung der Elemente ihrer Centralbewegung stattfindet. Auch ersieht man leicht, dass in dieser wesentlichen Beziehung nichts geändert werden würde, wenn die positiven Massen in *A*, *B*, *C* . . . gleichfalls beweglich angenommen und ausser der Centralkraft der negativen Massen, in deren Nähe sie sich befinden, der störenden Einwirkung der nämlichen elektromotorischen Kraft unterworfen würden, welche aber für diese positiven Massen die entgegengesetzte Richtung, wie für die negativen hätte. Es ergiebt sich daraus folgendes Resultat. Wenn die elektromotorische Kraft *c* auf die betrachtete negative Masse allein wirkte, so würde sie dieser Masse in der Richtung *ABC* während der Zeit *t* eine Geschwindigkeit *ct* ertheilen, mit welcher sich diese Masse, auch nachdem die Kraft *c* zu wirken aufgehört hätte, beharrlich in der Richtung *ABC* fortbewegen müsste. Unter Mitwirkung der Centralkräfte der positiven Massen in *A*, *B*, *C* . . aber wird zwar die elektromotorische Kraft *c* ebenfalls, so lange sie wirkt, ein Fortrücken der betrachteten Masse in der Richtung *ABC* bewirken, sobald die Kraft *c* aber zu wirken aufhört, wird auch dieses Fortrücken aufhören, d. h. dieses Fortrücken der betrachteten Masse in der Richtung *ABC* geschieht dann nicht mit einer Geschwindigkeit, welche fortdauert, nachdem die Kraft zu wirken aufgehört, welche das Fortrücken hervorgebracht hat. Der Grund also, warum die betrachtete Masse in der Richtung *ABC* nicht weiter fortrückt, nachdem die elektromotorische Kraft zu wirken aufgehört hat, liegt darnach in den von den positiven Massen auf die betrachtete negative Masse ausgeübten Centralkräften. Das Wort Widerstand bezeichnet aber in der Theorie der galvanischen Kette wesentlich nichts Anderes, als das Factum, dass die Fortbewegung der elektrischen Fluida im galvanischen Strome der elektromotorischen Kraft proportional ist, d. h. aufhört, sobald die elektromotorische Kraft zu wirken aufhört. Es folgt also daraus,

dass der Grund des Widerstands in den Centralkräften liegen kann, welche die im elektrischen Doppelstrome sich begegnenden positiven und negativen Massen wechselseitig auf einander ausüben. Es würde für weitere theoretische Untersuchung wichtig sein, aus diesem Grunde eine bestimmte und präcise Definition des Widerstands abzuleiten und die Beziehungen zu entwickeln, in welchen der nach seiner Wirkung definierte Widerstand dazu stehe. Es würde dabei hauptsächlich auf eine Bestimmung der Zeit ankommen, welche ein Theilchen braucht, um in seiner Spiralbahn von einer Windung um eine Centralmasse *A* zur entsprechenden Windung um die darauf folgende Centralmasse *B* zu gelangen. Dass aber solche Bestimmungen, auch wenn alle wesentlichen Elemente für die Rechnung gegeben sind, grosse Schwierigkeiten finden, zeigt die Theorie der Störungen in der Astronomie.

VI.

VERGLEICHUNG DES ALLGEMEINEN PRINCIPS DER MATHEMATISCHEN THEORIE INDUCIERTER ELEKTRISCHER STROEME VON NEUMANN MIT DEN AUS DEM GRUNDGESETZE DER ELEKTRISCHEN WIRKUNG ABGELEITETEN INDUCTIONSGESETZEN.

37.

In der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen ist schon im 26. Art. die Abhandlung angeführt worden, welche Neumann im Jahre 1845 der Berliner Akademie der Wissenschaften vorgelegt hatte, nämlich: «Die mathematischen Gesetze der inducierten Ströme». Diese damals noch nicht gedruckte Abhandlung konnte dort nur nach dem in Poggendorffs Annalen davon erschienenen Auszuge citiert werden. Neumann hat seitdem über denselben Gegenstand der Berliner Akademie der Wissenschaften eine noch umfassendere Arbeit vorgelegt: «Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducierter Ströme», welche, aus den Schriften der Berliner Akademie der Wissenschaften von 1847 besonders abgedruckt, Berlin bei Reimer, 1848, erschienen ist. In dieser Abhandlung hat Neumann folgendes allgemeine Theorem aufgestellt:

«Wird ein geschlossenes, unverzweigtes, leitendes Bogensystem $A_{,}$ durch eine beliebige Verrückung seiner Elemente, aber ohne Aufhebung der leitenden Verbindung derselben, in ein anderes $A_{,,}$ von neuer Form und Lage übergeführt, und geschieht diese Veränderung von $A_{,}$ in $A_{,,}$ unter dem Einflusse eines elektrischen Stromsystems $B_{,}$, welches gleichzeitig durch eine beliebige Verrückung seiner Elemente eine Veränderung in Lage, Form und Intensität von $B_{,}$ in $B_{,,}$ erfährt, so ist die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche in dem leitenden Bogensysteme durch diese Veränderung induciert worden sind, gleich dem mit der Inductions-Constante ϵ multiplicierten Unterschied der Potentialwerthe des Stroms $B_{,,}$ in Bezug auf $A_{,,}$ und des Stroms $B_{,}$ in Bezug auf $A_{,}$, wenn $A_{,,}$ und $A_{,}$ von der Stromeinheit durchströmt gedacht werden.»

Nachdem hierauf Neumann in den vier ersten Paragraphen seiner Abhandlung dieses Theorem nebst seinen Folgerungen entwickelt hat, fährt er § 5 fort: «W. Weber hat in seiner Abhandlung: Elektrodynamische Maassbestimmungen u. s. w. den Weg gebahnt, welcher über die Kluft in unserer Kenntniss der elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkung der Elektricität führen wird. Er zeigt, wie die Ampère'schen Gesetze für die Wirkung zweier Stromelemente aus der Wirkung der positiven und negativen Elektricität des einen Elements auf die beiden Elektricitäten des anderen Elements abgeleitet werden können. Diese Analyse der Ampère'schen Gesetze führte zu dem Grundgesetze zweier elektrischen Massen, nach welchem diese nicht allein von ihrer relativen Entfernung, sondern auch relativen Geschwindigkeit und deren Veränderung abhängig ist. Dieses Grundgesetz erklärt zugleich, wie Weber gezeigt hat, die Inductions-Erscheinungen und giebt ihre Gesetze. Der Gegenstand dieses Paragraphen ist nachzuweisen, wie weit die im Vorhergehenden enthaltenen Resultate mit den aus Webers Grundgesetz der elektrischen Wirkung abgeleiteten Inductions-Gesetzen übereinstimmen.»

Aus diesem Grundgesetze der elektrischen Wirkung, wie es in der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen aufgestellt worden ist, entwickelt nun Neumann a. a. O. in seiner Abhandlung einen allgemeinen Ausdruck für die Induction, welchen er sodann auf die verschiedenen Arten der Induction in Anwendung bringt, näm-

lich 1) auf den Fall, wo weder die Strom- noch die Leiterelemente eine Ortsveränderung erleiden und die Induction bloss von einer Aenderung der Stromintensität herrührt; 2) auf den Fall, wo die Induction bloss durch eine Ortsveränderung der Leiterelemente hervorgebracht wird, die unter dem Einflusse eines constanten und unverrückten Stroms stattfindet; 3) auf den Fall, wo der inducierte Leiter ruht und die Induction durch eine Bewegung des ganzen Trägers eines constanten Stroms erregt wird. In allen diesen Fällen ergiebt sich nun das Resultat, dass die aus jenem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Inductionsgesetze mit den Resultaten des von Neumann aufgestellten allgemeinen Princips der mathematischen Theorie inducierter Ströme vollkommen übereinstimmen.

«Anders verhält es sich», führt Neumann fort, «mit der Gleichung, welche die von einem einfachen Stromumgange inducierte elektromotorische Kraft unter der Annahme ausdrückt, dass derselbe aus einem bewegten Leiterstücke und einem ruhenden besteht. Die Summe der elektromotorischen Kraft, welche während des Umlaufs der Elemente des Inducenten erregt wird, ist nach beiden Formeln dieselbe, die Richtung des inducierten Stroms aber die entgegengesetzte.»

Zur Entscheidung nun, ob in diesem einzigen Falle, wo zwischen dem von Neumann aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Inductionsgesetze und zwischen dem Resultate seines eigenen allgemeinen Princips der mathematischen Theorie inducierter Ströme eine Abweichung stattfindet, dieses oder jenes wirklich gelte, hat Neumann in seiner Abhandlung einige Versuche angeführt, welche bewiesen haben, dass die aus Neumanns allgemeinem Principe abgeleitete Formel auch in diesem Falle die richtige sei. Auch ich habe, wie unten beschrieben werden wird, diese Versuche wiederholt und habe das von Neumann erhaltene Resultat vollkommen bestätigt gefunden. Nachdem durch diese Versuche das wahre, für diesen Fall gültige Gesetz factisch sicher gestellt ist, unterwirft Neumann die von ihm selbst gegebene Ableitung des Inductionsgesetzes dieses Falles aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung einer näheren Prüfung. «Es muss also untersucht werden», sagt er, «worin bei Ableitung der Formel aus Weber's Grundgesetz gefehlt worden ist. Der Umstand, dass der in Rede stehende Widerspruch nur bei Inducenten mit Gleitstellen eintritt, führt die

Betrachtung sogleich auf diese. Hier treten neue Elemente in die Strombahn ein oder heraus, in welchen also die Stromstärke sich innerhalb einer sehr kurzen Zeit von i bis 0 verändert, und die durch diese ihre Intensitätsveränderung einen inducierenden Effect ausüben, welcher in meinen Formeln schon enthalten ist, der aber bei der Anwendung des Weber'schen Grundgesetzes noch berücksichtigt werden muss.» Diese Prüfung führt Neumann zu dem Resultate, dass dieser zweite Theil der Induction, welcher in der ersten Ableitung aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung nicht berücksichtigt worden war, den fraglichen Widerspruch zur Hälfte ausgleicht, indem sich dann die Summe der elektromotorischen Kräfte aus dem ersten und aus dem zweiten Theile = 0 ergiebt.

Nach dieser zu keinem befriedigenden Resultate führenden Prüfung der Rechnung geht endlich Neumann noch zu einer Prüfung der dieser Rechnung zum Grunde liegenden Voraussetzung von den in diesem Falle stattfindenden physischen Verhältnissen über, unter welchen die Induction geschehe. Diese Voraussetzung besteht darin, dass in den Leiterelementen, welche an den Gleitstellen in die Strombahn ein- oder heraustreten, die Stromstärke sich innerhalb einer sehr kurzen Zeit von 0 bis i oder von i bis 0 verändere. Es ist nun aber eine Bedingung für einen beharrlichen Strom, dass in allen Elementen der geschlossenen Kette eine gleiche Stromintensität stattfinde, und wenn daher auch die Stromintensität in den an der Gleitstelle ein- oder heraustretenden Elementen variiert, so scheint doch auch hier der mittlere Werth der Stromintensität für die kurze Zeit, wo sie variiert, jener Bedingung genügen zu müssen, was, wenn die in der ganzen Kette gleiche Stromintensität $= i$ sein soll, voraussetzt, dass in den an der Gleitstelle ein- oder heraustretenden Elementen die Stromstärke sich von 0 bis $2i$ oder von $2i$ bis 0 verändere. Unter dieser Voraussetzung von den physischen Verhältnissen, unter welcher die Induction in diesem Falle stattfindet, lässt sich nun leicht beweisen, dass der anfänglich bemerkte Widerspruch gänzlich verschwindet und die aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Inductionsgesetze auch für diesen Fall mit Neumanns allgemeinem Princip der mathematischen Theorie inducierter Ströme übereinstimmen.

Was nun aber die Voraussetzung selbst betrifft, worauf hierbei die Hebung des fraglichen Widerspruchs beruht, so sagt Neumann dar-

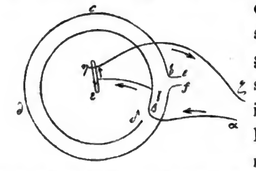
über, dass sie «weniger durch ihre Evidenz als durch ihren Erfolg gerechtfertigt» werde. Abgesehen aber von dem Bedenken, welches gegen die Voraussetzung selbst etwa gehegt werden könnte, scheint mir diese Voraussetzung, wenn sie wahr ist, mit einer Folge nothwendig verbunden zu sein, welche jenen Erfolg ganz wieder aufhebt. Zugegeben nämlich, dass wirklich in den an der Gleitstelle ein- oder austretenden Elementen die Stromstärke sich innerhalb einer sehr kurzen Zeit von 0 bis $2i$ oder von $2i$ bis 0 verändere, so scheint mir damit doch die Folge nothwendig verbunden zu sein, dass unmittelbar, nachdem in dem eintretenden Elemente die Stromstärke bis auf $2i$ gestiegen ist, sie sogleich wieder in diesem von nun in der Kette bleibenden Elemente auf i herabsinke, weil i die in allen Theilen der Kette nothwendig gleiche Stromintensität bezeichnet. Auf gleiche Weise würde bei den an der Gleitstelle austretenden Theilchen, in welchen die Stromintensität constant $= i$ gewesen war, diese Stromintensität, ehe sie von $2i$ auf 0 abnehmen kann, erst von i auf $2i$ zugenommen haben müssen. Bringt man nicht bloss die oben vorausgesetzte Veränderung, sondern auch diese damit nothwendig verbundene in Rechnung, so ergiebt sich dasselbe Resultat, wie wenn man von dieser Voraussetzung abstrahiert und einfach annimmt, wie zuvor geschehen war, dass in den an der Gleitstelle ein- oder austretenden Elementen die Stromstärke sich innerhalb einer sehr kurzen Zeit von 0 bis i oder von i bis 0 verändere.

Der durch obige Voraussetzung also, wie mir scheint, nicht lösbare Widerspruch löst sich aber von selbst, wenn man näher prüft, ob in dem fraglichen Falle, bei der von Neumann gegebenen Ableitung des Inductionsgesetzes aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung, alle gegebenen relativen Bewegungen der elektrischen Fluida und deren Veränderungen wirklich in Rechnung gebracht worden seien, und es soll diese Lösung gegeben werden, nachdem in dem folgenden Artikel die Beschreibung der erwähnten, von Neumann zur Entscheidung dieser wichtigen Frage angestellten Versuche nebst meiner Wiederholung derselben vorausgeschickt worden ist.

38.

Beschreibung von Neumanns Versuchen und deren Wiederholung.

Neumann sagt S. 59 der angeführten Abhandlung: «Ich werde, obgleich ich die Beschreibung von Experimenten aus dieser Abhandlung ausgeschlossen habe, in diesem Falle, wegen seiner Wichtigkeit, die Vorrichtung, deren ich mich zur Prüfung der in Rede stehenden Formeln bedient habe, in kurzen Abrissen angeben. Ein Theil des Schliessungsdrahts einer galvanischen Kette α ist ringförmig $\beta\gamma\delta$ gebogen; das Ende δ dieses Ringes reicht sehr nahe an seinen Anfang β, ohne mit ihm in leitender Verbindung zu stehen. Eine im Mittelpunkte des Ringes senkrecht auf seiner Ebene stehende rotierende Axe $\varepsilon\eta$ führt das bewegliche Bahnstück $\varepsilon\gamma$ mit sich im Kreise herum und zwar so, dass sein Ende in γ auf dem Ringe schleifend fortgeführt wird. Der inducierende Strom tritt, von α kommend, bei β in den Ring und bei γ aus ihm heraus in das bewegliche Bahnstück, aus diesem in die leitende Axe $\varepsilon\eta$, bei η kehrt er durch die ruhende Drahtleitung $\eta\zeta$ nach α zurück. Diese Richtung des Stroms ist durch Pfeile in der Figur angedeutet. Concentrisch um den Ring liegt ein kreisförmiger Leiter bcd, in welchem durch die Bewegung des Bahnstücks $\varepsilon\gamma$ ein Strom induciert wird. Wenn das bewegliche Bahnstück von β über γ bis δ fortgeführt ist, kann die Bahn desselben, wegen der geringen Entfernung von δ bis β, als geschlossen angesehen werden, und deshalb können die gegebenen Formeln zur Bestimmung der während eines Umlaufs entwickelten elektromotorischen Kraft angewandt werden .... Um Richtung und Grösse des inducierten Stroms zu beobachten, war folgende Einrichtung getroffen. Der inducierte kreisförmige Leiter war bei b unterbrochen und hier mit zwei Fortsätzen e und f versehen, von denen einer unmittelbar mit dem einen Ende des Multiplicatordrahts in Verbindung stand, der andere aber zu einer Metallfeder ging, welche in schleifender Berührung mit einer Metallhülse stand, die isoliert auf die rotierende Axe $\varepsilon\eta$ gesteckt war. Der inducierte Strom ging also durch diese Feder in die Hülse, trat aus dieser



durch eine zweite gegen sie drückende Metallfeder heraus und ging aus dieser zu dem andern Ende des Multiplicatordrahts. Die Hülse hatte einen Ausschnitt, der mit Holz ausgefüllt war, auf welchem die eine Feder in dem Augenblicke lag, als das bewegliche Bahnstück $\gamma\varepsilon$ bei δ den Ring $\beta\gamma\delta$ verliess, um bei β von Neuem mit ihm in leitende Verbindung zu treten. In diesem Augenblicke nämlich wird die Schliessung des Inducenten unterbrochen und wieder hergestellt, es verschwindet sein Strom und er tritt wieder auf, dadurch wird aber in dem Leiter keine Induction erregt, weil er ihr, nach der eben angegebenen Vorrichtung, keine geschlossene leitende Bahn darbietet. Zum Multiplicator gelangt also nur der durch die Bewegung des Bahnstücks $\gamma\varepsilon$ inducierte Strom und lässt, da er bei fortgesetzter Drehung der Axe $\varepsilon\eta$ immer in derselben Richtung fliesst, Richtung und Intensität beobachten. Die Beobachtung zeigte einen inducierten Strom, und, was die Richtung desselben betrifft, gab sie dieselbe, so wie meine Formel es fordert. Um zu beweisen, dass durch diese Formel nicht bloss die Richtung, sondern auch die Stärke des inducierten Stroms richtig ausgedrückt wird, wurde auf folgende Weise verfahren. Die Feder, welche die leitende Verbindung in der inducierten Strombahn unterbrach, wurde so viel höher gestellt, dass sie den mit Holz ausgefüllten Ausschnitt der Hülse, durch den eben die Unterbrechung bewirkt wurde, nicht mehr traf. Den inducierten Strömen wird jetzt immer eine geschlossene Bahn geboten. Zum Multiplicator gelangen bei fortgesetzter rascher Drehung der Axe $\varepsilon\eta$ drei Ströme innerhalb sehr kurzer Zeit, nämlich der durch die Bewegung des Bahnstücks $\gamma\varepsilon$ inducierte, dann der durch das Verschwinden des inducierenden Stroms inducierte, in dem Momente, wo das bewegliche Bahnstück den Ring bei δ verlässt, und endlich der durch sein Wiederauftreten inducierte, sobald das Stück den Ring in β wieder erreicht. Die Kraft, welche von diesen drei Strömen während der kurzen Dauer eines Umlaufs des Bahnstücks $\gamma\varepsilon$ auf die Magnetnadel des Multiplicators ausgeübt wird, ist mit der Summe ihrer elektromotorischen Kräfte proportional; je nachdem das Vorzeichen dieser Summe positiv oder negativ ist, wird die Nadel auf der einen Seite oder der andern des Meridians ihre beinahe feste Stellung nehmen, oder sie wird, wenn jene Summe $= 0$ ist, in ihrer Stellung im Meridiane verharren . . . . Die Beobachtung zeigt, dass, wenn die Drehung rasch geschieht, die Nadel im Meridiane bleibt, wodurch die Richtigkeit meiner Formel sowohl in

Beziehung auf die Richtung als die Stärke des inducierten Stroms erwiesen ist.»

Zur Wiederholung dieser Versuche wurde 1 Kilogramm Kupferdraht, welcher $\frac{2}{3}$ Millimeter dick war, mit Seide übersponnen auf einen dünnen Messingreif von 120 Millimeter Durchmesser aufgewunden. In diesen Messingreif wurde ein hölzerner Cylinder gestellt, welcher, von etwas kleinerem Durchmesser als der Messingreif, mit einer metallenen Axe versehen war, durch die er mittelst eines Getriebes schnell gedreht werden konnte. In den hölzernen Cylinder war ein Streifen Kupfer eingelegt, welcher von der metallenen Axe bis zur Peripherie reichte. Mit diesem kupfernen Streifen waren an der Peripherie drei messingene Federn verbunden, welche den Messingreif von innen in drei Punkten berührten, welche in einer mit der Drehungsaxe parallelen Linie lagen. Diese 3 Federn dienten zur Herstellung einer sicheren Berührung, damit, wenn eine der 3 Federn einen Augenblick versagte, die Verbindung mit dem Messingreife durch die beiden andern Federn erhalten würde. Von den beiden Leitungsdrähten eines Grove'schen Bechers wurde der eine an dem Lager der Drehungsaxe befestigt, der andere an irgend einen Punkt des Messingreifs. Die beiden Enden des auf den Messingreif aufgewundenen übersponnenen Kupferdrahts wurden mit dem Multiplicator des Galvanometers verbunden, dessen Nadel eine Schwingungsdauer von nahe 10 Secunden besass.

Die beschriebene Vorrichtung unterscheidet sich von der Neumann'schen wesentlich nur in einer Beziehung, nämlich darin, dass der Messingreif nicht aufgeschnitten war, wodurch bewirkt wird, dass der Strom der Säule, welcher durch die metallene Drehungsaxe eintritt, von der einen Stelle des Messingreifs, zu welcher er durch die Messingfedern geführt wird, auf zwei Wegen zu der andern Stelle des Messingreifs gelangen kann, von wo er zur Säule zurückgeführt wird: der Strom theilt sich daher zwischen diesen beiden Wegen, nämlich zwischen den beiden Theilen des Messingreifs, welche den Berührungspunkt der Messingfedern mit derjenigen Stelle verbinden, wo der andere Leitungsdraht der Säule am Messingreife befestigt ist. Durch diese Theilung des Stroms wird wesentlich Dasselbe erreicht, was im Neumann'schen zweiten Versuche die Erhaltung des Schlusses der inducierten Kette in dem Augenblicke bezweckte, wo die Gleitstelle den Schnitt des Messingreifs passierte, dass nämlich die Summe

der elektromotorischen Kräfte, welche von den an der Gleitstelle ein- und austretenden Stromelementen ausgeübt wurden, für eine ganze Umdrehung der Axe = 0 wird, und daher bei schneller Drehung die beobachtete Wirkung auf das Galvanometer bloss von der Summe derjenigen elektromotorischen Kräfte abhing, welche von der Bewegung des Bahnstücks $\gamma\varepsilon$ herrührten. Durch die beschriebene Theilung des Stroms wird ebenfalls bewirkt, dass die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche von den an der Gleitstelle ein- und austretenden Elementen ausgeübt werden, = 0 wird, und zwar nicht bloss für die ganze Dauer einer Umdrehung, sondern für jeden einzelnen Augenblick, woraus für die Ausführung des Versuches der Vortheil entspringt, dass der Erfolg nicht mehr an die Bedingung einer schnellen Drehung geknüpft ist, was bei dem Neumann'schen Versuche der Fall war. *) Eine

---

*) Dass die beschriebene Theilung des Stroms die angegebene Wirkung wirklich habe, lässt sich auf folgende Weise zeigen. Bezeichnet man die constante Intensität des ungetheilten Stroms mit i, und theilt sich dieser Strom bei seinem Eintritte in den Messingreif in zwei Theile, von denen der eine die Intensität $i_{,}$ hat und durch den Kreisbogen ψ zum Austrittspunkte geht, der andere die Intensität $i_{,,}$ hat und durch den Bogen $2\pi - \psi$ zum Austrittspunkte geht; so geben die Ohm'schen Gesetze der Stromtheilung folgende Gleichungen:

$$i_{,} + i_{,,} = i$$
$$i_{,} : i_{,,} = (2\pi - \psi) : \psi .$$

Nimmt nun ψ um $d\psi$ zu, so verschwindet in dem Bogenelemente $d\psi$ die Stromintensität $i_{,,}$ und statt dessen entsteht in demselben Elemente die Stromintensität $- i_{,}$ (wo das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Richtung des neu entstandenen Stroms der Richtung des wachsenden Bogens ψ entgegengesetzt ist). Das Verschwinden eines positiven Stroms $i_{,,}$ in dem Elemente $d\psi$ erzeugt eine mit $i_{,,}d\psi$ proportionale elektromotorische Kraft, und das Entstehen eines negativen Stromes $- i_{,}$ in dem Elemente $d\psi$ eine mit $-(- i_{,}d\psi) = i_{,}d\psi$ proportionale elektromotorische Kraft, deren Summe also, wenn a einen constanten Factor bezeichnet,

$$= a(i_{,} + i_{,,})d\psi = aid\psi$$

ist. Indem nun aber ψ um $d\psi$ wächst, ändert sich zugleich das Verhältniss von $i_{,} : i_{,,} = (2\pi - \psi) : \psi$, während die Summe $i_{,} + i_{,,} = i$ unverändert bleibt, woraus die beiden Differentialgleichungen erhalten werden:

$$di_{,} + di_{,,} = 0$$
$$\psi di_{,} - (2\pi - \psi)di_{,,} = - id\psi$$

folglich $di_{,} = - \frac{id\psi}{2\pi}$ und $di_{,,} = + \frac{id\psi}{2\pi}$. Die Intensitätsänderung $di_{,}$ des Stromes $i_{,}$ im Bogen ψ in der Richtung abnehmender Werthe von ψ erzeugt eine mit $\psi di_{,}$ proportionale elektromotorische Kraft $+ a\psi di_{,} = - a\psi \frac{id\psi}{2\pi}$; die Intensitätsänderung $di_{,,}$ im Bogen $(2\pi - \psi)$ in der Richtung wachsender Werthe von ψ erzeugt eine mit $-(2\pi - \psi)\, di_{,,}$ proportionale elektromotorische Kraft $= - a(2\pi - \psi)di_{,,}$

andere Einrichtung, welche getroffen wurde, um sowohl den ersten Neumann'schen Versuch, als auch den zweiten, ganz unverändert, zu wiederholen, soll nachher beschrieben werden.

Es wurden folgende zwei Versuche gemacht. Erstens wurde der hölzerne Cylinder durch das Getriebe in jeder Secunde 10 Mal um seine Axe gedreht, während der inducierende Strom durch die Drehungsaxe und den Messingreif geführt wurde, und es wurde am Galvanometer beobachtet, dass dadurch kein Strom induciert wurde. Der unverrückte Stand der Galvanometernadel konnte bis auf $\frac{1}{2}$ Scalentheil verbürgt werden. Dieses Resultat stimmt also mit dem des zweiten Neumann'schen Versuches ganz überein. Zweitens wurde um den Messingreif noch ein Hülfsdraht einmal herum geführt, und seine Enden mit der Säule verbunden, so dass der Strom, statt durch die Drehungsaxe und durch den Messingreif, durch diesen Draht hindurch gehen musste. Im Augenblicke, wo diese Kette geschlossen wurde, wurde am Galvanometer ein inducierter Strom beobachtet, dessen Richtung der des inducierenden Stroms entgegengesetzt war. Bei Lösung der Kette zeigte sich ein gleich starker inducierter Strom, aber von gleicher Richtung mit dem inducierenden. In beiden Fällen erhielt die Galvanometernadel eine Ablenkung von nahe 22 Scalentheilen. Der zweite Versuch dient zum Beweise, dass im ersten Versuche, bei 100 Umdrehungen des beweglichen Stromstücks während einer Schwingung, die Galvanometernadel über 1000 Scalentheile Ablenkung erhalten haben müsste, wenn jede Umdrehung eine elektromotorische Kraft erzeugt hätte, welche der durch den zweiten Versuch bestimmten gleich wäre. Eine solche Kraft ist also nicht vorhanden.

Dieser Versuch bietet bei der beschriebenen Stromtheilung noch ein besonderes Interesse dadurch dar, dass er dem bekannten elektrodynamischen Rotationsversuche genau entspricht, wo innerhalb eines festen kreisrunden Stroms ein beweglicher Stromtheil sich befindet, welcher nach dem Mittelpunkte des ersteren gerichtet ist. Ueber diesen elektrodynamischen Rotationsversuch siehe Poggendorff in den Annalen 1849. 77. S. 22 ff. Es ist bekannt, dass der Kreisstrom den beweglichen Ra-

---

$= - a(2\pi - \psi)\frac{id\psi}{2\pi}$. Es ergiebt sich hieraus die Summe aller elektromotorischen Kräfte in Folge der Zunahme $d\psi$ des Bogens ψ:

$$= aid\psi - a\psi\frac{id\psi}{2\pi} - a(2\pi - \psi)\frac{id\psi}{2\pi} = 0,$$

was zu beweisen war.

dialstrom rotieren macht, in der Richtung des Kreisstroms selbst oder in umgekehrter, je nachdem die Richtung des Stroms in dem beweglichen Stromtheile nach dem Mittelpunkte zu oder von ihm abgerichtet ist. Nach der sonst gültigen Regel, nach welcher elektromagnetische oder elektrodynamische Versuche in magnetoelektrische oder Voltainductions-Versuche umgekehrt werden, scheint es, dass, wenn jener bewegliche Radialstrom gedreht wird, wie es bei unserem Versuche der Fall war, in dem festen kreisrunden Leiter ein der Drehungsrichtung paralleler oder entgegengesetzter Strom induciert werden müsste, je nachdem der Strom in dem beweglichen Leiter von dem Mittelpunkte ab oder nach demselben zu gerichtet wäre. Auch leuchtet ein, dass die Vertauschung der Quecksilberrinne, in die man bei dem erwähnten Rotationsversuche den beweglichen Stromtheil eintauchen zu lassen pflegt, mit einem von dem beweglichen Stromtheile berührten Messingreife, unwesentlich ist und keinen Einfluss auf das Resultat haben könne. Der Versuch hat nun aber gelehrt, dass der nach der angeführten Regel zu erwartende Inductionsstrom in diesem Falle nicht stattfindet. Jene Regel der Umkehrung gilt daher nicht allgemein, sondern es findet davon eine Ausnahme statt, wenn der geschlossene inducierende Strom aus einem beweglichen und einem unbeweglichen Stromtheile besteht, welche durch eine Gleitstelle verbunden sind. Bekanntlich findet der Inductionsstrom statt, wenn der inducierte Leiter aus zwei durch eine Gleitstelle verbundenen Theilen besteht.

Ferner habe ich auch die Neumann'schen Versuche unverändert wiederholt, indem der Messingreif neben der Stelle durchschnitten wurde, wo der von der Säule kommende Leitungsdraht an ihm befestigt war. Die eine Verbindung des um den Messingreif gewundenen Drahts mit dem Multiplicator des Galvanometers wurde durch eine Feder hergestellt und konnte durch Zurückdrücken dieser Feder gelöst werden. Dieses Zurückdrücken wurde durch einen Holzstift bewirkt, welcher am Holzcylinder befestigt und so gestellt war, dass dadurch die Lösung der Feder in dem Augenblicke stattfand, wo die am Holzcylinder angebrachten Messingfedern auf die durchschnittene Stelle des Messingreifs zu stehen kamen. Noch ist zu bemerken, dass der um den Messingreif gewundene Draht eine geringere Anzahl von Umwindungen als vorher bildete. Es wurden damit folgende Versuche gemacht. Erstens wurde der hölzerne Cylinder um seine Axe durch das Getriebe

10 Mal in jeder Secunde gedreht und am Galvanometer ein inducierter Strom beobachtet, welcher so stark war, dass die Ablenkung der Nadel über 500 Scalentheile betrug und mit der Scale nicht mehr gemessen werden konnte. Zweitens: der Holzcylinder wurde nach Beseitigung des Holzstiftes in derjenigen Stellung festgehalten, wo die an ihn befestigten Messingfedern das mit der Säule nicht verbundene Ende des durchschnittenen Messingreifs berührten, so dass der Strom den ganzen Messingreif durchlaufen musste. In dem Augenblicke nun, wo die Säule geschlossen wurde, wurde am Galvanometer ein inducierter Strom beobachtet, welcher die Nadel um 13,5 Scalentheile in der nämlichen Richtung wie bei dem ersten Versuche ablenkte, vorausgesetzt, dass die Richtung des inducierenden Stroms die nämliche war, und dass beim ersten Versuche in derjenigen Richtung gedreht wurde, bei welcher die Messingfedern von ihrer eben beschriebenen Stelle über den Schnitt des Messingreifs fortgeführt wurden. Drittens: um den Messingring wurde noch ein Hülfsdraht einmal herumgewunden und die Säule so damit geschlossen, dass der Strom diese Drahtwindung in gleicher Richtung durchlief, wie vorher den Messingreif. Im Augenblicke der Schliessung der Säule wurde dann mit dem Galvanometer ein inducierter Strom beobachtet, welcher die Nadel 13,8 Scalentheile in gleicher Richtung wie vorher ablenkte. Hierauf wurde viertens der Multiplicator geschwächt und der erste Versuch nochmals wiederholt. Der inducierte Strom brachte dann eine bleibende Ablenkung der Magnetometernadel von 377 Scalentheilen hervor, jedoch liess sich eine feinere Messung dieser Ablenkung nicht ausführen, wegen bedeutender Schwankungen, die wahrscheinlich ihren Grund in Unvollkommenheiten der technischen Ausführung der Rotationsvorrichtung hatten. Fünftens wurde auch der zweite Versuch nochmals wiederholt und es ergab sich, statt der früher beobachteten Ablenkung von 13,5 Scalentheilen, mit dem geschwächten Multiplicator nur eine Ablenkung von 8 Scalentheilen. Sechstens endlich wurde auch der zweite Neumann'sche Versuch wiederholt, welcher sich von dem vierten Versuch nur dadurch unterschied, dass der Holzstift am Holzcylinder entfernt wurde, wodurch bewirkt wurde, dass nun bei der Drehung des Holzcylinders die inducierte Kette immer geschlossen blieb. Bei gleich schneller Drehung, wie beim ersten und vierten Versuche, wurde dann an der Galvanometernadel gar keine Ablenkung

beobachtet und dieser Ruhestand konnte bis auf ein paar Scalentheile verbürgt werden, innerhalb welcher die Nadel schwankte.

Die Resultate der im vierten und fünften Versuche gemachten Messungen gestatten eine Vergleichung, welche, auch wenn diese Messungen keine grosse Genauigkeit besassen, bemerkt zu werden verdient. Aus dem Resultate der im vierten Versuche gemachten Messung lässt sich nämlich die grösste Elongation berechnen, welche die Magnetometernadel von der Ruhe ab in Folge der ihr durch eine einzige momentane Umdrehung des Holzcylinders ertheilten Bewegung erreicht haben würde. Es ist nur zu diesem Zwecke noch hinzuzufügen, dass das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbogen der Nadel $= 0{,}47160$ war, oder dass, wenn man dasselbe durch den Modulus des Logarithmensystems dividiert mit λ bezeichnet, $\lambda = 1{,}088$ war. Bezeichnet man ausserdem mit y die im vierten Versuche beobachtete Ablenkung für n Umdrehungen während der Schwingungsdauer der Nadel, so ergiebt sich für die grösste Elongation, welche die Nadel in Folge der ihr durch eine Umdrehung ertheilten Bewegung erreicht haben würde, folgender Ausdruck:

$$x = \frac{y}{n} \cdot \sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)} \,.\, e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}} \,. \text{*)}$$

Nun ist in Scalentheilen $y = 377$, ferner $n = 100$ (weil 10 Umdrehungen auf 1 Secunde kamen und die Schwingungsdauer $\tau = 10$ Secunden war) und $\lambda = 1{,}088$ gefunden worden; folglich ist die grösste Elongation, welche die Magnetometernadel von der Ruhe ab in Folge der ihr durch eine Umdrehung ertheilten Bewegung erreicht haben würde, in Scalentheilen ausgedrückt,

$$x = 8{,}164\,,$$

---

*) Siehe Beilage C, wo mit Rücksicht auf die Dämpfung die der ruhenden Nadel ertheilte Drehungsgeschwindigkeit, wenn x die gesuchte Elongation und τ die Schwingungsdauer unter dem Einflusse der Dämpfung bezeichnet, ausgedrückt ist durch $\frac{x}{\tau} \sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)} \,.\, e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}$. Diese Drehungsgeschwindigkeit ist aber durch das der Ablenkung y entsprechende Drehungsmoment F, dividiert durch das Trägheitsmoment der Nadel K und multipliciert mit der Zeit einer Umdrehung $\frac{\tau}{n}$ im vierten Versuche gegeben $= \frac{\tau}{n} \frac{F}{K}$. Endlich ist das der Ablenkung y entsprechende Drehungsmoment $F = \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\tau\tau} K y$, folglich

$$\frac{x}{\tau} \sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)} \,.\, e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}} = \frac{\tau}{n} \cdot \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\tau\tau} y$$

woraus sich für x der oben angeführte Ausdruck ergiebt.

während im fünften Versuche eine Elongation von 8 Scalentheilen wirklich beobachtet worden ist, wenn der Holzcylinder nicht gedreht wurde, sondern in derjenigen Stellung fest stand, bei welcher der bei Schliessung der Säule entstehende Strom den ganzen Messingreif durchlaufen musste. Aus der aus dieser Vergleichung hervorgehenden Uebereinstimmung folgt, dass der im vierten Versuche inducierte Strom, eine nur mittelbare Folge der Drehung, durch den bei jeder Umdrehung im ganzen Messingreif entstehenden Strom inducirt worden sei (dessen Wiederverschwinden keinen Einfluss ausüben konnte, weil die Multiplicatorkette in dem Augenblicke dieses Verschwindens gelöst war); die Drehung des beweglichen Stromstücks selbst hatte also keinen Antheil an dem inducierten Strome. Es finden sich durch diese Versuche also die von Neumann gegebenen Bestimmungen vollkommen bestätigt.

39.

Das Inductionsgesetz für inducierende Ströme mit Gleitstellen.

Das allgemeine Princip der mathematischen Theorie inducierter elektrischer Ströme, welches von Neumann aufgestellt worden ist, ist ein Theorem, welches sich auf die Ströme und Leiter im Ganzen, und zwar bloss auf ihre Stärke und Lage am Anfang und am Ende der betrachteten Induction bezieht und die gesuchte Summe der elektromotorischen Kräfte von der Betrachtung aller mitwirkenden Elemente im Einzelnen und von der Betrachtung des allmähligen Uebergangs der Ströme und Leiter aus ihrem Zustande am Anfange der Induction zu dem am Ende derselben unabhängig darstellt. Die Erleichterung, welche ein Theorem von solcher Einfachheit und Allgemeinheit überall, wo es Anwendung findet, zur wirklichen Bestimmung der gesuchten Summe elektromotorischer Kräfte gewährt, leuchtet von selbst ein. Mit dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung verhält es sich der Sache nach ganz anders, weil dieses nur eine für alle Elementarwirkungen gültige Regel geben soll, aus welcher die gesuchte Summe elektromotorischer Kräfte nicht unmittelbar erhalten wird, sondern nur mittelbar durch eine Summation aller vollständig zusammengestellten Elementarwirkungen gefunden werden kann. Es kommt daher hier bei Ableitung des Inductionsgesetzes für einen bestimmten Fall hauptsächlich auf eine für diesen Fall vollständige Zusammenstellung aller Elementarwirkungen an, welche sich aus der Be-

trachtung der Verhältnisse ergeben muss, welche der gegebene Fall voraussetzt. Die Ableitung der Inductionsgesetze aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung fordert daher eine ganz besondere Aufmerksamkeit auf alle Verhältnisse, welche durch jeden gegebenen Fall bestimmt sein sollen. Es ist dies geschehen für den Fall der von Stromelementen auf andere Stromelemente oder auf Leiterelemente ausgeübten Induction sowohl in der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen, als auch in der von Neumann in der angeführten Abhandlung § 5 gegebenen Ableitung, wodurch sich für diesen Fall zwei wesentlich verschiedene Arten von Elementarwirkungen herausgestellt haben, nämlich diejenigen, welche ein Stromelement durch seine relative Bewegung zum inducierten Elemente, und diejenigen, welche ein Stromelement durch Aenderung seiner Stromintensität ausübt.

Diese Eintheilung der Elementarwirkungen hat nun Neumann auch auf den Fall eines inducierenden Stroms mit Gleitstellen in Anwendung gebracht. Dieser Strom zerfällt in ein bewegliches und unbewegliches Stromstück, die an zwei Stellen in leitender Verbindung stehen, von denen wenigstens eine Gleitstelle ist. Es ergab sich leicht, dass die Elementarwirkungen des beweglichen Stromstücks der ersten Art angehören, nämlich denjenigen, welche die Stromelemente durch ihre relative Bewegung zu den inducierten Elementen ausüben. Eben so ergab sich, dass die Elementarwirkungen des unbeweglichen Stromstücks der zweiten Art angehören, nämlich denjenigen, welche die Stromelemente durch Aenderung ihrer Stromintensität ausüben. Den aus der ersteren Quelle stammenden Theil der elektromotorischen Kraft hatte Neumann zuerst allein berechnet, bei der nachfolgenden Prüfung aber den aus der andern Quelle stammenden Theil der elektromotorischen Kraft noch hinzugefügt.

Eine weitere Prüfung kann nur darauf gerichtet sein, ob die Zusammenstellung der Elementarwirkungen nach den beiden angegebenen Arten für den Fall eines inducierenden Stroms mit Gleitstelle wirklich erschöpfend ist. In der That wäre sie wirklich erschöpfend, wenn in diesem Falle bloss inducierende Stromelemente gegeben wären; denn diese müssen entweder dem beweglichen oder dem unbeweglichen Stromstücke angehören, wonach ihre Elementarwirkungen entweder der ersteren oder der letzteren Art sein müssen. Prüft man nun

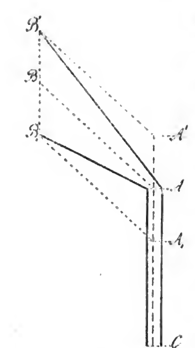
aber näher, ob in dem vorliegenden Falle wirklich alle gegebenen Bewegungen der elektrischen Fluida und deren Aenderungen auf Bewegungen der Elektricität in Stromelementen und deren Aenderungen zurückgeführt werden können; so ergiebt sich leicht, dass diese Zurückführung überall möglich ist, mit Ausnahme der Gleitstelle. An der Gleitstelle tritt nämlich eine plötzliche Aenderung in der Bewegung aller elektrischen Theilchen ein, indem diejenigen, welche von dem beweglichen Stromstücke zu dem unbeweglichen übergehen, an der Bewegung des ersteren Theil zu nehmen aufhören, und diejenigen, welche von dem unbeweglichen Stromstücke zu dem beweglichen übergehen, an der Bewegung des letzteren Theil zu nehmen beginnen. Diese plötzliche Aenderung in der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle, kann nicht unter denjenigen Aenderungen befasst werden, welche in den Stromelementen selbst stattfinden; denn jene Aenderung tritt weder in den Stromelementen des beweglichen Stromstücks ein, weil alle elektrischen Theilchen, so lange sie diesen Stromelementen angehören, auch an der Bewegung derselben Theil nehmen, noch tritt sie in den Stromelementen des unbeweglichen Stromstücks ein. Jene plötzliche Aenderung in der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle kann also nicht auf Aenderungen der Bewegungen in den Stromelementen selbst zurückgeführt werden und ist daher die Quelle einer dritten Art von Elementarwirkungen, welche von den beiden, inducierenden Stromelementen zukommenden, Arten von Elementarwirkungen unterschieden werden muss. Es fragt sich also nur darum, ob aus der angegebenen plötzlichen Aenderung der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle nach dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung elektromotorische Kräfte wirklich entspringen oder nicht. Im ersteren Falle leuchtet ein, dass diese elektromotorischen Kräfte, da sie von Neumann noch nicht in Rechnung gebracht sind, der von Neumann berechneten Summe elektromotorischer Kräfte noch hinzugefügt werden müssen.

Die Ableitung der aus der plötzlichen Aenderung in der Bewegung der elektrischen Fluida an einer Gleitstelle entspringenden elektromotorischen Kräfte ist auch in der im 30. Artikel der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen gegebenen Ableitung des Gesetzes der Volta-Induction aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung nicht mit enthalten, denn letztere

ist dort ausdrücklich auf die Induction von Stromelementen beschränkt worden, wobei also nur diejenigen Aenderungen der Bewegung der elektrischen Fluida in Betracht gezogen zu werden brauchten, welche in den Stromelementen vorkommen. Wenn es nun aber Aenderungen in der Bewegung der elektrischen Fluida giebt, welche in keinem Stromelemente vorkommen, sondern nur an der Grenze zweier Stromelemente, oder in dem Augenblicke, wo das elektrische Fluidum von dem einen Stromelemente zu dem andern übergeht, und ein solcher Fall an einer Gleitstelle wirklich eintritt; so bedarf obiges Inductionsgesetz noch einer Ergänzung, wenn es diesen Fall mit umfassen soll. Diese Ergänzung kann leicht gegeben werden; denn es ist dazu nur nöthig, dass die elektrischen Massen, welche solche plötzliche Aenderungen der Geschwindigkeit ihrer Bewegung erleiden, und die Grösse dieser Aenderungen genau bestimmt seien, um das allgemeine Grundgesetz der elektrischen Wirkung auch hierauf in Anwendung zu bringen. Dabei sollen zum leichteren Verständniss dieselben Bezeichnungen gebraucht werden, wie in der im 30. Art. der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen gegebenen Ableitung; auch sollen Kürze halber alle hierbei in gleicher Weise gültigen Bestimmungen nicht nochmals entwickelt, sondern von dort entlehnt werden.

Was die Masse des elektrischen Fluidums betrifft, welche eine plötzliche Aenderung in ihrer Bewegung an der Gleitstelle erleidet, so kann diese nicht, wie es bei einem Stromelemente geschah, durch das Product $\pm \alpha e$ ausgedrückt werden, wo α die Länge des Stromelements bezeichnete, sondern es muss an die Stelle von α die Länge des Wegelements udt gesetzt werden, welches die Elektricität mit der Geschwindigkeit u, mit welcher sie durch die Gleitstelle geht, in dem Zeitelemente dt zurücklegen würde. Die inducierten Massen können dagegen eben so, wie Art. 30 der angeführten Abhandlung, durch $+\alpha' e'$ und $-\alpha' e'$ dargestellt werden, wo α' die Länge des inducierten Elements und $\pm e'$ die in der Längeneinheit des inducierten Leiters enthaltene positive oder negative Elektricität bezeichnet.

Die Bewegungen jener inducierenden Massen $+eudt$ und $-eudt$ und die von ihnen durchlaufenen Bahnen lassen sich auf folgende Weise darstellen. A sei die Gleitstelle, AB der angrenzende Theil des beweglichen, AC der angrenzende Theil des unbeweglichen Stromstücks. Die



Wege $CA = AB$ werden von den elektrischen Fluidis mit der Geschwindigkeit u in derselben Zeit durchlaufen, in welcher das bewegliche Stromstück von $A_, B_,$ bis AB oder von AB bis $A'B'$ fortrückt. Die Zusammensetzung beider Bewegungen ergiebt für die negative Masse (wenn diese von dem beweglichen Stromstück zum unbeweglichen übergeht) die Bahn $B_, AC$, und das Bahnstück $B_, A$ wird in gleicher Zeit wie AC durchlaufen; für die positive Masse ergiebt sich eben so die Bahn CAB', und die Stücken CA und AB' werden in gleicher Zeit durchlaufen. In dieser Darstellung ist der Deutlichkeit wegen angenommen worden, dass der Strom an der Gleitstelle A eine plötzliche Wendung mache und von der Richtung CA zur Richtung AB übergehe. In der Wirklichkeit findet eine solche plötzliche Wendung nicht statt, sondern man kann annehmen, dass die beiden Elemente der wahren Strombahn CA und AB nahe eine gerade Linie bilden. Bezeichnet man dann mit v die Geschwindigkeit des beweglichen Stromstücks, so ist $A_, A = AA' = B_, B = BB' = v dt$, während die Länge der Stromelemente $CA = AB = u dt$ ist. Hieraus ergiebt sich also für die positive Masse, dass sie in zwei gleichen auf einander folgenden Zeitelementen dt die Wege $CA = u dt$ und $AB' = (u + v)\,dt$, für die negative Masse, dass sie in denselben Zeitelementen die Wege $B_, A = -(u - v)\,dt$ und $AC = - u dt$ zurücklegt. Die Geschwindigkeit der positiven Elektricität geht also bei A von $+u$ plötzlich zu $+(u + v)$ über; die Geschwindigkeit der negativen Elektricität geht dagegen bei A von $-(u - v)$ plötzlich zu $-u$ über. Soll auch dieser Wechsel der Geschwindigkeit nach dem Gesetz der Stetigkeit geschehen, so bezeichne man die, wenn auch noch so kleine, Zeit dieses Uebergangs mit τ und in irgend einem Augenblicke $d\sigma$ am Ende des Zeitabschnitts σ im Zeitraum τ die Geschwindigkeit der positiven Elektricität mit $+(u + \frac{\sigma}{\tau}\,v)$ und eben so die Geschwindigkeit der negativen Elektricität mit $-(u + \frac{\sigma}{\tau}\,v - v)$. Ausserdem bezeichne man, wie in Art. 30 der angeführten Abhandlung, mit θ den Winkel, welchen die Richtung von $+u$,

d. h. AB mit $A\alpha' = r$ macht, mit θ' den Winkel, welchen die Richtung, nach welcher sich die positive Elektricität im unbewegten inducierten Elemente α' mit der Geschwindigkeit $+u'$ bewegt, mit der verlängerten Geraden $A\alpha'$ macht, und mit ω den Winkel der beiden Ebenen, welche durch $A\alpha'$ parallel mit der Richtung von $+u$ und von $+u'$ gelegt werden. Endlich bezeichne r_1 den Abstand der Masse $+eudt$ von der Masse $+\alpha'e'$, r_2 den Abstand der Masse $-eudt$ von der Masse $-\alpha'e'$, r_3 den Abstand der Masse $+eudt$ von der Masse $-\alpha'e'$, r_4 den Abstand der Masse $-eudt$ von der Masse $+\alpha'e'$, die sämmtlich für den betrachteten Augenblick $= r$ sind, aber bei der Verschiedenheit der Bewegung jener Massen nicht gleich bleiben. Es ergiebt sich dann aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung die Differenz der Kräfte, welche auf die positive und negative Elektricität im Elemente α' wirken, von welcher die Induction abhängt,

$$-\frac{aa}{16}\cdot\frac{eudt\,.\,\alpha'e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)\right.$$
$$\left.-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\}.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem Ausdrucke dieser für ein inducierendes Stromelement im 30. Artikel der angeführten Abhandlung S. 363 abgeleiteten Differenz bloss dadurch, dass $eudt$ an die Stelle von αe gesetzt ist. Ferner findet man auf die dort angegebene Weise für unsern Fall

$$\frac{dr_1}{dt} = -\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\cos\theta + u'\cos\theta'$$
$$\frac{dr_2}{dt} = +\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v - v\right)\cos\theta - u'\cos\theta'$$
$$\frac{dr_3}{dt} = -\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\cos\theta - u'\cos\theta'$$
$$\frac{dr_4}{dt} = +\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v - v\right)\cos\theta + u'\cos\theta'$$

welche von den a. a. O. gefundenen Gleichungen sich nur dadurch unterscheiden, dass $+\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)$ statt $+u$ für die Geschwindigkeit der inducierenden positiven Elektricität und $-\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)$ statt $-u$ für die Geschwindigkeit der inducierenden negativen Elektricität gesetzt und das von der Bewegung des inducierten Elements α' abhängige Glied weggelassen worden ist. Es ist also

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right) = +4\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-\tfrac{1}{2}v\right)v\cos\theta^2$$

Die zweiten Differentialquotienten erhält man hieraus auf die dort angegebene Weise, wenn man berücksichtigt, dass hier u, u' und v gegebene constante Werthe haben, nämlich:

$$\frac{ddr_1}{dt^2} = + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin\theta \frac{d\theta_1}{dt} - u' \sin\theta' \frac{d\theta'_1}{dt} - \frac{v}{\tau} \cos\theta$$

$$\frac{ddr_2}{dt^2} = - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin\theta \frac{d\theta_2}{dt} + u' \sin\theta' \frac{d\theta'_2}{dt} + \frac{v}{\tau} \cos\theta$$

$$\frac{ddr_3}{dt^2} = + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin\theta \frac{d\theta_3}{dt} + u' \sin\theta' \frac{d\theta'_3}{dt} - \frac{v}{\tau} \cos\theta$$

$$\frac{ddr_4}{dt^2} = - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin\theta \frac{d\theta_4}{dt} - u' \sin\theta' \frac{d\theta'_4}{dt} + \frac{v}{\tau} \cos\theta$$

Es ist also:

$$\begin{aligned}\left(\frac{ddr_1}{dt^2} - \frac{ddr_2}{dt^2} + \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2}\right) = &+ \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin\theta \left(\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right) \\ &- u' \sin\theta' \left(\frac{d\theta'_1}{dt} + \frac{d\theta'_2}{dt} - \frac{d\theta'_3}{dt} - \frac{d\theta'_4}{dt}\right) \\ &- v \sin\theta \left(\frac{d\theta_2}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right) - 4 \frac{v}{\tau} \cos\theta\end{aligned}$$

und man findet auf die dort angegebene Weise

$$r \frac{d\theta_1}{dt} = + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin\theta - u' \sin\theta' \cos\omega$$

$$r \frac{d\theta_2}{dt} = - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin\theta + u' \sin\theta' \cos\omega$$

$$r \frac{d\theta_3}{dt} = + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin\theta + u' \sin\theta' \cos\omega$$

$$r \frac{d\theta_4}{dt} = - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin\theta - u' \sin\theta' \cos\omega$$

$$r \frac{d\theta'_1}{dt} = - u' \sin\theta' + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin\theta \cos\omega$$

$$r \frac{d\theta'_2}{dt} = + u' \sin\theta' - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin\theta \cos\omega$$

$$r \frac{d\theta'_3}{dt} = + u' \sin\theta' + \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v\right) \sin\theta \cos\omega$$

$$r \frac{d\theta'_4}{dt} = - u' \sin\theta' - \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin\theta \cos\omega .$$

Substituiert man diese Werthe, so ist

$$r\left(\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right) = + 2v \sin\theta$$

$$r\left(\frac{d\theta'_1}{dt} + \frac{d\theta'_2}{dt} - \frac{d\theta'_3}{dt} - \frac{d\theta'_4}{dt}\right) = 0$$

$$r\left(\frac{d\theta_2}{dt} + \frac{d\theta_4}{dt}\right) = - 2 \left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - v\right) \sin\theta$$

folglich:

$$r\left(\frac{ddr_1}{dt^2} - \frac{ddr_2}{dt^2} + \frac{ddr_3}{dt^2} - \frac{ddr_4}{dt^2}\right) = + 4\left(u + \frac{\sigma}{\tau} v - \tfrac{1}{2} v\right) v \sin\theta^2 - 4 \frac{rv}{\tau} \cos\theta$$

woraus endlich die Differenz der Kräfte, welche auf die positive und negative Elektricität im Elemente α' wirken, und von welcher die Induction abhängt, sich ergiebt, nämlich:

$$-\frac{aa}{16}\cdot\frac{eudt\,.\,\alpha'e'}{rr}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)-2r\left(\frac{ddr_1}{dt^2}-\frac{ddr_2}{dt^2}+\frac{ddr_3}{dt^2}-\frac{ddr_4}{dt^2}\right)\right\}$$

$$=-\frac{aa}{4}\cdot\frac{eudt\,.\,\alpha'e'}{rr}\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-\tfrac{1}{2}v\right)v\left(\cos\theta^2-2\sin\theta^2\right)-\frac{aa}{2}\frac{eudt\,.\,\alpha'e'}{r}\frac{v}{\tau}\cos\theta.$$

Multipliciert man diesen Ausdruck mit dem Zeitelement $d\sigma$ und integriert von $\sigma=0$ bis $\sigma=\tau$, so erhält man den Integralwerth jener Differenz für die Dauer des Uebergangs τ

$$=-\frac{aa}{4}\frac{eudt\,.\,\alpha'e'}{rr}\cdot uv\tau\,.\,(\cos\theta^2-2\sin\theta^2)-\frac{aa}{2}\cdot\frac{eudt\,.\,\alpha'e'}{r}\cdot v\cos\theta$$

oder, wenn τ verschwindend klein ist, d. h. wenn der Wechsel der Geschwindigkeit in den elektrischen Fluidis an der Gleitstelle sehr schnell geschieht,

$$=-\frac{aa}{2}\cdot\frac{eudt\,.\,\alpha'e'}{r}\cdot v\cos\theta\,.$$

Setzt man nun hierin, wie a. a. O. S. 367 angegeben ist, $aeu=i$ und multipliciert mit $\frac{\cos\theta'}{e'}$, so ergiebt sich die in dem Zeitelemente dt von der durch die Gleitstelle gegangenen Elektricität auf das inducierte Element α' ausgeübte elektromotorische Kraft

$$=-\frac{1}{2}\frac{\alpha'vdt}{r}\cdot ai\cos\theta\cos\theta'.$$

Nun ist aber

$$vdt=\alpha$$

die Länge des in die Kette während des Zeitelements dt an der Gleitstelle neu eintretenden Leiterelements, in welchem also die Stromstärke von 0 bis i wächst. Bei dem Wachsthum der Stromintensität $\frac{di}{dt}$ in dem Elemente α ist aber die von diesem Elemente auf α' ausgeübte elektromotorische Kraft a. a. O. S. 367

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{r}a\cos\theta\cos\theta'\frac{di}{dt}$$

gefunden worden, folglich die elektromotorische Kraft für das Wachsthum der Stromintensität von 0 bis i

$$=-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}ai\cos\theta\cos\theta'$$

und setzt man endlich hierin für α seinen Werth vdt, so ersieht man, dass die in dem Zeitelemente dt von der durch die Gleitstelle gehenden Elektricität auf das inducierte Element α' ausgeübte elektromotorische

Kraft der von dem an der Gleitstelle in demselben Zeitelemente dt neu eintretenden Stromelemente αi auf das inducierte Element α' ausgeübten elektromotorischen Kraft sowohl der Grösse als auch der Richtung nach gleich ist, und dass man daher, um die erstere Kraft in Rechnung zu bringen, bloss die letztere Kraft zu verdoppeln brauche. Diese Verdoppelung ist aber, wie Neumann nachgewiesen hat, die Bedingung dafür, dass das aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleitete Inductionsgesetz mit den Resultaten aus Neumanns allgemeinem Principe der mathematischen Theorie inducierter Ströme und mit der Erfahrung auch in dem Falle einer Gleitstelle übereinstimme. Diese Uebereinstimmung ist also hiermit nachgewiesen. Die plötzliche Aenderung, welche in der Bewegung aller elektrischen Theilchen an der Gleitstelle eintritt, ist also die Ursache von elektromotorischen Kräften, welche Neumann bei der von ihm gegebenen Ableitung des Inductionsgesetzes aus dem allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung nicht in Rechnung gebracht hat, und fügt man die Summe der aus dieser Quelle entspringenden elektromotorischen Kräfte der von Neumann gefundenen Summe hinzu, so findet sich der Widerspruch, welcher zwischen den Resultaten des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung und Neumanns allgemeinem Principe der mathematischen Theorie inducierter Ströme zu bestehen schien, vollständig gelöst, was zu beweisen war.

Nach den hier entwickelten Gesetzen lassen sich endlich die Resultate aller in Art. 38 beschriebenen Versuche voraussagen. Bezeichnet man nämlich mit R den Halbmesser des von der Gleitstelle beschriebenen Kreises, von welchem die Halbmesser der inducierten Kreise R' nur wenig verschieden waren, und ist m die Zahl der letzteren und n die Zahl der Umdrehungen des beweglichen Stromstücks in der Zeiteinheit, i die Stärke des inducierenden Stroms und wird endlich Kürze halber

$$R_0 = \frac{RRR'R'}{(RR+R'R')^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{1 + \frac{15}{8}\left(\frac{RR'}{RR+R'R'}\right)^2 + \frac{315}{64}\left(\frac{RR'}{RR+R'R'}\right)^4 + \ldots\right\}$$

gesetzt; so ergiebt sich aus obigen Gesetzen

1) die Summe der elektromotorischen Kräfte des beweglichen Stromstücks $= + mn\pi\pi \,.\, aiR_0$

2) die Summe der elektromotorischen Kräfte der an der Gleitstelle allmählig neu eintretenden Stromelemente (wenn die Wirkung ihres

plötzlichen Verschwindens durch eine momentane Lösung der inducierten Kette bei jeder Umdrehung aufgehoben wird, wie im ersten Neumann'schen Versuche es der Fall war)

$$= -mn\pi\pi \, . \, aiR_0$$

3) die Summe der elektromotorischen Kräfte der durch die Gleitstelle gehenden Elektricität, wegen der plötzlichen Aenderung ihrer Geschwindigkeit in der Gleitstelle,

$$= -mn\pi\pi \, . \, aiR_0 \, .$$

Die Ableitung dieser Werthe siehe in der Beilage *E*. Aus diesen partiellen Summen lassen sich die ganzen elektromotorischen Kräfte für alle in Art. 38 beschriebenen Versuche leicht zusammensetzen. Es ergiebt sich nämlich

a) für den ersten Neumann'schen Versuch die elektromotorische Kraft durch Addition aller drei partiellen Summen

$$= -mn\pi\pi \, . \, aiR_0 \, .$$

Dasselbe gilt für die beiden Wiederholungen dieses Versuchs, wenn nur für m der in jedem Versuche ihm zukommende Werth gesetzt wird. Das negative Vorzeichen bedeutet, dass der Strom in den inducierten Kreisen die entgegengesetzte Richtung hat, wie der Strom in dem kreisförmigen inducierenden Stromstücke, wenn letzteres durch die an der Gleitstelle neu eintretenden Elemente wächst.

b) Für den zweiten Neumann'schen Versuch, wo die elektromotorische Kraft der an der Gleitstelle neu eintretenden Stromelemente durch das plötzliche Verschwinden derselben am Ende jeder Umdrehung aufgehoben wurde, fällt die partielle Summe unter (2) weg, und es sind bloss die beiden partiellen Summen unter (1) und (3) zu addieren, welche die elektromotorische Kraft geben

$$= 0 \, .$$

Dasselbe gilt für die Wiederholung dieses Versuchs, so wie auch für diejenige Modification desselben, wo dieselbe Wirkung, welche durch das plötzliche Verschwinden aller während einer Umdrehung allmählig neu eingetretenen Stromelemente am Ende der Umdrehung hervorgebracht wurde, durch eine Stromtheilung erreicht worden ist.

c) Es bleiben also nur noch diejenigen Versuche übrig, wo der inducierende Strom, welcher durch einen kreisförmigen Leiter ging, eine Intensitätsänderung erlitt, entweder von 0 bis i oder von i bis 0, und wobei dieser Strom entweder gar nicht durch das bewegliche Stück

des Leiters geführt wurde, oder dieses Stück, während der Strom durchging, nicht bewegt wurde. Für diese Versuche fallen die partiellen Summen unter (1) und (3) ganz weg und es bleibt als elektromotorische Kraft bloss die partielle Summe unter (2), worin für n der Werth $= 1$ zu setzen ist, also

$$= - mn\pi \,.\, aiR_0 \,.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass bei Schliessung der Kette der Strom im inducierten Kreise die entgegengesetzte Richtung hat, wie der Strom im inducierenden Kreise.

Alle diese elektromotorischen Kräfte sind nach dem allgemeinen Kraftmaasse der Mechanik ausgedrückt und können nach Art. 27 durch Multiplication mit $\frac{c}{4} = \frac{1}{a}$ auf das Art. 26 definierte absolute Maass zurückgeführt werden. Durch diese Reduction fällt der unbekannte Factor a in dem Ausdrucke jener Kräfte weg und der reducierte Werth kann durch Messung bestimmt werden. Uebrigens geben obige Ausdrücke die mittlere Stärke der elektromotorischen Kraft oder den Integralwerth derselben für die Zeiteinheit in allen denjenigen Versuchen, wo die Wirkung gleichförmig fortdauert. Für diejenigen Versuche dagegen, wo die Wirkung nur eine momentane ist, geben obige Ausdrücke den Integralwerth der elektromotorischen Kraft für die ganze Dauer der Wirkung. Bezeichnet T_0 im Allgemeinen die Zeit, für welche der gefundene Integralwerth der elektromotorischen Kraft gilt (wonach also in allen denjenigen Versuchen, wo die Wirkung gleichförmig fortdauert, $T_0 = 1$ zu setzen ist); so ergiebt sich die mittlere Stärke der elektromotorischen Kraft durch Division des gefundenen Integralwerths mit T_0 und kann also für (1), (2) und (3) dargestellt werden durch

$$\pm\, mn\pi \cdot \frac{R_0}{T_0} \cdot i\,,$$

wo m die Zahl der inducierten Kreise und n die Zahl der Umdrehungen bezeichnet. Dividiert man diese mittlere Stärke der elektromotorischen Kraft mit dem Widerstande der inducierten Kette, wie er nach dem Art. 26 definierten Maasse gefunden wird, so erhält man die mittlere Intensität des inducierten Stroms. Nun hat sich aber ergeben, dass der Widerstand nach dem angegebenen Maasse durch

$$p \cdot \frac{R'}{T'}$$

dargestellt werden kann, wo p eine reine Zahl ist, R' dagegen, gleich-

wie R_0, auf das gewählte Raummaass, T' gleichwie T_0 auf das gewählte Zeitmaass sich beziehen; folglich ergiebt sich für die mittlere Intensität des inducierten Stroms der Ausdruck

$$\pm \frac{mn\pi\pi}{p} \cdot \frac{R_0}{R} \cdot \frac{T'}{T_0} \cdot i\,,$$

wo $\frac{mn\pi\pi}{p} \cdot \frac{R_0}{R} \cdot \frac{T'}{T_0}$ eine aus den Messungen zu berechnende reine Zahl ist, welche das Verhältniss der Stärke des inducierten Stroms zum inducierenden angiebt. Es ist hierdurch die Möglichkeit gegeben, auch die Stärke des inducierten Stroms nach dem gegebenen Maasse vorauszusagen.

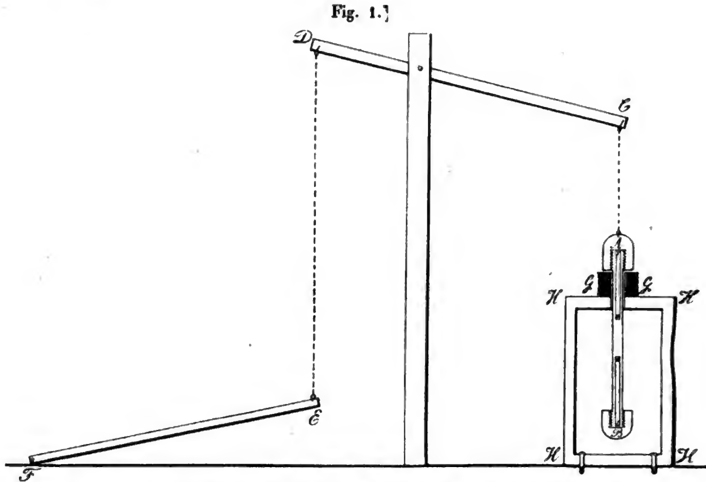
BEILAGEN.

A.

Beschreibung eines bei Widerstandsmessungen zu gebrauchenden magnetischen Inductors.

Bei den Versuchen zur Vergleichung des Widerstands zweier Leiter wurde ein magnetischer Inductor als Elektromotor gebraucht, welcher auf die folgende Weise eingerichtet war. Zwei cylindrische Magnetstäbe von 300 Millimeter Länge und 15 Millimeter Dicke wurden in einer hölzernen Röhre so befestigt, dass sie einander gleiche Pole (die Nordpole) zukehrten, die jedoch, damit sie einander bei dieser Lage nicht schwächten, durch einen 150 Millimeter weiten Zwischenraum von einander geschieden waren. Die hölzerne Röhre Fig. 1. *AB* sammt den eingeschlossenen Magneten *sn*, *sn* konnte durch einen mit dem Fusse in Bewegung zu setzenden Hebelapparat *CDEF* senkrecht gehoben und wieder gesenkt und durch die Höhle einer Inductorrolle *GG* hin- und hergeschoben werden, welche unbeweglich auf der obern Seite des am Fussboden angeschraubten Gestelles *HHHH* befestigt war. Fig. 1 stellt diesen Apparat in seinem Höhendurchschnitt dar (s. S. 336). Die Südpole der beiden Magnetstäbe sind mit *s*, die Nordpole mit *n* bezeichnet. Die Holzröhre, in welcher die beiden Magnetstäbe befestigt sind, ist an beiden Enden mit aufgeschraubten Deckeln verschlossen. Wird die Röhre in der Inductorrolle so weit abwärts geschoben, dass, wie in Fig. 1, der obere Deckel an die Inductorrolle *GG* anstösst, so befindet sich die Mitte des oberen Magnetstabs im Mittelpunkte der Inductorrolle; wird dagegen die Röhre so weit aufwärts geschoben, dass der untere Deckel an das Gestell *HH*, auf welcher die Inductorrolle *GG* befestigt ist, anstösst, so befindet sich die Mitte des unteren Magnetstabs im Mittelpunkte der Inductorrolle. In diesen beiden äussersten Lagen ist die Induction Null, weil die elektromotorischen Kräfte der zu beiden Seiten der Inductorrolle symmetrisch gelegenen Pole, wenn beide zugleich nach oben oder unten bewegt werden, sich aufheben. Während

Fig. 1.



der ganzen Schiebung der Röhre von unten nach oben geschieht die Induction in gleichem Sinne und ist am stärksten während des Durchgangs der beiden Nordenden der Magnetstäbe durch die Inductionsrolle. Während der ganzen Schiebung in der entgegengesetzten Richtung, von oben nach unten, geschieht die Induction im entgegengesetzten Sinne. Eine jede solche Bewegung heisst ein Inductionsstoss, und zwar ein positiver oder negativer, je nachdem die Schiebung aufwärts oder abwärts geschieht. — Dass jeder Inductionsstoss mit einer Lage beginnt und endigt, für welche die Induction Null ist, hat den Zweck, dass der ganze Werth der einem Inductionsstosse entsprechenden Induction ein Maximum sei und unverändert bleibe, auch wenn jene äussersten Lagen nicht ganz genau erreicht würden. Die einfache Schiebung, durch welche ein solcher ganzer Inductionsstoss bewerkstelligt wird, gestattet eine sehr rasche Ausführung und eignet sich daher besonders zu Messungen, wo die Inductionsstösse genau in den Augenblicken stattfinden sollen, in welchen die Galvanometernadel durch ihre Gleichgewichtslage geht. Um diese Augenblicke recht genau einhalten zu können, ist die Einrichtung getroffen, dass der positive Inductionsstoss, d. h.

die Schiebung von unten nach oben, durch Niedersetzen des Fusses auf dem Hebel *EF* bewerkstelligt wird, während der negative Inductionsstoss, d. h. die Schiebung von oben nach unten, durch das Gewicht des Inductors von selbst erfolgt, sobald der niedergesetzte Fuss wieder aufgehoben wird. Auf diese Weise kann der Beobachter, welcher den Gang der Galvanometernadel mit dem Fernrohre verfolgt, ohne das Fernrohr zu verlassen, den Inductionsstoss genau in dem Augenblicke geben, wo er die Nadel ihre Gleichgewichtslage passieren sieht.

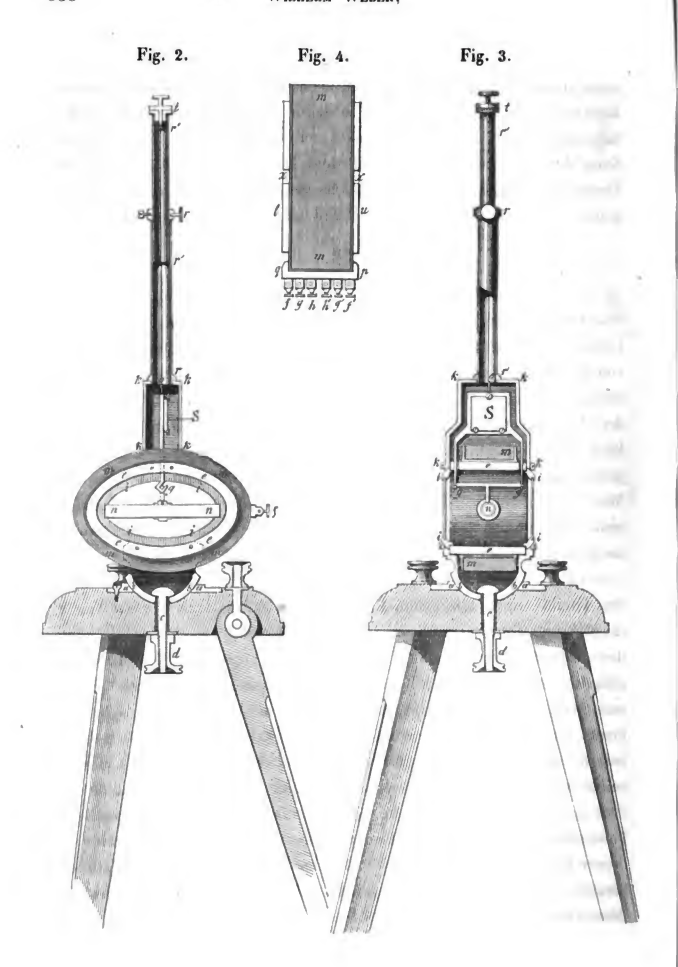
B.

Beschreibung des Galvanometers.

Die folgende Beschreibung ist vom Herrn Mechanicus Leyser in Leipzig, welcher schon mehrere solche Instrumente verfertigt hat und von welchem es zu dem unten bemerkten Preise zu erhalten ist. Es ist dieses Galvanometer zugleich auch dazu eingerichtet, dass die Stärke der damit beobachteten Ströme nach dem Art. 10 festgestellten absoluten Maasse bestimmt werden kann, wozu zwei an Maassstäben verschiebbare Multiplicatoren in verschiedenen Entfernungen von der Nadel gebraucht werden. Da diese Einrichtung mit dem Instrumente nicht nothwendig verbunden ist und hier nicht gebraucht wurde, so ist sie in der folgenden Beschreibung nicht weiter erwähnt worden.

»Die zugehörigen Zeichnungen stellen das Galvanometer im fünften Theile seiner wirklichen Lineargrösse dar, und zwar zeigt Fig. 2 (S. 338) das Galvanometer im Längendurchschnitte nach der Richtung des magnetischen Meridians; Fig. 3 (S. 338) zeigt dasselbe im Durchschnitte senkrecht auf der Richtung des magnetischen Meridians. Eisen und Stahl sind bis auf die Magnetnadel bei Anfertigung des Instruments sorgsam vermieden worden, so dass alle Theile desselben theils aus Kupfer, theils aus eisenfreiem Messing bestehen. — Das Gestell selbst, auf dem das Instrument steht, ist eine hölzerne Kreisscheibe mit drei nach Art der Dreifüsse bei Messinstrumenten befestigten und beweglichen Füssen, deren Enden in metallene Spitzen auslaufen. In dieser hölzernen Kreisscheibe ist zunächst eine metallene Kreisplatte *aa* eingelassen, deren durchbrochene Mitte kugelförmig ausgedreht ist, so dass eine passende Kugelfläche *bb* nach allen möglichen Richtungen sich einstellen und mittelst eines Bolzens *c* und einer Schraubenmutter *d* an der Kreisplatte *aa* feststellen lässt. Auf der erwähnten Kugelfläche *bb*

Fig. 2. Fig. 4. Fig. 3.



ist nun das eigentliche Galvanometer befestigt. Zu diesem Zwecke setzt sich diese Kugelfläche *bb* nach oben in zwei parallele Seitenplatten fort, die in Fig. 2 durch punktierte Linien angedeutet, in Fig. 3 dagegen deutlich zu sehen sind. Zwischen diesen Seitenplatten ist der kupferne Dämpfer *eeee* in Form eines oval gebogenen, in sich selbst zurückkehrenden Ringes von 80 Millimeter Breite und 8 Millimeter Stärke mit zwei Schrauben zu jeder Seite befestigt. Der Durchschnitt dieses kupfernen Dämpfers ist eine Ellipse, in deren grosser Axe die Magnetnadel *nn* schwebt. Ueber diesen Dämpfer lässt sich ein aus dünnem Messingblech angefertigter Rahmen seitwärts überschieben, der, mit aufrechtstehenden Wänden versehen, eine Quantität übersponnenen Kupferdrahts aufnimmt und somit über dem Dämpfer noch einen Multiplicator *mmmm* darstellt. Die Drahtwindungen dieses Multiplicators laufen ellipsenförmig um den Dämpfer herum, bestehen aus neun concentrischen Lagen über einander, jede Lage aus 80 neben einander gelegenen Umwindungen; der Draht hat gegen $\frac{2}{3}$ Millimeter Stärke. Hierbei ist die Einrichtung getroffen, den Multiplicator bald ganz, bald theilweise, in drei Abtheilungen zu drei Lagen, gebrauchen zu können. Auch lassen sich diese drei Abtheilungen so verbinden, dass sie gleichzeitig von demselben Strome durchlaufen werden, der sich zwischen ihnen theilt. Die Einrichtung, welche zu diesem Zwecke dem Multiplicator gegeben ist, wird durch Fig. 4 (S. 338) deutlich, welche den Multiplicator von oben herab gesehen darstellt; *qp* ist ein Querstäbchen von Buchsbaumholz, welches an den vorstehenden Wänden des Rahmens für den Multiplicator *mm* befestigt ist. Die erste Abtheilung des Multiplicators beginnt mit der ersten oder untersten Lage der Windungen, deren Anfang am Knöpfchen *f* ist; sie geht um den kupfernen Dämpfer herum nach dessen rechter Seite *u* und bildet so die erste Lage; dann wendet sie sich nach der linken Seite *l* und bildet auf diese Weise die zweite Lage; hierauf geht sie nochmals nach der rechten Seite *u*, und so entsteht die dritte Lage, deren Ende sich am Knöpfchen *f'* befindet. Ganz analog nun, wie diese erste Abtheilung des Multiplicators drei Lagen bildet und ihren Anfang in *f*, ihr Ende in *f'* hat, eben so hat die zweite und dritte Abtheilung jede drei Lagen; der Anfang der zweiten Abtheilung aber ist in *g*, ihr Ende in *g'*; der Anfang der dritten Abtheilung endlich ist in *h*, ihr Ende in *h'*. — Diese sechs Knöpfchen von Kupfer sind kreuzweise durchbohrt und mit Schräubchen fest, aber

isoliert von einander, in dem buchsbaumenen Querstäbchen *qp* eingesetzt. Bei dieser Anordnung des Multiplicators ersieht man leicht, dass sich die drei Abtheilungen, aus denen der Multiplicator besteht, auf verschiedene Weise, je nachdem die Knöpfchen durch Drähte verbunden werden, combinieren lassen. — Ueber dem Dämpfer *eeee*, und an ihm mit Schrauben befestigt, befindet sich ein Rähmchen *kkkk*, welches, indem die eine seiner offenen Seiten durch eine schwache Metallplatte, die andere durch ein Planglas mit parallelen Oberflächen verschlossen ist, einen viereckigen geschlossenen Raum darstellt. Darüber ist noch ein Rohr *rr* angebracht, welches durch ein stellbares graduiertes Auszugsrohr *r'r'* verlängert oder verkürzt werden kann. Dieses Auszugsrohr *r'r'* schliesst mit einem Torsionskreise *t*, dessen Construction unmittelbar aus den Figuren erhellt. Dieser Torsionskreis hat eine kleine Oese, in welcher der Coconfaden befestigt ist, der im Innern des vereinigten Rohres herabhängt und an einem Häkchen *o* eine viereckige leichte Metallplatte trägt, an der ein Planspiegel *s* mit drei Schräubchen befestigt ist. Diese viereckige Platte geht nach unten weiter und zwar durch zwei an dem Dämpfer *eeee* seitlich angebrachte Ausschnitte (Fig. 4 durch *xx* angedeutet), als zwei schwache Stäbchen, deren Enden als die Haken *gg* in den Figuren erscheinen. In diese Haken wird die Magnetnadel *nn* eingelegt, zu welchem Ende sie in der Mitte von einer schmalen Hülse umgeben und mit einem an dieser Hülse befestigten Querbälkchen versehen ist, dessen Enden walzenförmig auslaufen und in jenen Häkchen *gg* eingelegt werden. Die Lage der Nadel hinsichtlich ihrer Höhe wird durch das Auszugsrohr *r'r'* reguliert; durch Drehung des Torsionskreises *t* kann die Torsion des Fadens auf Null gebracht werden; mittelst der Kugelbewegung aber, welche die Kugelfläche *bb* mit der Platte *aa* zulässt, kann das ganze System des Instruments stets vertical eingestellt werden, welche Einstellung am leichtesten geschieht, wenn man das Auszugsrohr in der Nähe des Torsionskreises anfasst und bei sehr sanfter Anziehung der Schraube *d* die Einstellung vornimmt, die man dann bei erhaltener richtiger Lage des Instruments durch Anziehung der Schraube *d* feststellt. Die nach beiden Seiten noch offenen Durchsichten des Dämpfers *eeee* sind durch Einsetzen verglaster Holzrähmchen zu schliessen, deren Durchschnitt in *iiii* anschaulich gemacht ist. Der Preis des Instruments mit der Einrichtung zu absoluten Messungen ist 80 Thlr., ohne dieselbe 60 Thlr.»

C.

Uebersicht der Beobachtungsmethoden für galvanische Messungen mit Rücksicht auf den Einfluss der Dämpfung.

Bei den galvanischen Messungen wird gewöhnlich nur derjenige galvanische Strom in Rechnung gebracht, welcher, ausserhalb des Multiplicators erregt, durch denselben geleitet wird, um durch die der Nadel ertheilte Ablenkung gemessen zu werden. Ist dieser Strom constant und wird die Ablenkung der Nadel nicht eher gemessen, als bis sie zur Ruhe gekommen ist, so hängt die Ablenkung der Nadel wirklich bloss von diesem Strome ab; ist der Strom aber nicht constant, oder dauert er nur sehr kurze Zeit, und beobachtet man die Ablenkung, ehe die Nadel zur Ruhe gekommen ist, beobachtet man z. B. die erste Elongation der Nadel; so sind ausser dem zu messenden Strome noch andere Ströme vorhanden, die häufig einen grossen Einfluss auf die Beobachtungen haben, der nicht unbeachtet bleiben darf. Diese Ströme rühren von der Bewegung der Magnetnadel her, welche in allen sie umgebenden Leitern galvanische Ströme inducirt, deren Intensität dem Magnetismus der Nadel und der Geschwindigkeit proportional ist, mit welcher sie sich bewegt, und deren Richtung stets so beschaffen ist, dass durch ihre Rückwirkung auf die Nadel die vorhandene Bewegung derselben verlangsamt oder gedämpft wird.

Ein solcher Strom wird von der bewegten Magnetnadel erstens im Multiplicator selbst inducirt und ist desto stärker, je grösser der metallische Querschnitt des ganzen Multiplicators und je grösser der Theil ist, welchen der Widerstand des Multiplicators von dem Widerstande der ganzen Kette bildet: er ist am stärksten, wenn der Multiplicator in sich geschlossen wird, und ist am schwächsten, wenn die Kette des Multiplicators gelöst wird.

Ein solcher Strom wird zweitens von der bewegten Magnetnadel auch in allen Metalltheilen des Instruments erregt, und die Rückwirkung auf die Magnetnadel ist besonders stark, wenn verticale Platten in der Richtung des magnetischen Meridians nahe an der Nadel sich befinden, oder wenn die Nadel von einem verticalen Metallringe umgeben ist, weshalb ein solcher Ring, wenn er absichtlich zu diesem Zwecke ange-

bracht wird, ein Dämpfer heisst. Die Anwendung eines solchen Dämpfers gewährt bei den meisten Messungen nicht allein eine grosse Erleichterung, sondern gestattet oft auch eine grössere Präcision der Beobachtungen. Siehe die «Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837.» S. 18.

Es kommt nun darauf an, die Resultate der Beobachtungen von dem dämpfenden Einflusse dieser beiden Ströme unabhängig zu machen, oder die wegen der Dämpfung an den Beobachtungen anzubringende Correction zu bestimmen. Diese Correction wird besonders wichtig und bedeutend, wenn man sich zu galvanischen Messungen entweder eines mit Dämpfer versehenen Magnetometers oder einer astatischen Doppelnadel bedient, die aus zwei stärkeren Magnetnadeln zusammengesetzt ist, und entweder ebenfalls mit Dämpfer versehen, oder von einem starken Multiplicator eng umschlossen ist. Besonders im letzteren Falle, wo die Dämpfung vom Multiplicator herrührt und sehr verschieden sein kann bei verschiedener Schliessung des Multiplicators, ist eine solche Correction nothwendig, um die Versuche unter einander vergleichbar zu machen.

Zur Bestimmung dieser Correction soll erstens die Dämpfungskraft des Instruments näher bestimmt werden, was durch die Beobachtung der Abnahme der Schwingungsbogen leicht geschehen kann. Sodann soll zweitens gezeigt werden, wie der Einfluss dieser Dämpfungskraft bei den verschiedenen Beobachtungsmethoden in der Berechnung der Resultate bestimmt oder eliminiert wird.

1. Bestimmung der Dämpfungskraft eines Galvanometers.

Die Dämpfungskraft eines Galvanometers zerfällt in zwei Theile, welche von einander getrennt werden müssen, nämlich in einen constanten, von der Kette, zu welcher der Multiplicator gehört, unabhängigen Theil, und in einen variabelen.

Den constanten Theil der Dämpfungskraft erhält man durch Beobachtung der Abnahme der Schwingungsbogen, während die Kette, zu welcher der Multiplicator gehört, gelöst ist. Die Schwingungsbogen bilden bekanntlich, wenn sie nicht sehr gross sind, eine abnehmende geometrische Reihe, welche dargestellt werden kann durch Ae^0; $Ae^{-\lambda'}$; $Ae^{-2\lambda'}$ .... $Ae^{-n\lambda'}$, wo n die Zahl der Schwingungen be-

zeichnet, welche die Nadel, von dem Augenblicke, wo der Bogen $= A$ war, an gerechnet, gemacht hat. Während der Dauer einer Schwingung nimmt also der Bogen in dem Verhältnisse

$$e^{\lambda'} : 1\,,$$

während der Dauer zweier Schwingungen in dem Verhältnisse

$$e^{2\lambda'} : 1\,,$$

während der Dauer von n Schwingungen in dem Verhältnisse

$$e^{n\lambda'} : 1$$

ab. Nimmt man hiernach den Exponenten λ' als Maass der Dämpfung während der Dauer einer Schwingung, oder während τ' Secunden, wenn τ' die Schwingungsdauer der Nadel in Secunden ausdrückt, so ist $2\lambda'$ das Maass der Dämpfung für $2\tau'$ Secunden, und $n\lambda'$ ist das Maass für $n\tau'$ Secunden. Das Verhältniss der so bestimmten Dämpfungskräfte zu den Zeiträumen, auf welche sie sich beziehen, giebt dann endlich die Constante $\frac{\lambda'}{\tau'} = \frac{2\lambda'}{2\tau'} = \frac{n\lambda'}{n\tau'}$, welche das auf die Zeiteinheit reducierte Maass der Dämpfung ausdrückt. λ' ist aber nichts Anderes als der natürliche Logarithmus des Verhältnisses zweier auf einander folgender Schwingungsbogen, und τ' ist die Schwingungsdauer der Nadel unter dem Einflusse der Dämpfung; man erhält also das auf die Zeiteinheit reducierte Maass der Dämpfung, wenn man jenen Logarithmus mit dieser Schwingungsdauer, die sich beide aus den Beobachtungen leicht bestimmen lassen, dividiert.

Zur Bestimmung des variabelen Theils der Dämpfungskraft wird die Abnahme der Schwingungsbogen beobachtet, während der Multiplicator in sich selbst geschlossen ist. Ist $e^{\lambda''} : 1$ das durch die Beobachtung gefundene Verhältniss zweier auf einander folgender Schwingungsbogen und τ'' die Schwingungsdauer, so ist das Maass der Dämpfung für die Zeiteinheit

$$= \frac{\lambda''}{\tau''}\,.$$

Die Dämpfungskraft des in sich selbst geschlossenen Multiplicators für sich ergiebt sich hieraus

$$= \frac{\lambda''}{\tau''} - \frac{\lambda'}{\tau'}\,.$$

In den meisten Fällen ist der Unterschied der Schwingungsdauer τ'' von τ' unmerklich und es wird dann das Maass der Dämpfung des in sich selbst geschlossenen Multiplicators

$$= \frac{1}{\tau'}\,(\lambda'' - \lambda')\,.$$

Hieraus bestimmt sich nun der *variabele* Theil der Dämpfung, wenn man den Bruchtheil kennt, welchen der Widerstand des Multiplicators von dem der ganzen Kette bildet. Bezeichnet a den Widerstand des Multiplicators, $a + b$ den Widerstand der ganzen Kette, so ist der gesuchte *Werth des variabelen Theils der Dämpfung*

$$= \frac{a}{a+b}\left(\frac{\lambda''}{\tau''} - \frac{\lambda'}{\tau'}\right),$$

worin bloss b veränderlich ist und für jeden einzelnen Fall besonders bestimmt werden muss. Fügt man hierzu das Maass des constanten Theils der Dämpfung $= \frac{\lambda'}{\tau'}$, so giebt die Summe den *Werth der wirklichen Dämpfung* $= \frac{\lambda}{\tau}$

$$\frac{\lambda}{\tau} = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{\lambda''}{\tau''} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{\lambda'}{\tau'},$$

wo für den betreffenden Fall λ den natürlichen Logarithmus des Verhältnisses zweier auf einander folgender Schwingungsbogen, τ die Schwingungsdauer bezeichnet.

2. Berechnung der galvanischen Messungen mit Rücksicht auf Dämpfung.

Hat man auf diese Weise die Dämpfungskraft des Instruments bestimmt, so lässt sich diese Bestimmung benutzen, um bei den verschiedenen Beobachtungsmethoden in der Berechnung der Resultate den Einfluss der Dämpfung zu eliminieren, wobei die Anweisung zu benutzen ist, welche *Gauss* in den «*Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*» S. 58 ff. zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel gegeben hat, in welcher man die Gesetze entwickelt findet, nach denen die Dämpfung auf den Stand und die Schwingungsdauer der Nadel wirkt. Es sollen hier die verschiedenen Beobachtungsmethoden einzeln, bei allen aber nur kleine Schwingungen der Nadel, betrachtet werden.

Beobachtungen der ersten Elongation.

1. Beobachtet man bei galvanischen Messungen bloss die *erste Elongation*, welche die Magnetnadel nach dem Eintritt eines *constanten* Stroms macht, so ist bekanntlich diese Elongation, wenn *keine Dämpfung* stattfindet, das Doppelte derjenigen Ablenkung der

Nadel, bei welcher sie unter der Einwirkung jenes Stroms im Gleichgewicht beharren würde; findet dagegen Dämpfung Statt, so wird die dem Gleichgewicht der Nadel entsprechende Ablenkung E aus der beobachteten ersten Elongation x der Nadel auf folgende Weise bestimmt:

$$E = \frac{x}{1 + e^{-\lambda}} \text{ *)},$$

wofür bei kleinen Werthen von λ gesetzt werden kann:

$$E = \tfrac{1}{2}\, x + \tfrac{1}{4}\, \lambda x\,.$$

2. Beobachtet man bei galvanischen Messungen die erste Elongation, nachdem die ruhende Nadel durch einen momentanen Strom (durch einen Inductionsstoss) in Bewegung gesetzt worden, so kommt es wesentlich darauf an, aus der beobachteten Elongation der Nadel $= x$ die Geschwindigkeit herzuleiten, welche jener momen-

---

*) Für den Stand der schwingenden Nadel $= x$ am Ende der Zeit $= t$ hat man ohne Dämpfung den Ausdruck:

$$x = p + A \sin \frac{\pi}{T}(t - B),$$

wo T die Schwingungsdauer bezeichnet; mit Dämpfung dagegen

$$x = p + Ae^{-\frac{\lambda}{\tau} t} . \sin \frac{\pi}{\tau}(t - B),$$

wo τ die Schwingungsdauer der Nadel unter dem Einflusse der Dämpfung ausdrückt und durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$\frac{\pi\pi}{\tau\tau} = \frac{\pi\pi}{TT} - \frac{\lambda\lambda}{\tau\tau}\,.$$

Siehe «Resultate» 1837. S. 74. 75, wo ε dasselbe bezeichnet, was hier $\frac{\lambda}{\tau}$ und T' dasselbe, was hier τ. Wird nun zum Anfangspunkt der Zeit t derjenige Augenblick gewählt, wo der constante Strom die Nadel zu bewegen beginnt, wo also die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = 0$ und hieraus tang $\left(-\frac{\pi}{\tau} B\right) = \frac{\pi}{\lambda}$ folglich: $-B = \frac{\tau}{\pi}$ arc tang $\frac{\pi}{\lambda}$ $= \frac{1}{2}\tau - \frac{\tau}{\pi}$ arc tang $\frac{\lambda}{\pi}$; und wird ferner der bisherige Stand der Nadel zum Anfangspunkt der Elongation x genommen, also $x = 0$ für $t = 0$, so erhält obige Gleichung folgende Form:

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} + Ae^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \cos\left(\frac{\pi}{\tau} t - \text{arc tang}\, \frac{\lambda}{\pi}\right)$$

wo $-\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} = E$ den neuen Ruhestand der Nadel unter dem Einflusse des constanten Stroms bezeichnet; folglich für den Augenblick der ersten Elongation $t = \tau$, mit Rücksicht auf $\cos\left(\pi - \text{arc tang}\, \frac{\lambda}{\pi}\right) = -\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} \cdot \left(1 + e^{-\lambda}\right) = E\left(1 + e^{-\lambda}\right)$$

folglich

$$E = \frac{x}{1 + e^{-\lambda}}\,.$$

tane Strom der Nadel ertheilt hatte. Diese Geschwindigkeit C ergiebt sich aus folgender Gleichung:

$$C = x \cdot \frac{\pi}{T} \cdot e^{\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}} \text{ *)},$$

wo T die Schwingungsdauer der Nadel bezeichnet, wenn keine Dämpfung stattfindet. Für kleine Werthe von λ kann man setzen

$$C = \frac{\pi}{T}\, x + \frac{1}{2}\, \frac{\pi}{T}\, \lambda x\,.$$

Methode der Multiplication.

1. Beobachtet man, wegen der Schwäche des zu messenden *constanten* Stroms, nicht bloss die erste Elongation, sondern lässt man die Nadel hin- und herschwingen, indem man am Ende jeder Schwingung die Richtung des Stroms im Multiplicator wechselt, und beobachtet dann die wachsende Grösse der auf einander folgenden Schwingungsbogen, welche mit x_1, x_2, x_3 . . . bezeichnet werden, so ergiebt sich hieraus die dem Gleichgewicht der Nadel entsprechende Ablenkung E aus folgenden Gleichungen:

---

*) Durch Differentiation der Gleichung in der vorhergehenden Note: $x = p + Ae^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \sin \frac{\pi}{\tau}(t - B)$ erhält man:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\lambda}{\tau} Ae^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \sin \frac{\pi}{\tau}(t - B) + \frac{\pi}{\tau} Ae^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \cos \frac{\pi}{\tau}(t - B)\,.$$

Rechnet man nun die Zeit t von demjenigen Augenblicke an, wo der momentane Strom auf die Nadel wirkt und ihr die Geschwindigkeit $= C$ ertheilt, so ist $B = 0$ und $\frac{dx}{dt} = C$ für $t = 0$; folglich $\frac{\pi}{\tau} A = C$ oder $A = \frac{\tau}{\pi} C$. Setzt man nun zur Vereinfachung den ursprünglichen Stand der Nadel $p = 0$, so erhält man

$$x = \frac{\tau}{\pi} Ce^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \sin \frac{\pi}{\tau} t\,,$$

folglich für das Ende der ersten Elongation, für welches $\frac{dx}{dt} = 0$ und also $\text{tang } \frac{\pi}{\tau} t = \frac{\pi}{\lambda}$, $t = \frac{\tau}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}$, $\sin \frac{\pi}{\tau} t = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$,

$$x = C \cdot \frac{\tau}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}}\,.$$

Nun ist aber $\frac{\tau}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} = \frac{T}{\pi}$, wie sich aus der oben angeführten Gleichung $\frac{\pi\pi}{\tau\tau} = \frac{\pi\pi}{TT} - \frac{\lambda\lambda}{\tau\tau}$ ergiebt, folglich ist

$$x = C \cdot \frac{T}{\pi}\, e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}} \text{ oder } C = x\, \frac{\pi}{T}\, e^{\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}}\,.$$

$$-\frac{x_1}{E} = 1 + e^{-\lambda}$$

$$+\frac{x_2}{E} = 2 + 3\,e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}$$

$$-\frac{x_3}{E} = 2 + 4\,e^{-\lambda} + 3\,e^{-2\lambda} + e^{-3\lambda}$$

$$+\frac{x_4}{E} = 2 + 4\,e^{-\lambda} + 4\,e^{-2\lambda} + 3\,e^{-3\lambda} + e^{-4\lambda}\,.\text{*)}$$

Je grösser λ ist, desto schneller nähert sich $\frac{x}{E}$ einem Grenzwerthe, für welchen man folgenden Ausdruck erhält:

$$\pm\frac{x}{E} = \frac{4}{1 - e^{-\lambda}} - 2;$$

folglich findet man, wenn man die Versuche so lange fortsetzt, bis die Schwingungsbogen zu wachsen aufhören, die dem Gleichgewicht der Nadel entsprechende Ablenkung E aus den übereinstimmenden Wer-

---

*) Es gilt hier bis zum Ende der ersten Elongation dieselbe Gleichung, wie in der Note S. 345, nämlich:

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} + Ae^{-\frac{\lambda}{\tau}t}\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t - \text{arc tang}\,\frac{\lambda}{\pi}\right),$$

also im Augenblicke der ersten Elongation für $t = \tau$, $x = -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}}\left(1 + e^{-\lambda}\right)$. In diesem Augenblicke, wo die erste Schwingung endigt und die zweite beginnt, wird der Strom im Multiplicator gewechselt, wodurch der bisherige Ruhestand der Nadel $-\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}}$ in $+\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}}$ verwandelt wird; die Ablenkung der Nadel von ihrem Ruhestande, welche am Ende der ersten Schwingung $x + \frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} = -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}}\cdot e^{-\lambda}$ war, verwandelt sich dadurch in $= -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}}(2 + e^{-\lambda})$, woraus sich für die Dauer der zweiten Schwingung, von $t = \tau$ bis $t = 2\tau$,

$$x = +\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} + A(2 + e^{-\lambda})\,e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t-\tau)}\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t - \text{arc tang}\,\frac{\lambda}{\pi}\right)$$

ergiebt, also am Ende der zweiten Elongation, für $t = 2\tau$,

$$x = +\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}}(1 + 2\,.\,e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}).$$

Eben so erhält man für die Dauer der dritten Schwingung von $t = 2\tau$ bis $t = 3\tau$,

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} + A(2 + 2e^{-\lambda} + e^{-2\lambda})\,e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t-2\tau)}\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t - \text{arc tang}\,\frac{\lambda}{\pi}\right)$$

also am Ende der dritten Elongation, für $t = 3\tau$,

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}}(1 + 2\,e^{-\lambda} + 2\,e^{-2\lambda} + e^{-3\lambda})$$

u. s. w. Schreibt man die gefundenen Werthe von x für $t = 0$, $t = \tau$, $t = 2\tau$, $t = 3\tau$ u. s. w. unter einander

$$0$$

$$-\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}}\left(1 + e^{-\lambda}\right)$$

$$+\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}}\left(1 + 2e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}\right)$$

$$-\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}}\left(1 + 2e^{-\lambda} + 2e^{-2\lambda} + e^{-3\lambda}\right)$$

so geben die Unterschiede zweier auf einander folgender Werthe von x, der Reihe nach, die gesuchten Schwingungsbogen x_1, x_2, x_3, worin $\frac{\pi A}{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}} = E$ zu setzen ist.

then x der letzten Schwingungsbogen auf folgende Weise:

$$E = \frac{x}{2} \cdot \frac{1 - e^{-\lambda}}{1 + e^{-\lambda}} .$$

2. Beobachtet man, wegen der Schwäche des zu messenden momentanen Stroms, nicht bloss die erste Elongation, nachdem die ruhende Nadel in Bewegung gesetzt worden ist, sondern lässt man die Nadel mehrmals hin- und herschwingen, indem man jedes Mal in dem nächsten Augenblicke, wo die Nadel wieder ihre ursprüngliche Stellung passiert, denselben momentanen Strom zur Beschleunigung der Nadel in verkehrter Richtung durch den Multiplicator gehen lässt, und beobachtet dann die wachsende Grösse der Schwingungsbogen, welche der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3 . . . bezeichnet werden, so ergiebt sich hieraus die Geschwindigkeit C, welche jener momentane Strom der Nadel jedesmal ertheilt, auf folgende Weise. Setzt man

$$B = C \cdot \frac{T}{\pi} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}}, \text{ so ist:}$$

$$+ \frac{x_1}{B} = 1$$

$$- \frac{x_2}{B} = 2 + e^{-\lambda}$$

$$+ \frac{x_3}{B} = 2 + 2e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} . *)$$

---

*) Für die erste Schwingungsdauer von $t = 0$ bis $t = \tau$ gilt dieselbe Gleichung, wie in der Note S. 346, nämlich:

$$x = \frac{\tau}{\pi} \cdot C e^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \sin \frac{\pi}{\tau} t ,$$

folglich für den Augenblick der ersten Elongation, für welchen $t = \frac{\tau}{\pi}$ arc tang $\frac{\pi}{\lambda}$, $\sin \frac{\pi}{\tau} t = \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi})}} = \frac{T}{\tau}$ war, $x = \frac{T}{\pi} \cdot C e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}}$. Für das Ende der Schwingungsdauer, wo $t = \tau$ ist, ergiebt sich $\frac{dx}{dt} = - C e^{-\lambda}$. In diesem Augenblicke nun wird die Geschwindigkeit der Nadel durch den erneuten momentanen Strom um $-C$ geändert, d. i. sie wird verwandelt in $-C(1 + e^{-\lambda})$, woraus sich nun für die zweite Schwingungsdauer, von $t = \tau$ bis $t = 2\tau$, ergiebt:

$$x = \frac{\tau}{\pi} \cdot C\left(1 + e^{-\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t - \tau)} \cdot \sin \frac{\pi}{\tau} t ,$$

folglich für den Augenblick der zweiten Elongation, für welchen $t = \tau + \frac{\tau}{\pi}$ arc tang $\frac{\pi}{\lambda}$, $\sin \frac{\pi}{\tau} t = - \frac{T}{\tau}$ ist, $x = - \frac{T}{\pi} C\left(1 + e^{-\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}}$.

Auch hier nähert sich $\frac{x}{B}$ desto schneller einem Grenzwerthe, je grösser λ ist, und es ergiebt sich für diesen Grenzwerth:

$$\frac{x}{B} = \frac{2}{1 - e^{-\lambda}};$$

folglich findet man, wenn man diese Versuche so lange fortsetzt, bis die Schwingungsbogen zu wachsen aufhören, die Geschwindigkeit C, welche der zu messende momentane Strom der Nadel jedesmal ertheilt, aus den übereinstimmenden Werthen x der zuletzt beobachteten Schwingungsbogen auf folgende Weise:

$$C = \frac{x}{2} \cdot \frac{\pi}{T} (1 - e^{-\lambda})\, e^{\frac{\lambda}{\pi} \text{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}}.$$

Methode der Zurückwerfung.

Es gehört hieher endlich noch die Anwendung auf die von Gauss angegebene Beobachtungsmethode, welche in den «Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im J. 1838» S. 98 ff. beschrieben worden ist, welche auch darum von besonderer Wichtigkeit ist, weil sie eine scharfe und bequeme Methode an die Hand giebt, die Dämpfung zu messen, wenn sie stark ist, während die oben angeführte, auf der Beobachtung der Abnahme der Schwingungsbogen begründete Methode bloss bei schwächerer Dämpfung zu empfehlen ist. Die genannte Messungsmethode eignet sich besonders dann, wenn man sich eines Galvanometers bedient, des-

---

Ebenso findet man für die dritte Schwingungsdauer von $t = 2\tau$ bis $t = 3\tau$,

$$x = \frac{\tau}{\pi} \cdot C\left(1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t - 2\tau)} . \sin \frac{\pi}{\tau} t,$$

u. hieraus für den Augenblick der dritten Elongation, für welchen $t = 2\tau + \frac{\tau}{\pi} \text{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}$, $\sin \frac{\pi}{\tau} t = + \frac{T}{\tau}$ ist, $x = + \frac{T}{\pi} \cdot C\left(1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}}$, u. s. w. Schreibt man die gefundenen Werthe von x für $t = 0$, $t = \frac{\tau}{\pi} \text{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}$, $t = \tau + \frac{\tau}{\pi} \text{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}$, $t = 2\tau + \frac{\tau}{\pi} \text{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}$ u. s. w. unter einander, indem man Kürze halber B statt $\frac{T}{\pi} Ce^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}}$ setzt, nämlich:

$$\begin{array}{l} \quad 0 \\ + B \\ - B(1 + e^{-\lambda}) \\ + B(1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}) \\ \quad \vdots \end{array}$$

so geben die Unterschiede je zweier auf einander folgender Werthe der Reihe nach die gesuchten Schwingungsbogen x_1, x_2, x_3 u. s. w.

sen Magnetnadel eine grosse Schwingungsdauer hat und nie mehr als wenige Grade von ihrem normalen Stande abgelenkt wird, wie dies bei einem mit Multiplicator versehenen Magnetometer der Fall ist. — Ist das Instrument mit keinem Dämpfer versehen, so wird der Einfluss der dennoch vorhandenen schwachen, vom Multiplicator herrührenden, Dämpfung mit andern Einflüssen durch die für diese Methode eigenthümliche Combination der Beobachtungen aus den Resultaten eliminiert; bei stärkerer Dämpfung dagegen bleibt zwar die Beobachtungsmethode wesentlich dieselbe, aber die Berechnung der Resultate aus den Beobachtungen muss eine Modification erleiden, wenn diese Resultate ganz übereinstimmen sollen mit denen, welche ohne Dämpfung erhalten worden wären.

Es besteht nun diese Methode wesentlich darin, dass man durch einen momentanen Strom die Nadel plötzlich in Bewegung setzt und ihre erste Elongation beobachtet, darauf in dem Augenblicke, wo die Nadel zum ersten Male wieder ihren ursprünglichen Stand passiert, wieder einen momentanen Strom auf sie wirken lässt, der aber, gleich allen folgenden, doppelt so stark ist, wie der erste. Dieser zweite Strom soll dieselbe Richtung wie der erste haben; alsdann wird die Nadel durch ihn in ihrer Bewegung nicht allein plötzlich gehemmt werden, sondern sogar eine Geschwindigkeit nach derselben Seite erhalten, von welcher sie herkommt. Man beobachtet sodann wieder die erste Elongation, welche die Nadel hierauf macht, die, ohne Dämpfung, der vorigen nahe gleich ist, und lässt die Nadel auf die andere Seite ihrer Ruhelage hinüberschwingen, und beobachtet hier auch noch die zweite Elongation. Erst wenn die Nadel von dieser andern Seite her ihre Ruhelage wieder passiert, lässt man einen momentanen Strom in entgegengesetzter Richtung, als das zweite Mal, wirken und wirft sie dadurch nach derselben Seite zurück, woher sie kommt, und beobachtet die erste und zweite darauf folgende Elongation, worauf man, sobald die Nadel wieder ihre Ruhelage passiert, den momentanen Strom in entgegengesetzter Richtung, wie das vorige Mal, wirken lässt, u. s. w. Die so beobachteten Elongationen ordnen sich nach Paaren abwechselnd positiver und negativer Elongationen, aus denen die Mittel genommen werden, wenn sie wenig von einander verschieden sind, wie dies bei geringer Dämpfung der Fall ist. Die Unterschiede dieser auf einander folgenden positiven und negativen Mittelwerthe werden

nahe gleich gefunden und geben ein Maass für die Intensität des momentanen Stroms, welcher gemessen werden soll.

Hierbei wurde vorausgesetzt, dass nur eine geringe Dämpfung stattfände. Es lässt sich aber dieselbe Methode auch bei starker Dämpfung anwenden und es lässt sich dann sogar noch eine grössere Genauigkeit erreichen; es erleidet aber dann die Ableitung der Resultate aus den Beobachtungen eine wesentliche Modification.

Zunächst möge bemerkt werden, dass bei einer starken Dämpfung der erste momentane Strom nicht genau mehr die Hälfte des folgenden sein soll, sondern, wenn m das Verhältniss zweier auf einander folgender Schwingungsbogen bezeichnet, so soll der erste Strom der $\left(m + \frac{1}{m}\right)^{\text{te}}$ Theil des folgenden sein. Wenn aber auch dieses Verhältniss nicht genau eingehalten wird, so leiden darunter die Beobachtungen nicht wesentlich, sondern man braucht nur die ersten Beobachtungen von der Berechnung der Resultate auszuschliessen, weil bei den folgenden Beobachtungen der Einfluss jener anfänglichen Unregelmässigkeit durch die Dämpfung selbst sehr schnell verschwindet. Man sieht dann, dass die correspondierenden Beobachtungen (nämlich die 1ste, 5te, 9te u. s. w., oder die 2te, 6te, 10te u. s. w., oder die 3te, 7te, 11te u. s. w., oder die 4te, 8te, 12te u. s. w.) sich sehr schnell 4 Grenzwerthen nähern. Bezeichnet man sodann den Unterschied des ersten und dritten Grenzwerthes mit b, den Unterschied des zweiten und vierten mit a; so ist das Verhältniss von $a : b$ dem Verhältnisse zweier auf einander folgender Schwingungsbogen gleich, folglich:

$$\lambda = \log \text{nat} \frac{a}{b} .$$

Ferner ist die Geschwindigkeit c, welche der Nadel von jedem momentanen Strome, mit Ausnahme des ersten, ertheilt wird,

$$c = \frac{\pi}{2T} \frac{aa + bb}{\sqrt{ab}} \cdot e^{\frac{\lambda}{\pi} \text{arc tang} \frac{\lambda}{\pi}} ,$$

wofür, wenn a und b wenig verschieden sind, d. h. bei geringerer Dämpfung,

$$c = \frac{\pi}{2T} \cdot \frac{aa + bb}{\sqrt{ab}}$$

und bei noch kleinerer Dämpfung

$$c = \frac{\pi}{2T} (a + b)$$

gesetzt werden kann. Der Beweis ergiebt sich ähnlich wie bei den

früheren Regeln. Rechnet man nämlich die Zeit t von dem Augenblicke an, wo der momentane Strom die Nadel nach der Seite der positiven Elongation zurückgeworfen hat, so ist x für die Dauer der beiden folgenden ungestörten Schwingungen

$$x = Ae^{-\frac{\lambda}{\tau}t} \sin \frac{\pi}{\tau} t .$$

Für die beiden beobachteten Elongationen x' und x'' ist $\frac{dx}{dt} = 0$ oder

$$0 = - \frac{\lambda}{\tau} Ae^{-\frac{\lambda}{\tau}t} \sin \frac{\pi}{\tau} t + \frac{\pi}{\tau} Ae^{-\frac{\lambda}{\tau}t} \cos \frac{\pi}{\tau} t$$

folglich für den ersten Beobachtungsmoment

$$t = \frac{\tau}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}$$

für den zweiten

$$t = \tau + \frac{\tau}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda} .$$

Substituiert man diese Werthe für t in der Gleichung für x, so erhält man

$$x' = + \frac{Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi})}}$$

$$x'' = - \frac{Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \left(\frac{\pi}{\lambda}\right) - \lambda}}{\sqrt{(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi})}}$$

Nach Verlauf der Zeit $t = 2\tau$ wird die Schwingung der Nadel durch Einwirkung des Stroms wieder geändert, nämlich es wird zur Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{\tau} Ae^{-2\lambda}$$

welche sie am Ende der Zeit $t = 2\tau$ haben würde, die Geschwindigkeit $-c$ hinzugefügt, woraus sich für die Dauer der folgenden beiden Schwingungen

$$x = \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c\right) e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t - 2\tau)} \sin \frac{\pi}{\tau} t$$

ergiebt. Für die beiden während dieses Zeitraums von $t = 2\tau$ bis $t = 4\tau$ beobachteten Elongationen x''' und x'''' ist $\frac{dx}{dt} = 0$ oder

$$0 = - \frac{\lambda}{\tau}\left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c\right) e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t - 2\tau)} \sin \frac{\pi}{\tau} t$$
$$+ \frac{\pi}{\tau}\left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c\right) e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t - 2\tau)} \cos \frac{\pi}{\tau} t$$

folglich für den ersten Beobachtungsmoment

$$t = 2\tau + \frac{\tau}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}$$

für den zweiten

$$t = 3\tau + \frac{\tau}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}\,.$$

Substituiert man diese Werthe für t in der neuen Gleichung für x, so erhält man

$$x''' = + \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi}\, c\right) \frac{e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$$

$$x'''' = - \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi}\, c\right) \frac{e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \left(\frac{\pi}{\lambda}\right) - \lambda}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$$

Nach Verlauf der Zeit $t = 4\tau$ wird die Schwingung der Nadel durch erneuerte Einwirkung des momentanen Stroms wieder geändert, nämlich es wird zur Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{\tau}\left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi}\, c\right) e^{-2\lambda}\,,$$

welche sie am Ende der Zeit $t = 4\tau$ haben würde, die Geschwindigkeit $+c$ hinzugefügt und dadurch bewirkt, dass die Nadel von nun an dieselbe Bewegung wieder erhält, als von Anfang für $t = 0$. Nun war aber die Geschwindigkeit für $t = 0$

$$= \frac{\pi}{\tau} A$$

also

$$\frac{\pi}{\tau} A = c + \frac{\pi}{\tau}\left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi}\, c\right) e^{-2\lambda},$$

woraus

$$c = \frac{\pi}{\tau} A\left(1 + e^{-2\lambda}\right)$$

folgt. Substituiert man diesen Werth in obigen Ausdrücken für x''' und x'''', so findet man $x''' = -x'$, $x'''' = -x''$, folglich

$$a = x' - x''' = \frac{2Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$$

$$b = x'''' - x'' = \frac{2Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \left(\frac{\pi}{\lambda}\right) - \lambda}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}$$

folglich:

$$\frac{aa + bb}{\sqrt{ab}} = \frac{2Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}} \cdot \frac{1 + e^{-2\lambda}}{e^{-\frac{1}{2}\lambda}} = \frac{2Ae^{\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\lambda}{\pi}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}} \cdot \left(1 + e^{-2\lambda}\right)$$

woraus sich ergiebt

$$c = \frac{\pi}{2\tau} \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}\, \frac{aa + bb}{\sqrt{ab}}\, e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{ arc tang } \frac{\lambda}{\pi}}\,.$$

Nun ist oben S. 345 in der Note die Gleichung angeführt worden:

$$\frac{\pi\pi}{\tau\tau} = \frac{\pi\pi}{TT} - \frac{\lambda\lambda}{\tau\tau};$$

wonach folglich

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\tau}\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}$$

und

$$c = \frac{1}{2}\frac{\pi}{T} \cdot \frac{aa + bb}{\sqrt{ab}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{\lambda}{\pi}}.$$

Zugleich ersieht man, dass

$$\frac{a}{b} = e^{\lambda} \text{ oder } \lambda = \log \mathrm{nat}\, \frac{a}{b},$$

woraus hervorgeht, dass man durch Messung von *a* und *b* zugleich eine genaue Bestimmung des auf die Schwingungsdauer reducierten Maasses der Dämpfung erhält, was besonders dann von Nutzen ist, wenn wegen zu schneller Abnahme der Schwingungsbogen aus Beobachtungen der letzteren keine genaue Bestimmung erhalten werden kann.

Zur Erläuterung der zuletzt entwickelten Beobachtungsmethode mögen diejenigen Beobachtungen dienen, welche zur Vergleichung der Widerstände zweier Copien des Jacobi'schen Grundmaasses nach dieser Methode gemacht und S. 251 schon erwähnt worden sind. Die erste Copie bestand aus einem nicht gefirnissten Drahte, welcher auf einem nicht gefirnissten Serpentincylinder aufgewunden war, während die zweite Copie aus einem gefirnissten Drahte bestand, welcher auf einer gefirnissten Glasröhre aufgewunden war. Die Versuche zerfallen in fünf Reihen. Bei allen waren die Enden des Inductordrahts mit den Enden des Multiplicatordrahts auf dieselbe Weise verbunden. In der ersten Reihe wurden die Drähte der beiden Copien und der Inductor- und Multiplicatordraht auf die S. 204 unter (8) beschriebene, mit *D* bezeichnete Weise combiniert; in der zweiten Reihe auf die unter (7) beschriebene, mit *B* bezeichnete Weise; in der dritten Reihe auf die unter (6) beschriebene, mit *A* bezeichnete Weise, wobei die erste Copie die Stelle des Grundmaasses vertrat; die vierte Reihe war die Wiederholung der zweiten; in der fünften endlich wurden die Drähte auf die unter (9) beschriebene, mit *C* bezeichnete Weise combiniert. Die Versuche wurden begonnen, wenn die Galvanometernadel in Ruhe war. Der erste positive Inductionsstoss setzte die Nadel in Schwingung: die erste positive Elongation wurde nicht beobachtet, und eben so wurde auch die zweite negative Elongation nicht beobachtet

In dem Augenblicke, wo die Nadel nach dieser zweiten Elongation in positiver Richtung zu der Stelle gelangte, welche dem Ruhestande entsprach, erfolgte der zweite negative Inductionsstoss, welcher die Nadel nicht allein mitten in ihrer positiven Bewegung hemmte, sondern sie sogar nach derselben Seite zurückwarf, von welcher sie gekommen war. Die darauf folgende dritte Elongation war daher wiederum eine negative und wurde, sowie auch die vierte positive Elongation, noch nicht beobachtet. In dem Augenblicke, wo die Nadel nach dieser vierten Elongation in negativer Richtung zu der ihrem Ruhestande entsprechenden Stelle gelangte, erfolgte der dritte positive Inductionsstoss, welcher die Nadel nicht allein mitten in ihrer negativen Bewegung hemmte, sondern sie sogar nach derselben Seite zurückwarf, von welcher sie gekommen war. Auf dieselbe Weise wurden die Versuche längere Zeit fortgesetzt und von jetzt an begonnen, die Elongationen der Nadel, wie sie an der Scale beobachtet wurden, der Reihe nach aufzuzeichnen. In den folgenden Tafeln sind die vier ersten aufgezeichneten Elongationen in horizontaler Linie neben einander gestellt worden, die 5[e] aber unter die 1[ste], die 6[te] unter die 2[te] u. s. f. Endlich sind von den unter einander stehenden Beobachtungen die Mittelwerthe angegeben worden.

D.

775,8	436,6	199,6	538,2
775,7	436,3	199,5	537,9
775,0	435,9	198,9	537,3
774,6	435,4	198,5	537,2
774,6	435,4	198,8	537,2
774,2	435,3	198,5	537,1
774,0	435,1	198,2	536,8
773,8	434,7	197,9	536,6
773,5	434,4	197,6	536,6
774,0	434,0	197,5	536,0
774,52	435,31	198,50	537,09

B.

692,1	448,0	277,0	521,1
691,8	447,8	276,7	521,0
691,7	447,4	276,5	520,8
691,3	447,3	276,2	520,5
691,3	447,2	276,0	520,7
691,4	447,2	276,0	520,6
691,4	447,2	275,9	520,5
691,3	447,1	275,9	520,5
691,4	447,0	275,9	520,4
691,3	447,0	275,8	520,3
691,50	447,32	276,19	520,64

A.

691,9	447,7	276,9	521,0
691,6	447,7	276,8	520,9
691,7	447,7	276,8	521,0
691,8	447,6	276,7	521,1
691,8	447,8	276,8	521,0
691,8	447,8	277,0	521,1
691,8	447,8	276,9	521,1
691,6	447,6	276,8	520,8
691,3	447,3	276,4	520,7
691,0	446,9	275,9	520,1
691,63	447,59	276,70	520,88

B.

691,6	447,0	275,7	520,5
691,4	446,9	275,6	520,3
691,2	446,7	275,3	520,0
690,9	446,3	275,2	520,0
690,7	446,2	275,0	519,7
690,5	446,1	274,9	519,8
690,5	446,5	274,8	519,7
690,3	445,9	274,6	519,4
690,1	445,8	274,6	519,2
690,1	445,6	274,3	519,2
690,73	446,30	275,00	519,78

C.

615,8	459,3	350,2	506,2
615,6	459,2	350,1	506,1
615,2	459,0	349,8	505,8
615,1	458,8	349,4	505,6
614,8	458,4	349,2	505,3
614,4	458,1	349,1	505,2
614,2	458,1	348,8	505,0
614,1	458‘0	348,8	504,9
613,9	457,8	348,7	504,8
613,8	457,6	348,2	504,3
614,69	458,43	349,23	505,32

Es ist hierbei noch zu bemerken, dass der horizontale Abstand des Spiegels von der Scale 2218 Scalentheile betrug. Ferner ist zu beachten, dass die hier gebrauchte Inductorrolle von der früheren, S. 206 gebrauchten, verschieden ist. Die neue Inductorrolle hatte eine weit geringere Zahl von Umwindungen, aber von weit stärkerem Drahte, sodass ihr Widerstand viel kleiner ist, als der Widerstand der ersten Inductorrolle. Dieser Umstand hat bedeutenden Einfluss auf das Verhältniss der Beobachtungen *A*, *B*, *C*, *D* unter einander.

In der folgenden Tafel sind die Mittelwerthe aus den obigen Beobachtungen übersichtlich zusammengestellt und in der letzten Columne die Differenz des ersten und dritten, sowie auch des zweiten und vierten Werthes für jede Versuchsreihe beigefügt, und es sind diese beiden Differenzen eben so wie S. 351 mit *a* und *b* bezeichnet worden.

D.	774,52 435,31 198,50 537,09	$a = 576{,}02$ $b = 101{,}78$
B.	691,50 447,32 276,19 520,64	$a = 415{,}31$ $b = 73{,}32$
A.	691,63 447,59 276,70 520,88	$a = 414{,}93$ $b = 73{,}29$
B.	690,73 446,30 275,00 519,78	$a = 415{,}73$ $b = 73{,}48$
C.	614,69 458,43 349,23 505,32	$a = 265{,}46$ $b = 46{,}89$

Die in dieser Tafel zusammengestellten Werthe von a und b bedürfen nun zunächst einer Correction, weil sie den katoptrischen Gesetzen gemäss den Tangenten der doppelten Elongationswinkel proportional sind. Mit Hülfe des gegebenen Abstandes des Spiegels von der Scale ist es leicht, sie auf Werthe zu reducieren, welche den Elongationswinkeln selbst proportional sind, und diese Reduction genügt bei der Kleinheit aller dieser Elongationen. Zu diesem Zwecke ist, wenn x den in Scalentheilen gegebenen Werth von a oder b bezeichnet, die Zahl x um

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{4436^2} = \frac{x^3}{59034288}$$

zu verkleinern. Nach dieser Reduction erhält man folgende Werthe für a und b.

	a	b
D.	572,78	101,76
B.	414,10	73,31
A.	413,72	73,28
B.	414,51	73,47
C.	265,14	46,89

Nimmt man nun die Mittel aus den beiden für B angeführten Werthen a und b, so erhält man folgende Zusammenstellung:

	a	b	$\log.\,nat.\,\frac{a}{b} = \lambda$	$\frac{aa+bb}{\sqrt{ab}}\cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi}\,\text{arc tang}\,\frac{\lambda}{\pi}}$
A.	413,72	73,28	1,730902	768,22
B.	414,305	73,39	1,730814	769,23
C.	265,14	46,89	1,732454	492,44
D.	572,78	101,76	1,727884	1063,11

Die in der letzten Columne angegebenen Werthe können nun, wie S. 351 ff. gezeigt worden ist, als Maass der Stromstärke im Multiplicator dienen, d. h. als die S. 213 mit A, B, C, D bezeichneten Werthe betrachtet werden. Mit diesen Werthen erhält man dann endlich nach den daselbst aufgestellten Formeln:

$$\frac{AB - BC}{AB - AC} = 0{,}99765$$

$$\frac{AB - AD}{AB - BD} = 0{,}99762$$

Im Mittel hiernach verhält sich also der Widerstand der ersten Copie zu dem der zweiten:

$$= 0{,}99764 : 1$$

D.

Begründung der Regeln zur Berechnung des Widerstands eines Leiters aus den Beobachtungen.

Zur Begründung der Regeln zur Berechnung des Widerstands eines Leiters aus den Beobachtungen soll von folgenden beiden Fundamentalsätzen der Lehre vom Elektromagnetismus und der Lehre von der Magnetoelektricität ausgegangen werden.

Erster Satz. Das linearische Element eines galvanischen Stroms ds übt auf ein Element des magnetischen Fluidums μ eine bewegende Kraft aus, die dem Quadrate der Entfernung r umgekehrt proportional ist; aber es tritt dabei zugleich der ganz abweichende Umstand ein, dass die Richtung der Kraft nicht in der verbindenden geraden Linie, sondern senkrecht gegen die durch μ und die Richtung von ds gelegte Ebene ist, und dass ausserdem die Stärke der Kraft nicht von der Entfernung allein, sondern zugleich von dem Winkel abhängt, welchen r mit der Richtung von ds macht. Nennt man diesen Winkel θ, so ist

$$\frac{\sin\theta \,.\, \mu ds}{rr}$$

das Maass der bewegenden Kraft, welche ds auf μ ausübt, und eben so gross ist die von μ auf das Stromelement ds oder dessen ponderabeln Träger ausgeübte Kraft, deren Richtung der ersteren entgegengesetzt parallel ist.

Anmerkung. Unter dem mit ds bezeichneten Stromelemente ist das Product seiner Länge α in die Intensität i des durchgehenden Stroms verstanden, also $ds = \alpha i$. — Dieser Fundamentalsatz des Elektromagnetismus ist hier wörtlich so wiedergegeben, wie ihn Gauss in den »Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839« S. 1. 2 ausgesprochen hat.

Zweiter Satz. Wird das Element des magnetischen Fluidums μ mit der Geschwindigkeit u parallel der Richtung der Kraft bewegt, welche nach dem ersten Satze auf das Stromelement $ds = \alpha i$ wirkt, so wird auf das lineare Element des Leiters α eine der Richtung des Stroms i parallele elektromotorische Kraft ausgeübt, deren Stärke durch den im ersten Satze gegebenen Ausdruck $\frac{\sin\theta \,.\, \mu ds}{rr}$ dargestellt wird, wenn darin $ds = \alpha i$ mit αu vertauscht wird, also durch

$$\frac{\sin\theta \,.\, \mu\alpha u}{rr}.$$

Wird dagegen das Element des magnetischen Fluidums μ in einer andern Richtung bewegt, welche mit der oben bezeichneten den Winkel ψ macht, so ist dieser Ausdruck der Stärke der Kraft noch mit $\cos\psi$ zu multiplicieren.

Anmerkung. Führt man statt der beiden Winkel θ und ψ zwei andere Winkel ein, nämlich den Winkel φ, welchen die Richtung, nach welcher μ bewegt wird, mit r bildet, und den Winkel ε, welchen die Richtung von α mit der Normale einer durch r der Richtung, nach welcher μ bewegt wird, parallel gelegten Ebene macht, so verwandelt sich der Ausdruck $\frac{\sin\theta \,.\, \mu\alpha u}{rr} \cdot \cos\psi$ in $\frac{\sin\varphi \,.\, \mu\alpha u}{rr} \cos\varepsilon$. — Dieser letztere Ausdruck stimmt mit demjenigen überein, welchen man erhält, wenn man die in der ersten Abhandlung über »Elektrodynamische Maassbestimmungen« S. 345 angegebene elektromotorische Elementarkraft nach der Richtung des inducierten Elements α zerlegt. Der so erhaltene Ausdruck enthält zwar noch einen constanten Factor, dessen Werth aber von der Wahl des Maasses für die elektromotorische Kraft abhängt und für ein bestimmtes Maass $= 1$ ist.

Aus diesen beiden Sätzen werden folgende Bestimmungen abgeleitet.

1. Es findet eine solche Relation zwischen den elektromagnetischen und magnetoelektrischen Kräften statt, dass, wenn zwei beliebig gelegene magnetische Elemente μ und μ' auf ein Stromelement $ds = \alpha i$ gleiche und gleichgerichtete elektromagnetische Kräfte ausüben, auch ihre elektromotorischen Kräfte auf das lineare Element des Leiters α, wenn es bewegt wird, gleich sind. Dasselbe gilt, wenn für μ und μ' eine Gesammtheit von beliebig vertheilten magnetischen Elementen gesetzt wird. Hieraus folgt, dass, wenn der Erdmagnetismus an einem Orte gleiche und gleichgerichtete elektromagnetische Kraft, wie ein entfernter Magnetstab, ausübt, die elektromotorische Kraft des Erdmagnetismus auf einen daselbst bewegten Inductor ebenfalls der des Magnetstabs gleich sei, wie auch der Magnetismus in der Erde vertheilt sein möge.

2. Wenn das Stromelement ds einem Kreisstrome angehört, so wird die auf der Kreisebene senkrechte Componente der elektromagne-

tischen Kraft, welche ds auf μ ausübt, erhalten, wenn $\frac{\sin\theta\,.\,\mu ds}{rr}$ mit dem Cosinus des Winkels multipliciert wird, welchen die Kreisebene mit der durch μ und die Richtung von ds gelegten Ebene bildet. Diese Componente heisse C.

Das Stromelement ds möge in seine Factoren zerlegt werden, nämlich in seine Stromintensität i und in seine Länge, welche als die Länge eines Kreiselements mit $ad\alpha$ bezeichnet wird, wenn a der Halbmesser des Kreises ist, dem es angehört, und α der Winkel, welchen der zugehörige Radius mit demjenigen Radius bildet, welcher mit μ in einer auf der Kreisebene senkrechten Ebene liegt. Bezeichnet man ferner mit b das von μ auf die Kreisebene gefällte Perpendikel und mit x den Abstand des Fusspunkts dieses Perpendikels vom Mittelpunkte, so ist
$$rr = aa + bb + xx - 2ax\cos\alpha$$
und man erhält für die ganze von ds auf μ ausgeübte Kraft den Ausdruck:
$$\frac{\sin\theta\,.\,i\mu\,.\,ad\alpha}{aa+bb+xx-2ax\cos\alpha}\,.$$
Ferner ist der Cosinus des Winkels, welchen die Kreisebene mit der durch μ und die Richtung von ds gelegten Ebene bildet:
$$\frac{a-x\cos\alpha}{r\sin\theta} = \frac{a-x\cos\alpha}{\sin\theta\,.\,\sqrt{(aa+bb+xx-2ax\cos\alpha)}}\,.$$
Das Product dieses Cosinus in obigen Ausdruck der ganzen Kraft giebt den Ausdruck für die gesuchte Componente C, nämlich:
$$C = i\mu\,.\,ad\alpha\,\frac{a-x\cos\alpha}{(aa+bb+xx-2ax\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Nach dem vorausgeschickten zweiten Satze, dem Grundgesetze der Magnetoelektricität, ergiebt sich hieraus die elektromotorische Kraft, welche μ auf ds ausübt, wenn μ mit der Geschwindigkeit u parallel der Richtung der Kraft C bewegt wird, durch Multiplication des Werthes, welchen C hat, wenn $i = -1$ ist, mit u, nämlich $-u\mu\,.\,ad\alpha\,\frac{a-x\cos\alpha}{(aa+bb+xx-2ax\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}$; dagegen ergiebt sich, wenn ds mit der Geschwindigkeit u in der nämlichen auf der Kreisebene senkrechten Richtung bewegt wird, die elektromotorische Kraft, welche μ auf ds ausübt,
$$+u\mu\,.\,ad\alpha\,\frac{a-x\cos\alpha}{(aa+bb+xx-2ax\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}\,.$$
Entwickelt man ferner den obigen Ausdruck von C nach Potenzen von $\cos\alpha$, so erhält man:

$$C = \frac{i\mu}{(aa+bb+xx)^{\frac{3}{2}}}\Big\{aad\alpha + \left(2aa - bb - xx\right)\frac{ax}{aa+bb+xx}\cdot\cos\alpha d\alpha$$
$$+ \tfrac{3}{2}\left(3aa - 2bb - 2xx\right)\frac{a^2x^2}{(aa+bb+xx)^2}\cdot\cos\alpha^2 d\alpha$$
$$+ \tfrac{5}{2}\left(4aa - 3bb - 3xx\right)\frac{a^3x^3}{(aa+bb+xx)^3}\cdot\cos\alpha^3 d\alpha + \ldots\Big\}$$

3. Der Ausdruck für die auf der Kreisebene senkrechte elektromagnetische Kraft, welche der ganze Kreisstrom auf μ ausübt, ergiebt sich dann auf folgende Weise. Da der Halbmesser a und die Stromintensität i, wie auch b und x, für alle Kreiselemente gleich sind, so ist die gesuchte Kraft, oder die Summe aller auf die Kreisebene senkrechten elektromagnetischen Kräfte, welche alle Stromelemente auf μ ausüben,

$$i\mu\,.\,a\int_0^{2\pi}\frac{a - x\cos\alpha}{(aa+bb+xx-2ax\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}\,d\alpha$$

$$= \frac{i\mu}{(aa+bb+xx)^{\frac{3}{2}}}\cdot\Big\{aa\int_0^{2\pi}d\alpha + \left(2aa - bb - xx\right)\frac{ax}{aa+bb+xx}\int_0^{2\pi}\cos\alpha d\alpha$$

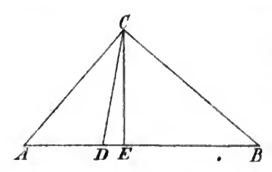
$$+ \tfrac{3}{2}\left(3aa - 2bb - 2xx\right)\frac{a^2x^2}{(aa+bb+xx)^2}\cdot\int_0^{2\pi}\cos\alpha^2 d\alpha$$

$$+ \tfrac{5}{2}\left(4aa - 3bb - 3xx\right)\frac{a^3x^3}{(aa+bb+xx)^3}\cdot\int_0^{2\pi}\cos\alpha^3 d\alpha + \ldots\Big\}$$

das ist:

$$\frac{2\pi aa\,.\,i\mu}{(aa+bb+xx)^{\frac{3}{2}}}\Big\{1 + \tfrac{3}{4}\left(3aa - 2bb - 2xx\right)\frac{xx}{(aa+bb+xx)^2} + \ldots\Big\}\text{I.}$$

Man kann sich übrigens leicht überzeugen, dass die Stromintensität hierin nach dem Art. 10 festgesetzten absoluten Maasse zu bestimmen ist, wenn man die Kreisebene $\pi aa = 1$ setzt, wo man findet, dass $i = 1$ sein muss, damit die in die Ferne (wo aa gegen $bb + xx$ verschwindet) auf μ senkrecht gegen die Kreisebene ausgeübte Kraft der in derselben Richtung von einem Magnete ausgeübten Kraft gleich werde, welcher das absolute Maass des Magnetismus besitzt und dessen Axe auf der Kreisebene normal ist. A sei der Mittelpunkt des Magnets, AB die Richtung seiner Axe, das Element μ befinde sich in C. ABC sei ein bei C rechtwinkeliges Dreieck und $AD = \frac{1}{3}AB$; so ist nach einem



bekannten Satze («Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840» S. 33. 34) CD die Richtung der auf μ wirkenden Kraft und ihre Stärke ist $\frac{\mu}{AC^2} \cdot \frac{CD}{AD}$. Fällt man CE perpendicular auf AB so ist die der Axe des Magnets parallele Componente $\frac{\mu}{AC^2} \cdot \frac{CD}{AD} \cdot \frac{ED}{CD} = \frac{\mu}{AC^2} \cdot \frac{ED}{AD}$. Nun sind AE und CE die oben mit b und x bezeichneten Linien, wonach $AC = \sqrt{(bb + xx)}$; $AD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \frac{AC^2}{AE} = \frac{bb + xx}{2b}$ und $ED = AE - AD = \frac{bb - xx}{2b}$; folglich die gesuchte Kraft

$$\mu \cdot \frac{2bb - xx}{(bb + xx)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wird dagegen in obigem Ausdrucke $\pi aa = 1$ und $\frac{aa}{bb + xx} = 0$ gesetzt, so erhält man

$$i\mu \cdot \frac{2bb - xx}{(bb + xx)^{\frac{3}{2}}},$$

woraus sich ergiebt, dass $i = 1$ sein müsse, wenn der die Flächeneinheit umlaufende Strom dem absoluten Maasse des Magnetismus gleich wirken soll. Diese Stromintensität ist aber das Art. 10 festgesetzte absolute Maass, woraus einleuchtet, dass bei den Anwendungen der obigen elektromagnetischen Gesetze die Stromintensitäten nach dem festgesetzten absoluten Maasse zu bestimmen sind.

4. Der Ausdruck für die elektromotorische Kraft, welche μ auf den ganzen Kreis ausübt, wenn es mit der Geschwindigkeit u in senkrechter Richtung auf die Kreisebene bewegt wird, ergiebt sich auf folgende Weise. Aus dem vorausgeschickten zweiten Satze ergab sich die elektromotorische Kraft, welche μ auf ds ausübt, wenn es mit der Geschwindigkeit u parallel der Richtung der Kraft C bewegt wird, durch Multiplication von u in den Werth von C, wenn darin $i = -1$ gesetzt wird, nämlich:

$$-\frac{\mu u}{(aa + bb + xx)^{\frac{3}{2}}} \cdot \Big\{ aad\alpha + \left(2aa - bb - xx\right)\frac{ax}{aa + bb + xx} \cdot \cos \alpha d\alpha$$
$$+ \tfrac{3}{2}\left(3aa - 2bb - 2xx\right) \frac{a^2x^2}{(aa + bb + xx)^2} \cdot \cos \alpha^2 d\alpha$$
$$+ \tfrac{5}{2}\left(4aa - 3bb - 3xx\right) \frac{a^3x^3}{(aa + bb + xx)^3} \cdot \cos \alpha^3 d\alpha + \ldots \Big\}$$

Die Summe der von μ auf alle Kreiselemente ausgeübten elektromotorischen Kräfte folglich:

$$-\frac{\mu u}{(aa+bb+xx)^{\frac{3}{2}}}\left\{aa\int_0^{2\pi}d\alpha+\left(2aa-bb-xx\right)\frac{ax}{aa+bb+xx}\int_0^{2\pi}\cos\alpha^2 d\alpha\right.$$

$$+\tfrac{3}{2}\left(3aa-2bb-2xx\right)\frac{a^2x^2}{(aa+bb+xx)^2}\int_0^{2\pi}\cos\alpha^2 d\alpha$$

$$\left.+\tfrac{5}{2}\left(4aa-3bb-3xx\right)\frac{a^3x^3}{(aa+bb+xx)^3}\int_0^{2\pi}\cos\alpha^3 d\alpha+\ldots\right\}$$

das ist:

$$-\mu u\frac{\pi aa}{(aa+bb+xx)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left\{2+\tfrac{3}{2}\left(3aa-2bb-2xx\right)\frac{xx}{(aa+bb+xx)^2}+\ldots\right\}\text{II.}$$

Man kann sich übrigens leicht überzeugen, dass dieser Werth die elektromotorische Kraft nach dem Art. 10 festgesetzten absoluten Maasse ausdrückt. Setzt man nämlich in diesem Werthe $b=0$, so ist die lineare Geschwindigkeit u des Elements μ identisch mit einer Drehungsgeschwindigkeit $\gamma=\frac{u}{x}$ um den gegen x senkrechten Kreisdurchmesser, wofür dann wieder, ohne Aenderung der elektromotorischen Kraft, die entgegengesetzte Drehungsgeschwindigkeit des Kreises $-\gamma$ um die nämliche Axe gesetzt werden kann. Der Ausdruck der elektromotorischen Kraft von μ auf den mit der Geschwindigkeit $-\gamma$ gedrehten Kreis ist also

$$-\mu\gamma\frac{\pi aax}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}\left\{2+\tfrac{3}{2}\left(3aa-2xx\right)\frac{xx}{(aa+xx)^2}+\ldots\right\}$$

und ist daher auf den mit der Geschwindigkeit $+\gamma$ gedrehten Kreis, wenn μ aus der Ferne wirkt, wo aa gegen xx verschwindet, $-\mu\gamma\frac{\pi aa}{xx}$. Hieraus ergiebt sich die Summe der beiden elektromotorischen Kräfte, wenn erstens $\mu=+m$ und $x=R+e$ und zweitens $\mu=-m$ und $x=R-e$, d. i., die elektromotorische Kraft eines Magnets $M=2em$, welcher aus der Ferne R wirkt,

$$-m\gamma\frac{\pi aa}{(R+e)^2}+m\gamma\frac{\pi aa}{(R-e)^2}=M\gamma\frac{2\pi aa}{R^3}.$$

Macht man nun die Drehungsgeschwindigkeit γ des Kreises so gross, dass seine Projection auf eine gegen x normale Ebene in der Zeiteinheit um die Flächeneinheit sich ändert, d. i. $\gamma\pi aa=1$, so findet man, dass obiger Werth der elektromotorischen Kraft $=1$ sein müsse, damit

M den Stabmagnetismus bezeichne, welcher der Einheit des Erdmagnetismus, dessen Richtung mit x parallel ist, gleich wirkt. Wenn nämlich in der Richtung des Erdmagnetismus T eines Ortes in dem Abstande R ein gleich gerichteter Magnet M liegt, so ist nach magnetischen Maassbestimmungen die Wirkung von M der Wirkung von T an jenem Orte gleich, wenn

$$\frac{2M}{R^3} = T$$

ist. M bezeichnet also den der Maasseinheit des Erdmagnetismus gleich wirkenden Stabmagnetismus, wenn

$$\frac{2M}{R^3} = 1$$

ist, woraus hervorgeht, dass, wenn zugleich $\gamma\pi aa = 1$, der obige Werth der elektromotorischen Kraft auch $= 1$ sei. Diese elektromotorische Kraft ist aber selbst das Art. 10 festgesetzte absolute Maass, woraus einleuchtet, dass bei Anwendungen des hier entwickelten magnetoelektrischen Gesetzes die elektromotorische Kraft nach dem angegebenen absoluten Maasse bestimmt wird.

Wir haben bisher die Kräfte betrachtet, welche ein Element eines magnetischen Fluidums μ ausübt oder erleidet. Die Anwendung auf die Versuche fordert alle Elemente beider magnetischen Fluida, welche in einer Magnetnadel enthalten sind, in Rechnung zu bringen. Es leuchtet aber ein, dass man sich dabei nach Gauss an die Betrachtung der Elemente der idealen, an der Oberfläche vertheilten magnetischen Fluida halten könne, die gänzlich von einander geschieden sind. Ist die Summe der positiven Elemente $= +m$, so ist die Summe der negativen $= -m$; und bezeichnet man den Abstand des Mittelpunktes jener von dem Mittelpunkte dieser mit $2e$, so ist das Moment der Nadel $= 2em$ und die Linie e ist von einer messbaren Grösse. Auch leuchtet ein, dass, wenn alle positiven Elemente nahe beisammen liegen und eben so alle negativen, ihre Wirkung nahe dieselbe ist, wie wenn sie in ihren respectiven Mittelpunkten concentriert wären. Es wird dann in der gebrauchten Nadel nur die Wirkung zweier Punkte in Rechnung kommen, nämlich desjenigen, in welchem alles nordmagnetische, und desjenigen, in welchem alles südmagnetische Fluidum concentriert gedacht wird. Hiernach ergiebt sich

5. die Vergleichung des Drehungsmoments, welches der Multiplicator auf die in seinem Mittelpunkte befindliche Nadel ausübt, mit

demjenigen, welches er ausüben würde, wenn die Nadel weit entfernt wäre, folgendermassen. Die Meridianebene, in welcher die Nadel liegt, theilt den Multiplicator so, dass eine gleiche Zahl von Umwindungen zu beiden Seiten liegt. Zieht man in dieser Ebene eine horizontale Linie durch den Mittelpunkt des Multiplicators, so liege der Punkt, in welchem alles nordmagnetische Fluidum $+m$ concentriert gedacht wird, in dieser Linie und der Abstand desselben vom Mittelpunkte heisse $+e$; der Abstand des in derselben Linie liegenden Punktes, in welchem alles südmagnetische Fluidum $-m$ concentriert gedacht wird, heisse $-e$. a' und a'' seien der innere und äussere Durchmesser des Multiplicators und $2b'$ die Breite seines Querschnitts, welcher also $2(a''-a')b'$ ist. Der Theil von diesem Querschnitte des ganzen Ringes, welcher auf eine Umwindung kommt, deren Halbmesser a ist und deren Ebene im Abstande b vom Mittelpunkte des Multiplicators liegt, werde mit $da\,db$ bezeichnet: so ist nach (I.) das Product des Querschnitts einer Umwindung in die auf $+m$ von ihr ausgeübte Kraft:

$$+ im \frac{2\pi aa\,da\,db}{(aa+bb+ee)^{\frac{3}{2}}} \left\{1 + \frac{3}{4}\left(3aa - 2bb - 2ee\right)\frac{ee}{(aa+bb+ee)^2} + \ldots\right\}.$$

Multipliciert man dieses Product mit dem von der Drehungsaxe auf die Richtung der Kraft gefällten Perpendikel e, so erhält man das Product des Querschnitts der Umwindung in das von ihr ausgeübte Drehungsmoment. Setzt man endlich in diesem Ausdrucke $-m$ für $+m$ und $-e$ für $+e$, so erhält man einen gleichen Werth für das Product desselben Querschnitts in das von der nämlichen Umwindung auf das negative Fluidum ausgeübte Drehungsmoment. Folglich ist das Product des von jener Umwindung auf die ganze Nadel ausgeübten Drehungsmoments in ihren Querschnitt, wenn man mit $M = 2em$ den Nadelmagnetismus bezeichnet:

$$iM \frac{2\pi aa\,da\,db}{(aa+bb+ee)^{\frac{3}{2}}} \left\{1 + \frac{3}{4}\left(3aa - 2bb - 2ee\right)\frac{ee}{(aa+bb+ee)^2} + \ldots\right\}$$

Da e ein kleiner Bruchtheil von a ist, so können alle Theile, welche die vierte oder höhere Potenzen zum Factor haben, weggelassen werden und man erhält dann

$$iM \frac{2\pi aa\,da\,db}{(aa+bb)^{\frac{3}{2}}} \left\{1 + \frac{3}{4}\,\frac{aa-4bb}{(aa+bb)^2}\cdot ee\right\}$$

Hieraus folgt nun die Summe der Producte des Querschnitts jeder Umwindung in das von derselben ausgeübte Drehungsmoment

$$iM \cdot 2\pi \int_{a'}^{a''} aada \int_{-b'}^{+b'} \frac{db}{(aa+bb)^{\frac{3}{2}}} \left\{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{aa-4bb}{(aa+bb)^2} ee\right\}$$

$$= iM \left\{4\pi b' \cdot \log \frac{a''+\sqrt{(a''a''+b'b')}}{a'+\sqrt{(a'a'+b'b')}} + \frac{\pi}{b'}\left(\frac{a''^3}{(a''a''+b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a'+b'b')^{\frac{3}{2}}}\right) \cdot ee\right\}$$

Dividiert man diesen Ausdruck mit dem Producte aus dem Querschnitt einer Umwindung in die Zahl der Umwindungen, d. i. mit dem Querschnitte des ganzen Ringes $2(a''-a')b'$; so erhält man das mittlere Drehungsmoment, welches eine Umwindung auf die Nadel ausübt, woraus durch Multiplication mit der Zahl der Umwindungen n das Drehungsmoment des Multiplicators auf die in seinem Mittelpunkte befindliche Nadel hervorgeht, nämlich:

$$iM \,.\, 2n\pi \cdot \frac{1}{a''-a'}\left\{\log \frac{a''+\sqrt{(a''a''+b'b')}}{a'+\sqrt{(a'a'+b'b')}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''a''+b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a'+b'b')^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{ee}{b'b'}\right\}$$

Für den Fall, wo b' gegen a' verschwindet und a' von a'' wenig verschieden ist, ergiebt sich $iM \cdot \frac{2n\pi}{a'}$ und a' ist in diesem Falle der Halbmesser des Multiplicators. Versteht man nun im Allgemeinen unter Halbmesser des Multiplicators einer gegebenen Centralnadel den Ausdruck:

$$\frac{a''-a'}{\log \frac{a''+\sqrt{(a''a''+b'b')}}{a'+\sqrt{(a'a'+b'b')}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''a''+b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a'+b'b')^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{ee}{b'b'}}$$

und bezeichnet ihn mit r', so ist das Drehungsmoment

$$\frac{2n\pi}{r'} \cdot Mi\,.$$

Wird dagegen die Nadel vom Multiplicator weit entfernt, bleiben aber dabei $+m$ und $-m$ in derselben Geraden, in den Abständen $R+e$ und $R-e$ vom Mittelpunkte, so muss auf den Ausdruck C S. 362 für die gegen die Meridianebene senkrechte Kraft zurückgegangen werden, welche ein Element ds auf μ ausübt, indem darin $+m$ oder $-m$ für μ, und $R+e$ oder $R-e$ für x gesetzt wird. Man erhält dann für $+m$

$$im \,.\, ad\alpha \frac{a-(R+e)\cos\alpha}{(aa+bb+(R+e)^2-2a(R+e)\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

für $-m$

$$-im \,.\, ad\alpha \frac{a-(R-e)\cos\alpha}{(aa+bb+(R-e)^2-2a(R-e)\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Die Summe des ersteren mit $+e$ multiplicierten und des letzteren mit $-e$ multiplicierten Werthes giebt das von ds auf die Nadel ausgeübte

Drehungsmoment, nämlich, wenn man M für $2em$ schreibt und beachtet, dass a, b und e gegen R verschwinden,

$$iM \cdot ad\alpha \cdot \frac{a - R\cos\alpha}{(RR - 2aR\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{iM}{a}\left\{\frac{aa}{RR}\cos\alpha d\alpha + \frac{a^4}{R^4}\left(3\cos\alpha^2 - 1\right)d\alpha + ..\right\}$$

folglich ist das von dem ganzen Kreise, zu welchem ds gehört, auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment

$$-\frac{iM}{a}\left\{\frac{aa}{RR}\int_0^{2\pi}\cos\alpha d\alpha + \frac{a^3}{R^3}\int_0^{2\pi}(3\cos\alpha^2 - 1)\,d\alpha + ..\right\}$$

$$= -\frac{\pi aa}{R^3}\cdot Mi\,,$$

weil die folgenden Glieder, welche die vierte oder höhere Potenzen von $\frac{a}{R}$ enthalten, weggelassen werden können.

Integriert man diesen mit $dadb$ multiplicierten Werth zwischen den Grenzen von $a = a'$ bis $a = a''$ und von $b = -b'$ bis $b = +b'$, so ist das Product dieses Integrals in $\frac{n}{2(a''-a')b'}$ das vom Multiplicator auf die entfernte Nadel ausgeübte Drehungsmoment

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{n\pi Mi}{R^3}\cdot\frac{a''^3 - a'^3}{a'' - a'} = -\frac{n\pi Mi}{R^3}\cdot\frac{a'a' + a'a'' + a''a''}{3}$$

Für den Fall, wo a' von a'' wenig verschieden ist, ergiebt sich

$$-\frac{n\pi a'a'}{R^3}\cdot Mi$$

und a' ist in diesem Falle der Halbmesser des Multiplicators. Versteht man nun im Allgemeinen unter Halbmesser des Multiplicators einer entfernten Nadel den Ausdruck

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}(a'a' + a'a'' + a''a'')}$$

und bezeichnet ihn mit r'', so ist das Drehungsmoment

$$-\frac{n\pi r''r''}{R^3}\cdot Mi\,.$$

Vergleicht man endlich den gefundenen Ausdruck des Drehungsmoments, welches der Multiplicator auf die in seinem Mittelpunkte befindliche Nadel ausübt, mit demjenigen, welches er ausüben würde, wenn die Nadel weit entfernt wäre; so ergiebt sich das Verhältniss

$$\frac{2n\pi}{r'}\cdot Mi : -\frac{n\pi r''r''}{R^3}\cdot Mi = 1 : -\frac{r'r''r''}{2R^3}\,.$$

Regeln zur Berechnung des Widerstands aus den nach der ersten Methode Art. 14 ausgeführten Beobachtungen.



Die Gerade NS bezeichne die Richtung des horizontalen Erdmagnetismus, dessen Stärke an dem Orte $A = T'$, an dem Orte $B = T''$ sei. Eine geschlossene Kette bestehe aus zwei verticalen Ringen, deren Mittelpunkte A und B seien. Der Ring B, welcher den Multiplicator bildet, stehe fest, der Ring A, welcher den Inductor bildet, sei um seinen verticalen Durchmesser drehbar. Die Summe der Flächen, welche von allen Umwindungen des Ringes A begrenzt werden, sei S, und ψ bezeichne den Winkel, welchen die Normale der Ringebene mit der Richtung NS am Ende der Zeit t bildet; so ist die Projection von S auf eine auf NS senkrechte Ebene in diesem Augenblicke $= S \cos\psi$ und die Zunahme derselben in dem Zeitelemente dt ist $- S \sin\psi \,.\, d\psi$. Hieraus ergiebt sich der absolute Werth der vom Erdmagnetismus T' auf den Ring A ausgeübten elektromotorischen Kraft nach Art. 10

$$eE = - ST'. \sin\psi \frac{d\psi}{dt} \cdot E\,.$$

Der Integralwerth hiervon von dem Augenblicke, wo $\psi = \pi$ war, bis zu dem Augenblicke, wo $\psi = 0$ geworden ist, werde durch $e'E$ bezeichnet, so ist

$$e' = 2ST'\,.$$

Der von dieser elektromotorischen Kraft in der ganzen geschlossenen Kette hervorgebrachte Strom, dessen Intensität am Ende der Zeit t mit iJ bezeichnet wird, geht durch den Multiplicatorring B, welcher, so durchströmt, auf die in seinem Mittelpunkte befindliche Nadel, deren magnetische Axe mit NS zusammenfällt, ein Drehungsmoment ausübt, welches nach S. 368 auf folgende Weise ausgedrückt wird:

$$\frac{2n\pi}{r'} \cdot Mi\,,$$

worin

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{a'' - a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{(a''a'' + b'b')}}{a' + \sqrt{(a'a' + b'b')}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''a'' + b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a' + b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{ee}{b'b'} \right\}$$

Es bezeichnet hier n die Zahl der Umwindungen des Multiplicatorringes B, a' und a'' den kleinsten und grössten Halbmesser und

$2b'$ die Höhe desselben, M den Magnetismus der Nadel nach absolutem Maasse und $2e$ ist der Quotient $\frac{M}{m}$, wenn m die Menge des nordmagnetischen Fluidums ausdrückt, welches nach der idealen Vertheilung auf der Oberfläche der Nadel verbreitet ist.

Bezeichnet K das Trägheitsmoment der Nadel, so ergiebt sich hieraus die Acceleration der Drehung der Nadel

$$= \frac{2n\pi}{r'} \cdot \frac{Mi}{K}.$$

Bezeichnet man ferner den Integralwerth der Stromintensität iJ für den Zeitraum von dem Augenblicke an, wo $\psi = \pi$ war, bis zu dem Augenblicke, wo $\psi = 0$ geworden ist, mit $i'J$, so ist der Integralwerth der Acceleration für den nämlichen Zeitraum, d. i. die durch den Inductionsstoss der Nadel ertheilte Drehungsgeschwindigkeit

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2n\pi}{r'} \cdot \frac{Mi'}{K}$$

woraus durch Multiplication mit $\frac{t'}{\pi}$ die Elongationsweite α

$$\alpha = \frac{2nt'}{r'} \cdot \frac{i'M}{K}$$

folglich

$$i' = \frac{\alpha K r'}{2nMt'}$$

erhalten wird, wo t' die Schwingungsdauer der Nadel bezeichnet.

Ist $1 : (1 + \theta)$ das Verhältniss, in welchem die magnetische Directionskraft durch die Elasticität des Fadens, an welchem die Nadel hängt, vergrössert wird, und T'' die Stärke des horizontalen Erdmagnetismus am Orte des Multiplicators, so ist

$$t't' = \frac{\pi\pi K}{(1+\theta)MT''}$$

oder

$$\frac{K}{Mt'} = \frac{(1+\theta)T''t'}{\pi\pi}$$

folglich

$$i' = \frac{(1+\theta)T''r't'}{2n\pi\pi} \cdot \alpha.$$

Bezeichnet endlich wW den Widerstand der ganzen geschlossenen Kette, so ergiebt sich für die Berechnung des Coefficienten w die Regel

$$w = \frac{e'}{i'} = \frac{n}{1+\theta} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi\pi S}{\alpha r' t'}$$

was zu beweisen war.

Regel zur Berechnung des Widerstands aus den nach der zweiten Methode Art. 15 ausgeführten Beobachtungen.

Wird der feststehende dem magnetischen Meridiane parallele Ring B in sich geschlossen und die in seinem Mittelpunkte hängende Nadel in Schwingung gesetzt, so wird von dieser Nadel auf den Ring B eine elektromotorische Kraft ausgeübt, welche auf folgende Weise bestimmt werden kann.

Bezeichnet $+m$ das nordmagnetische Fluidum, welches nach der idealen Vertheilung auf der Oberfläche der Nadel verbreitet gedacht wird, und $+e$ die Entfernung, in welcher der Mittelpunkt dieser magnetischen Masse von dem Mittelpunkte des Ringes B liegt; bezeichnet ferner $-m$ das südmagnetische Fluidum, welches nach der idealen Vertheilung auf der Oberfläche der Nadel verbreitet gedacht wird, und $-e$ die Entfernung, in welcher der Mittelpunkt dieser magnetischen Masse von dem Mittelpunkte des Ringes B liegt; und ist folglich der Nadelmagnetismus

$$M = 2em;$$

so wird, wenn γ die Drehungsgeschwindigkeit der Nadel ist, für kleine Elongationsweiten der Nadel, die elektromotorische Kraft, welche die Nadel auf eine Umwindung des Ringes B ausübt, deren Halbmesser $= a$ ist und deren Ebene in der Entfernung b vom Mittelpunkte des Ringes B liegt, nach S. 365 durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$-\gamma M \frac{\pi aa}{(aa+bb+ee)^{\frac{3}{2}}}\left\{2+\frac{3}{2}\left(3aa-2bb-2ee\right)\frac{ee}{(aa+bb+ee)^2}\right\}$$

indem dort erstens $\mu = +m$ und $u = +e\gamma$, zweitens $\mu = -m$ und $u = -e\gamma$ gesetzt und die Summe beider Werthe genommen wird. Die elektromotorische Kraft, welche die Nadel auf den ganzen Ring ausübt, dessen innerer und äusserer Halbmesser a' und a'' und dessen Höhe $2b'$ ist und der n Umwindungen besitzt, folgt hieraus $= eE$, wo $e =$

$$-\frac{n}{2(a''-a')b'}\cdot\gamma M\pi\int_{a'}^{a''}aada\int_{-b'}^{+b'}\frac{db}{(aa+bb+ee)^{\frac{3}{2}}}\left(2+\frac{3}{2}(3aa-2bb-2ee)\frac{ee}{(aa+bb+ee)^2}\right)$$

oder
$$e = -\gamma M \,.\, 2n\pi \frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a''+\sqrt{(a''a''+b'b')}}{a'+\sqrt{(a'a'+b'b')}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''a''+b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a'+b'b')^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{ee}{b'b'}\right\}$$

oder
$$e = -\frac{2n\pi}{r} \cdot M\gamma$$

wenn, wie oben,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a''+\sqrt{(a''a''+b'b')}}{a'+\sqrt{(a'a'+b'b')}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''a''+b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a'+b'b')^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{ee}{b'b'}\right\}$$

gesetzt wird.

Der im Multiplicatorringe hierdurch inducierte Strom, dessen Intensität mit $-\gamma iJ$ bezeichnet werde, wo iJ die Intensität desjenigen Stroms ist, welcher von der elektromotorischen Kraft $\frac{2n\pi}{r} M$ hervorgebracht werden würde, übt rückwärts auf die schwingende Nadel wieder ein Drehungsmoment aus, welches nach S. 368 auf folgende Weise ausgedrückt wird:

$$-\frac{2n\pi}{r} \cdot M\gamma i$$

Bezeichnet K das Trägheitsmoment der Nadel, so ergiebt sich hieraus eine Retardation der Drehungsgeschwindigkeit γ

$$= -\frac{2n\pi}{r} \cdot \frac{M\gamma i}{K}.$$

Bezeichnet man endlich mit φ den kleinen Winkel, welchen die schwingende Nadel in irgend einem Augenblicke mit dem magnetischen Meridiane macht, also $\gamma = \frac{d\varphi}{dt}$, so ist das Drehungsmoment, welches der Erdmagnetismus T auf die Nadel ausübt,

$$= -MT\varphi$$

und dies verursacht eine Retardation der Geschwindigkeit γ

$$= -\frac{MT}{K}\varphi$$

wozu noch derjenige Theil der Retardation hinzuzufügen ist, welcher von der Elasticität des Aufhängungsfadens herrührt, und welcher, wenn θ die daraus entspringende Directionskraft der Nadel in Theilen ihrer magnetischen Directionskraft ausdrückt,

$$= -\frac{\theta MT}{K}\varphi$$

ist. Die ganze Retardation der Geschwindigkeit $\gamma = \frac{d\varphi}{dt}$ beträgt hiernach

$$-\frac{dd\varphi}{dt^2} = (1+\theta)\frac{MT}{K}\varphi + \frac{2n\pi}{r} \cdot \frac{Mi}{K} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

woraus

$$\varphi = Ae^{-\frac{n\pi Mi}{Kr'}t} \sin t \sqrt{\left((1+\theta)\frac{MT}{K} - \left(\frac{n\pi Mi}{Kr'}\right)^2\right)}$$

folgt, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen, t die von einem Durchgang der Nadel durch den Meridian gerechnete Zeit und

$$\frac{\pi}{\sqrt{\left((1+\theta)\frac{MT}{K} - \left(\frac{n\pi Mi}{Kr'}\right)^2\right)}}$$

die Schwingungsdauer der Nadel t', endlich

$$1 : e^{-\frac{n\pi Mit'}{Kr'}}$$

das Verhältniss zweier auf einander folgender Schwingungsbogen ist. Der natürliche Logarithmus dieses Verhältnisses oder das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbogen ist also

$$\lambda = \frac{n\pi Mit'}{Kr'} .$$

Aus dieser Gleichung folgt zur Bestimmung der Intensität iJ des von der elektromotorischen Kraft $e = \frac{2n\pi M}{r'}$ in dem geschlossenen Ringe B hervorgebrachten Stroms

$$i = \frac{Kr'}{n\pi Mt'} \cdot \lambda$$

und hieraus endlich zur Bestimmung des Widerstands wW des Ringes B

$$w = \frac{e}{i} = \left(\frac{n\pi M}{r'}\right)^2 \cdot \frac{2t'}{K\lambda} .$$

Dieser Ausdruck von w lässt sich in eine andere Form bringen, wenn man beachtet, dass die Schwingungsdauer der Nadel

$$t' = \frac{\pi}{\sqrt{\left((1+\theta)\frac{MT}{K} - \left(\frac{n\pi Mi}{Kr'}\right)^2\right)}}$$

und

$$\lambda = \frac{n\pi Mi}{Kr'} \cdot t'$$

war, woraus

$$\frac{MT}{K} = \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{(1+\theta)\, t't'}$$

sich ergiebt, und wenn man ausserdem beachtet, dass, wenn

$$\frac{2M}{Tr'^3} = \operatorname{tang} v_0$$

gesetzt wird, v_0 nach bekannter Methode aus magnetometrischen Ablenkungsversuchen bestimmt werden kann. Durch Multiplication dieser beiden Gleichungen erhält man

$$\frac{2MM}{Kr'^3} = \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{(1+\theta)\,tt} \cdot \text{tang}\, v_0$$

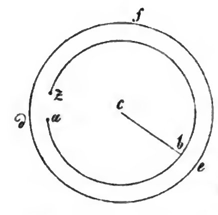
und folglich

$$w = \frac{nn\pi\pi}{1+\theta} \cdot \text{tang}\, v_0 \cdot \frac{\pi\pi + \lambda\lambda}{\lambda} \cdot \frac{r'}{t},$$

was zu beweisen war.

E.

Regeln zur Berechnung des von einem Strome mit Gleitstelle inducierten Stroms.

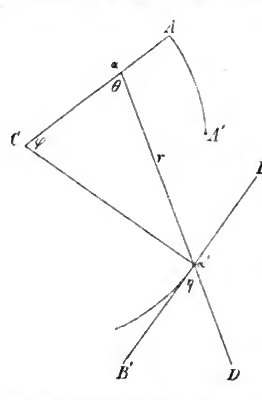


Es ist ein Strom von der constanten Intensität i gegeben, welcher bei a in den Kreisbogen ab eintritt und durch denselben bis zu der Stelle b fortgeht, von wo er durch den Halbmesser bc nach dem Mittelpunkte c und von c nach a zurückgeleitet wird. Es soll die elektromotorische Kraft berechnet werden, welche von diesem Strome auf einen oder mehrere concentrische Kreise def ausgeübt wird, während das bewegliche Stromstück bc einen Kreis um c beschreibt, oder genauer, während das Ende b des beweglichen Stromstücks bc den Bogen abz durchläuft, welcher um den beliebig kleinen Zwischenraum za kleiner ist, als die ganze Peripherie. Es sind hierbei dreierlei Arten von elektromotorischen Kräften zu unterscheiden, nämlich 1) diejenigen elektromotorischen Kräfte, welche von den Elementen des beweglichen Stromstücks bc ausgeübt werden; 2) diejenigen elektromotorischen Kräfte, welche die am Ende des Bogens ab in Folge des Fortrückens des beweglichen Stromstücks bc neu eintretenden Stromelemente ausüben; 3) diejenigen elektromotorischen Kräfte, welche die an der Gleitstelle b von dem Bogen ab zu dem Halbmesser bc, oder von bc zu ba übergehende Elektricität in Folge der Aenderung ihrer Geschwindigkeit, welche sie daselbst erleidet, ausübt.

Was die erste Art von elektromotorischen Kräften betrifft, so wird nach Art. 30 S. 367 der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen die elektromotorische Kraft eines Elements α des beweglichen Stromstücks bc auf ein Element α' des inducierten Leiters def durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}\, i \left(\sin\theta \sin\eta \cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\eta\right) . \alpha v \cos\theta'.$$

Die a. a. O. gegebene Erklärung der Buchstaben erhellt aus der Anwendung auf den vorliegenden Fall von selbst. Es sei nämlich C der Mittelpunkt des Kreisbogens $A'A$, durch welchen der inducierende Strom i von A' nach A geht, und der bewegliche Radius $CA = R$ bilde das bewegliche Stromstück, durch welches derselbe Strom i von A nach C geht. Das inducierende Element α liege in diesem Radius in der Entfernung ϱ vom Mittelpunkte C. Das inducierte Element α' sei ein Element eines concentrischen Kreises, dessen Halbmesser $= R'$ ist, und der bewegliche Radius CA bilde mit dem durch α' gelegten Radius den Winkel $\varphi = ACa'$. r ist die von α nach α' gezogene Gerade, mit welcher die Richtung des Stroms in α, nämlich αC den Winkel $\alpha'\alpha C = \theta$ macht. Es leuchtet nun ferner ein, weil die Induction bloss von der relativen Bewegung der beiden Elemente α und α' gegen einander abhängt, dass statt der Drehung von α um den Mittelpunkt C, wobei α' unverrückt bliebe, eine im Bogenwerthe gleiche, der Richtung nach entgegengesetzte Drehung von α' um denselben Mittelpunkt C gesetzt werden kann, wobei α unverrückt bleibt. Man setze also hiernach, dass das Element α' nach der Richtung der negativen Tangente $\alpha'B'$ mit der Geschwindigkeit v bewegt werde. Diese Richtung bildet mit der verlängerten r, d. i. mit $\alpha'D$ den Winkel $D\alpha'B' = \eta$. Da ferner α' selbst ein Element des Kreises ist, dessen Richtung mit der positiven Kreistangente $\alpha'B$ zusammenfällt, so ist der Winkel, den seine Richtung mit der verlängerten r macht, $\theta' = \eta + \pi$. Der Winkel ε der beiden Ebenen endlich, welche durch r parallel der Stromrichtung in α und parallel der Richtung, in welcher α' verschoben wird, gelegt werden, ist $\varepsilon = 0$, wenn θ und η entweder beide kleiner oder beide grösser als π sind, oder $\varepsilon = \pi$, wenn der eine von den beiden Winkeln θ, η kleiner, der andere grösser als π ist. Setzt man daher für θ oder η, sobald sie grösser als π sind, ihre Ergänzungswinkel zu 2π, so wird immer $\cos \varepsilon = +1$. Man erhält hiernach für obi-



gen Ausdruck

$$+\frac{\alpha\alpha'}{rr}\,i\left(\sin\theta\sin\theta'-\tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\theta'\right).\,av\cos\theta',$$

worin der Werth von θ immer kleiner, der von θ' grösser als π ist, ferner:

$$\begin{aligned} rr &= R'R'+\varrho\varrho-2R'\varrho\cos\varphi\\ r\sin\theta &= R'\sin\varphi\\ r\cos\theta &= \varrho-R'\cos\varphi\\ r\sin\theta' &= \varrho\cos\varphi-R'\\ r\cos\theta' &= -\varrho\sin\varphi. \end{aligned}$$

Setzt man ausserdem $\alpha=-d\varrho$ und $\alpha'=R'd\varphi$, so erhält man folgenden Ausdruck:

$$+\tfrac{1}{2}\,avi\,.\,R'\sin\varphi^2 d\varphi\,.\left(1-\frac{3R'}{rr}(R'-\varrho\cos\varphi)\right)\frac{\varrho d\varrho}{r^3}\,.$$

Setzt man hierin $rr=R'R'+\varrho\varrho-2R'\varrho\cos\varphi$, so findet man

$$\int\left(1-\frac{3R'}{rr}(R'-\varrho\cos\varphi)\right)\frac{\varrho d\varrho}{r^3}=-\frac{\varrho\varrho}{r^3}+\text{Const.}$$

Es ist daher die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche sämmtliche Elemente des beweglichen Stromstücks von $\varrho=R$ bis zu $\varrho=0$ auf das inducierte Element α' ausüben, wenn $R'R'+RR-2R'R\cos\varphi=r'r'$ gesetzt wird,

$$+\tfrac{1}{2}\,avi\,.\,R'RR\cdot\frac{\sin\varphi^2 d\varphi}{r'^3}\,;$$

endlich die Summe der elektromotorischen Kräfte für alle inducierten Elemente des Kreises *def*, d. h. für alle Elemente von $\varphi=0$ bis $\varphi=2\pi$:

$$+\tfrac{1}{2}\,avi\,.\,R'RR\,.\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi^2 d\varphi}{r'^3}\,.$$

Das Product dieses Ausdrucks in die Zeit t ist der Integralwerth der Summe der elektromotorischen Kräfte für die Zeit t, oder für den vom Inducenten in dieser Zeit durchlaufenen Weg vt. Setzt man folglich $vt=2n\pi R'$, d. h. gleich der n fachen Länge der Kreisbahn, so erhält man den Integralwerth der elektromotorischen Kraft für n Umdrehungen des Inducenten:

$$+\,ai\,.\,n\pi RRR'R'\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi^2 d\varphi}{r'^3}\,.$$

Besteht der inducierte Leiter nicht bloss aus einer, sondern aus m Umwindungen, deren Halbmesser nicht merklich verschieden sind, so erhält

man die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche durch n Umdrehungen des Inducenten auf alle m Umwindungen des inducierten Leiters ausgeübt werden:

$$+ ai \,.\, mn\pi RRR'R' \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi^2 d\varphi}{r'^3}$$

worin $r'r' = R'R'RR - 2R'R \cos\varphi$ zu setzen ist. Setzt man $R = kR'$, wo $k < 1$ ist, so erhält man

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{R'^3}\left\{\frac{1}{(1+kk)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3k\cos\varphi}{(1+kk)^{\frac{5}{2}}} + \frac{15}{2}\frac{kk\cos\varphi^2}{(1+kk)^{\frac{7}{2}}} + \frac{35}{2}\frac{k^3\cos\varphi^3}{(1+kk)^{\frac{9}{2}}} + \frac{315}{8}\frac{k^4\cos\varphi^4}{(1+kk)^{\frac{11}{2}}} + \ldots\right\}$$

folglich

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi^2 d\varphi}{r'^3} = \frac{\pi}{(1+kk)^{\frac{3}{2}}R'^3}\left\{1 + \frac{15}{8}\frac{kk}{(1+kk)^2} + \frac{315}{64}\frac{k^4}{(1+kk)^4} + \ldots\right\}$$

Setzt man hierin wieder für k seinen Werth $\frac{R}{R'}$ und

$$R_0 = \frac{RRR'R'}{(RR+R'R')^{\frac{3}{2}}}\cdot\left\{1 + \frac{15}{8}\left(\frac{RR'}{RR+R'R'}\right)^2 + \frac{315}{64}\left(\frac{RR'}{RR+R'R'}\right)^4 + \ldots\right\}$$

so erhält man für die gesuchte elektromotorische Kraft den Ausdruck

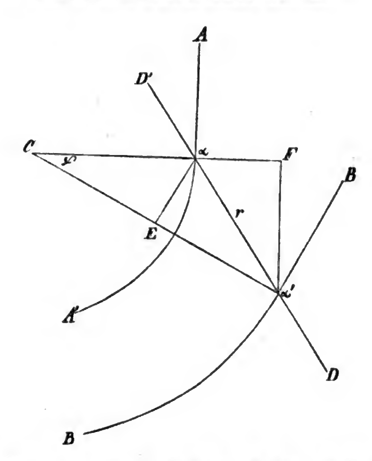
$$+ ai \,.\, mn\pi\pi R_0\,,$$

was zu beweisen war.

Was die zweite Art von elektromotorischen Kräften betrifft, so wird nach Art. 30, S. 367 der ersten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen die elektromotorische Kraft, welche ein Element des unbeweglichen Stromstücks α, in welchem die Stromstärke im Zeitelemente dt um di wächst, auf ein induciertes Element α' ausübt, durch folgenden Ausdruck bestimmt:

$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}\,a\cos\theta\cos\theta'\cdot\frac{di}{dt}\,\cdot$$

Es sind nun α und α' Elemente zweier Kreisbogen $A'\alpha$ und $B'\alpha'$, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt C und die Halbmesser R und R' haben. $A'\alpha$ ist das unbewegliche, αC das bewegliche Stück des inducierenden Stroms; der Winkel $\alpha C\alpha' = \varphi$ ist der Winkel, welchen das bewegliche Stromstück mit dem Halbmesser des inducierten Elements α' bildet; α ist das in die Stromkette neu eintretende Leiterelement, während das Ende des beweglichen Stromstücks um $Rd\varphi = \alpha$ fortschreitet. Die Stromrichtung αA im Elemente α macht mit der Richtung $\alpha\alpha' = r$



den Winkel $D'\alpha A + \pi = \theta$; die Richtung $\alpha' B$ des inducierten Elements α' macht mit der Richtung der verlängerten r, d. h. mit $\alpha' D$ den Winkel $\alpha\alpha' B + \pi = \theta'$. Fällt man von α auf $C\alpha'$ das Perpendikel αE, und von α' auf die verlängerte $C\alpha$ das Perpendikel $\alpha' F$, so ist $\alpha\alpha' F = D'\alpha A = \theta - \pi$ und $\alpha'\alpha E = \alpha\alpha' B = \theta' - \pi$; folglich die Perpendikel

$$\alpha' F = R' \sin\varphi = r \cos \alpha\alpha' F = - r \cos\theta$$
$$\alpha E = R \sin\varphi = r \cos \alpha'\alpha E = - r \cos\theta'.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\alpha \cos\theta \cos\theta' = \frac{RRR'}{rr} \sin\varphi^2 d\varphi\,.$$

Setzt man diesen Werth in den obigen Ausdruck der elektromotorischen Kraft, so erhält man dafür:

$$- \frac{\alpha'}{2} \frac{RRR'}{r^3} \sin\varphi^2 d\varphi \,.\, a \frac{di}{dt}\,.$$

Setzt man $\frac{di}{dt} = \frac{i}{t}$, wo t die Zeit bezeichnet, in welcher die Stromstärke im inducierenden Elemente $\alpha = R d\varphi$ von 0 bis i wächst; so ist die elektromotorische Kraft des mit der Stromstärke i neu eintretenden Stromelements α das Product dieses Ausdrucks in die Zeit t:

$$- \frac{\alpha'}{2} ai \cdot \frac{RRR'}{r^3} \sin\varphi^2 d\varphi$$

und die Summe der elektromotorischen Kräfte für alle während einer Umdrehung des beweglichen Stromstücks neu eintretenden Stromelemente:

$$-\frac{\alpha'}{2}\,ai\,.\,RRR'\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi^2 d\varphi}{r^3} = -\frac{\alpha'}{2}\,ai\,.\,\pi\,\frac{R_0}{R'}\,,$$

wenn

$$R_0 = \frac{RRR'R'}{(RR+R'R')^{\frac{3}{2}}}\cdot\left\{1+\frac{15}{8}\left(\frac{RR'}{RR+R'R'}\right)^2+\frac{315}{64}\left(\frac{RR'}{RR+R'R'}\right)^4+\ldots\right\}$$

gesetzt wird. Diese Summe ist für alle inducierten Elemente desselben Kreises, zu welchem α' gehört, ihrer Länge proportional. Bildet also der inducierte Leiter m Umwindungen, deren Halbmesser nahe $= R'$ sind, deren Länge folglich $= 2m\pi R'$ ist, so erhält man, wenn man diese Länge für α' in den obigen Ausdruck setzt, die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche von allen während einer Umdrehung des beweglichen Stromstücks neu eintretenden Stromelementen auf den ganzen inducierten Leiter ausgeübt werden, oder, wenn man noch mit n multipliciert, dieselbe Summe für n Umdrehungen des beweglichen Stromstücks, vorausgesetzt, dass die Wirkung des plötzlichen Verschwindens aller eingetretenen Stromelemente am Ende jeder Umdrehung durch Lösung der inducierten Kette in diesem Augenblicke aufgehoben werde. Die gesuchte elektromotorische Kraft ist also

$$-\,ai\,.\,mn\pi\pi R_0\,,$$

was zu beweisen war.

Es bleibt also nur noch die dritte Art von elektromotorischen Kräften zu betrachten übrig, nämlich diejenigen, welche die an der Gleitstelle von dem unbeweglichen zum beweglichen Stromstück übergehende Elektricität in Folge der Aenderung ihrer Geschwindigkeit, welche sie bei diesem Uebergange erleidet, ausübt. Alle hieraus sich ergebenden Elementarwirkungen sind aber, wie Art. 39 bewiesen worden ist, den aus der zweiten Art der elektromotorischen Kräfte sich ergebenden gleich; folglich findet diese Gleichheit auch für die Summe statt, für die also gleichfalls der soeben gefundene Ausdruck gültig ist.

Die ganze elektromotorische Kraft für die Dauer von n Umdrehungen des Inducenten ist die Summe der drei gefundenen Ausdrücke, von denen der erste den beiden letzten entgegengesetzt gleich ist, und ist also

$$-\,ai\,.\,mn\pi\pi R_0\,;$$

Bezeichnet man endlich mit T die Dauer von n Umdrehungen des Inducenten und mit w den Widerstand des inducierten Leiters, so erhält man zur Berechnung der Stärke i' des inducierten Stroms, im Vergleich mit der Stärke i des inducierenden Stroms, welcher eine Gleitstelle hat, folgende Gleichung:

$$\frac{i'}{i} = -\frac{a}{w} \cdot mn\pi\pi\frac{R_0}{T},$$

wo das negative Vorzeichen des zweiten Gliedes bedeutet, dass die Richtung des inducierten Stroms der Richtung des inducierenden entgegengesetzt ist, vorausgesetzt, dass durch die Drehung des Inducenten dem unbeweglichen Stromstücke immer neue Elemente zugefügt werden. Bei umgekehrter Drehung des Inducenten dagegen, durch welche dem unbeweglichen Stromstücke Elemente entzogen würden, würde, wie von selbst einleuchtet, das zweite Glied der Gleichung den entgegengesetzten Werth erhalten.

Inhalt.

Beilagen.

ELEKTRODYNAMISCHE
MAASSBESTIMMUNGEN
INSBESONDERE ÜBER
DIAMAGNETISMUS

VON

WILHELM WEBER.

Der Diamagnetismus ist in den wenigen Jahren seit seiner Entdeckung Gegenstand vielseitiger Forschungen gewesen, welche nicht bloss zu einer Erweiterung seines Gebiets, sondern auch zur Entdeckung und Untersuchung mehrerer anderen neuen Naturerscheinungen geführt haben. Das Interesse an diesen Forschungen ist dadurch immer mehr gewachsen. Jedoch bedarf die Lehre vom Diamagnetismus noch eines Fundamentalgesetzes, wenn sie der Lehre vom Magnetismus, Elektromagnetismus und von der Magnetelektricität, womit sie innigst zusammen zu hängen scheint, gehörig begründet zur Seite gestellt werden soll. Auch zu diesem Fundamentalgesetze zu gelangen, schien nun gleich anfangs eine Aussicht dadurch eröffnet zu sein, dass es Faraday gelungen war, die beiden hauptsächlichsten von ihm entdeckten Thatsachen, nämlich die diamagnetische Abstossung und die äquatoriale Stellung diamagnetischer Körper in der Nähe eines starken Magnets, unter einen sehr einfachen und allgemeinen Ausdruck zu bringen, der, wenn er auch nicht selbst als Fundamentalgesetz betrachtet werden konnte, doch in nächster und engster Beziehung mit einem solchen stehen zu müssen schien. Faraday führte nämlich diese diamagnetischen Wirkungen auf die Gesetze veränderlicher Magnete (Eisenmagnete) zurück, indem er die Wirkungen diamagnetischer Körper den Wirkungen von magnetischem Eisen verglich, worin Nord- und Südmagnetismus mit einander vertauscht wären. Die hiernach vorhandene Relation des Diamagnetismus zum Magnetismus bildet das von ihm aufgestellte Gesetz der diamagnetischen Polarität.

Um keine Ungewissheit über den Sinn zu lassen, welcher mit dem Worte magnetische oder diamagnetische Polarität zu verbinden sei, möge hier sogleich eine Erklärung desjenigen Sinnes, in welchem dieser Ausdruck in folgender Abhandlung genommen wird, bei-

gefügt werden. Es ist bekannt, dass Gauss bewiesen hat, dass alle Wirkungen, die irgend ein Magnet (oder ein Körper, welcher geschlossene galvanische Ströme enthält) auf andere Körper ausübt, auf die Wirkungen zweier magnetischen Fluida zurückgeführt werden können, welche auf seiner Oberfläche auf eine bestimmte Weise vertheilt sind. Gauss hat diese Vertheilung die ideale Vertheilung der magnetischen Fluida genannt. Demnach soll nun in der folgenden Abhandlung unter magnetischer oder diamagnetischer Polarität eines Körpers ein solcher Zustand desselben verstanden werden, vermöge dessen er Wirkungen auf andere Körper ausübt, welche so beschaffen sind, dass sie sämmtlich aus einer idealen Vertheilung magnetischer Fluida erklärt werden können.

In diesem Sinne folgt also aus dem Gesetze der diamagnetischen Polarität, dass alle Wirkungen eines diamagnetischen Körpers sich aus einer idealen Vertheilung der beiden magnetischen Fluida auf seiner Oberfläche erklären lassen. Da nun aus dem Gesetze der magnetischen Polarität derselbe Ausspruch sich für magnetische Körper ergiebt, so folgt, dass, wenn es in dem angegebenen Sinne wirklich eine diamagnetische Polarität giebt,

> diamagnetische Körper von magnetischen sich nicht wesentlich durch ihre Wirkungen, sondern bloss durch die Art und Weise ihrer Entstehung oder Veränderung unterscheiden;

denn vorausgesetzt, dass die von ihrer Entstehung (oder Veränderung) abhängige ideale Vertheilung gegeben ist, so sind auch alle Wirkungen gegeben, gleichgültig ob es Magnetismus oder Galvanismus oder Diamagnetismus sei, an dessen Stelle jene ideale Vertheilung gesetzt worden.

Soll nun aber das Gesetz der diamagnetischen Polarität wirklich eine allgemeine Geltung haben, so darf seine Anwendbarkeit nicht bloss auf diejenigen Erscheinungen beschränkt bleiben, welche Faraday zuerst entdeckt hatte, die nämlich auf der Wechselwirkung des diamagnetischen Körpers mit demjenigen Magnet, durch dessen Einfluss er diamagnetisch geworden war, beruhen, sondern sie muss auf alle Arten von Erscheinungen erstreckt werden können, die ein Körper durch eine bestimmte Vertheilung seiner magnetischen Fluida hervorbringen kann, wenn er auf andere Körper wirkt. Alle diese verschie-

denen Arten von Erscheinungen werden eingetheilt in rein magnetische, elektromagnetische und magnetelektrische. Es war daher von besonderem Interesse, das wirkliche Vorhandensein dieser verschiedenen Wirkungsarten thatsächlich festzustellen. Die zweite Wirkung würde nämlich, wenn sie bei diamagnetischen Körpern wirklich vorhanden wäre, den Fundamentalversuch des Elektrodiamagnetismus, die dritte den Fundamentalversuch der Diamagnetelektricität (oder der diamagnetischen Induction elektrischer Ströme) geben. Fänden dagegen nicht alle diese Wirkungen statt, so hiesse das so viel, als das Gesetz der diamagnetischen Polarität wäre nicht allgemein gültig, wodurch es seine ganze Wichtigkeit und Bedeutung in theoretischer Beziehung verlöre.

Ueber den Thatbestand dieser verschiedenen Wirkungsarten diamagnetischer Körper stimmen nun die von verschiedenen Beobachtern gefundenen Resultate noch nicht mit einander überein, was leicht erklärlich ist, wenn man bedenkt, wie schwach nothwendiger Weise namentlich die letzteren Arten von Wirkungen sein müssen, und wie leicht es daher geschehen kann, dass es nicht allen Beobachtern sie darzustellen gelingt, zumal wenn sie nicht alle ganz gleiche Instrumente gebrauchen. Namentlich ist es Faraday nicht gelungen, sich von dem Vorhandensein der letzten (inducirenden) Wirkung diamagnetischer Körper zu überzeugen, ungeachtet er auf die Wiederholung der darüber gemachten Versuche grosse Mühe und Sorgfalt verwendet hat.

Wie schwach zum Beispiel die Wirkungen eines diamagnetischen Körpers auf eine Boussole sein müssen, leuchtet daraus ein, dass selbst die von starken Elektromagneten auf einen von ihnen diamagnetisirten Körper auch in kleiner Entfernung ausgeübten Kräfte sehr schwach sind, obgleich sie den grossen Kräften der Elektromagnete proportional sind. Betrachtet man nun aber, statt der Wechselwirkung eines in gegebener Weise diamagnetisirten Körpers mit so kraftvollen Elektromagneten, die Wechselwirkung desselben diamagnetischen Körpers mit einer schwachen Boussole, so leuchtet ein, dass aus dieser letzteren Wechselwirkung bei gleichem Abstande eine Kraft hervorgeht, welche in dem Verhältnisse der magnetischen Kraft jener Elektromagnete zu der dieser Boussole noch kleiner ist als die aus der ersten Wechselwirkung entsprungene Kraft, die selbst schon sehr klein war.

Unter diesen Verhältnissen, wo man *a priori* übersehen kann, dass

die fraglichen Wirkungen, wenn sie vorhanden sind, ausserordentlich schwach sein müssen, bedarf es besonderer Vorkehrungen, um sie von andern kleinen Wirkungen genau zu unterscheiden und zu einem sicheren Resultate über ihr Dasein zu gelangen. Es reicht nicht hin, dass man die Beobachtungsmittel zu schärfen und zu verfeinern sucht, sondern man muss sich auch von der wirklich erreichten Schärfe und Feinheit dieser Mittel, und von der Stärke der fraglichen Wirkungen, welche damit beobachtet werden sollen, nähere Kenntniss zu verschaffen suchen, um darüber gewiss zu werden, dass das Beobachtete dem Gesuchten wirklich entspricht, — kurz, die Beobachtung so schwacher Wirkungen bedarf, um zu sicheren Resultaten zu führen, der quantitativen Controle, an der es bisher gänzlich gefehlt hat. Namentlich kann die Frage über das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein einer diamagnetischen Induction elektrischer Ströme, um die es sich vorzüglich handelt, auf dem Wege des Versuchs nur dann sicher entschieden werden, wenn die Stärke des Stroms, welcher diamagnetisch inducirt werden müsste, d. i. der Gegenstand, um den es sich handelt, einigermaassen ihrer Grösse nach vorausbestimmt ist, weil nur hiernach die Mittel bemessen werden können, welche zur Prüfung nothwendig sind und genügen.

Um nun aber zu einer solchen quantitativen Controle der Beobachtungen zu gelangen, muss diejenige Betrachtung, welche auf die Vermuthung einer diamagnetischen Induction elektrischer Ströme geführt hat, genauer verfolgt werden. Nach dieser Betrachtung wird nämlich angenommen, dass alle Wirkungen eines diamagnetischen Körpers aus einer bestimmten Vertheilung der beiden magnetischen Fluida auf seiner Oberfläche erklärt werden können, und dass umgekehrt ein diamagnetischer Körper alle Wirkungen der so vertheilten magnetischen Fluida ausübe. Hieraus folgt nun, das jedem diamagnetischen Körper ein bestimmtes magnetisches Moment müsse beigelegt, und dass jede Art von diamagnetischer Wirkung müsse benutzt werden können, um dieses magnetische Moment seiner Grösse nach zu bestimmen, und dass sich daraus wieder alle andern Arten von diamagnetischen Wirkungen ihrer Grösse nach entweder genau oder wenigstens näherungsweise müssen vorausbestimmen lassen. Es würde also durch diese Betrachtung, wenn sie richtig ist, der Weg gebahnt sein, von bekannten diamagnetischen Erscheinungen auf unbekannte zu schliessen

und dieselben ihrer Grösse nach vorauszubestimmen, so dass jeder Versuch, welcher die dadurch bedingte Feinheit nicht besitzt, sogleich im Voraus verworfen werden kann; jeder Versuch dagegen, welcher bei solcher Feinheit doch kein Resultat, oder ein ganz verschiedenes, ergäbe, zur Widerlegung der ganzen Betrachtung genügen würde. Eine gründliche Entscheidung ist nur auf diesem Wege möglich.

Diesen Weg habe ich nun in der folgenden Untersuchung einzuschlagen versucht und glaube so weit gelangt zu sein, dass die dadurch gewonnenen Resultate keinem Zweifel unterliegen, wenn auch zu wünschen bleibt, dass die quantitativen Bestimmungen künftig noch grössere Präcision erlangen. Wäre mir ein reicheres Material vergönnt gewesen, so würde ich meine Beobachtungsmittel leicht bedeutend haben verstärken und dadurch den quantitativen Bestimmungen schon jetzt einen höheren Grad von Präcision verschaffen können, welcher in jeder Beziehung wünschenswerth bleibt, auch wenn das Hauptresultat hinreichend festgestellt erscheint.

Elektrodiamagnetismus und Messung des Moments eines Elektrodiamagnets.

1.

Wie Eisenmagnete in gewöhnliche (deren Magnetismus vom Einfluss anderer Magnete herrührt) und in Elektromagnete eingetheilt werden, ebenso können auch Diamagnete in gewöhnliche (deren Diamagnetismus von magnetischem Einfluss herrührt) und in Elektrodiamagnete eingetheilt werden. Nur ist zwischen Elektromagneten und Elektrodiamagneten darin ein grosser für die Beobachtung wichtiger Unterschied, dass wenn man gleiche galvanische Ströme um einen Eisenstab und einen Wismuthstab herumführt, das Eisen magnetische Kräfte in die Ferne ausübt, gegen welche die Kräfte des galvanischen Stroms fast verschwinden, während die vom Wismuth ausgeübten diamagnetischen Kräfte gegen die des galvanischen Stroms verschwinden. Hierin liegt der Grund, dass das Vorhandensein des Elektrodiamagnetismus schwer nachzuweisen ist. Diese Schwierigkeit kann aber überwunden werden und es ergiebt sich dann sogar, dass die Kraft eines Elektrodiamagnets sich zu wirklichen Maassbestimmungen weit besser eignet als die eines gewöhnlichen Diamagnets. Doch

bedarf es einer besonderen Einrichtung, um reine Wirkungen einer solchen elektrodiamagnetischen Kraft darzustellen und den Einfluss des galvanischen Stroms dabei ganz zu beseitigen. Ich will hier nun zuerst die Einrichtung beschreiben, mit der ich die reine Wirkung eines Elektrodiamagnets dargestellt und die Grösse seiner Kraft mit der eines Elektromagnets verglichen habe; sodann werde ich die Resultate der damit gemachten Versuche folgen lassen.

2.

Elektrodiamagnetischer Messapparat.

Es sollte die Wirkung beobachtet werden, welche ein Elektrodiamagnet auf eine in einiger Entfernung davon aufgestellte Magnetnadel ausübt. Es ist schon oben bemerkt worden, wie klein die Wirkung sei, welche man von der von einem diamagnetischen Körper auf eine gewöhnliche Magnetnadel ausgeübten Kraft zu erwarten habe, zumal wenn diese Nadel vom Diamagnete einige Zoll entfernt ist. Je kleiner die zu erwartende Wirkung war, desto feinere Methoden der Beobachtung mussten gebraucht werden. Es wurde daher ein kleines Magnetometer angewendet, dessen Nadel 100 Millimeter lang und mit Spiegel versehen war, um nach der Gauss'schen Methode mit Fernrohr und Skala beobachtet zu werden. Es liessen sich damit Ablenkungen der Nadel von einzelnen Bogenminuten genau messen. Die Empfindlichkeit einer solchen Nadel hängt, wie bekannt, von der Grösse der horizontalen Richtkraft ab, die der Erdmagnetismus auf sie ausübt. Die Schwingungsdauer der Nadel betrug bei ungeschwächter Richtkraft des Erdmagnetismus 7,687 Secunden; nun wurde aber diese Richtkraft, um die Empfindlichkeit zu steigern, so vermindert, dass die Schwingungsdauer auf 18,45 Secunden wuchs, was auf sehr einfache Weise durch einen starken Magnetstab Fig. 2 *SN* bewirkt wurde, welcher, mit verkehrten Polen, in der Richtung der Nadel *NS* in angemessener Entfernung fest aufgestellt wurde. Durch eine kleine Verrückung dieses Magnetstabes konnte die Empfindlichkeit der Nadel ganz beliebig regulirt werden; doch wird durch zu grosse Empfindlichkeit die Präcision der Beobachtung leicht gefährdet. Ausserdem ergab sich, dass der oben angegebene Grad der Empfindlichkeit genügte. Uebrigens war die Nadel mit einem kupfernen Dämpfer versehen, welcher eine Abnahme der Schwin-

gungsbögen in dem Verhältnisse von 3 : 2 bewirkte, oder genauer das *decrementum logarithmicum* war

$$= 0{,}17887.$$

Von dieser Beschreibung des magnetischen Messapparats gehen wir zur Darstellung des Elektrodiamagnets selbst und seiner Aufstellung über. Der Elektrodiamagnet bestand erstens aus zwei gleichen Wismuthcylindern, 92 Millimeter lang, 16 Millimeter dick, beide zusammen 343500 Milligramm schwer, welche, wie Fig. 1. *aa* darstellt, in

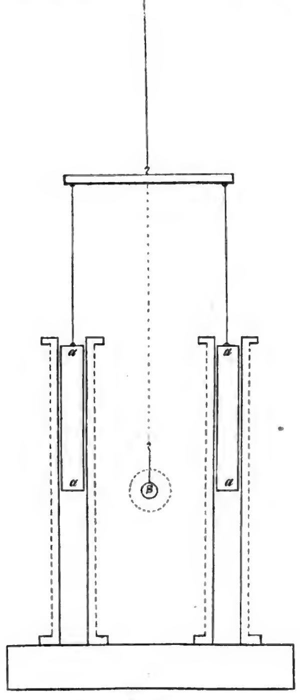


Fig. 1.

verticaler Stellung und 100 Millimeter Abstand fest mit einander verbunden waren und durch eine einfache Hebelvorrichtung höher oder tiefer gestellt werden konnten; zweitens aus zwei spiralförmig aufgewundenen kupfernen Leitungsdrähten. Jede dieser Spiralen war 190 Millimeter lang, hatte 17 Millimeter inneren Durchmesser und bestand aus 4 Lagen, jede Lage aus 146 Umwindungen. Sie waren vertical wie Säulen, 100 Millimeter von einander, auf einem Statife befestigt und ihre Drähte so mit einander verbunden, dass ein Strom, welcher von der einen zur andern ging, sie in entgegengesetztem Sinne durchlief. Beide Wismuthcylinder konnten zugleich in diese beiden Spiralen herabgelassen werden und wurden dann durch den galvanischen Strom in Elektrodiamagnete verwandelt, deren einer seinen Nordpol nach oben, der andere nach unten kehrte. Zur Darstellung des Stroms dienten 6 Grove'sche Becher.

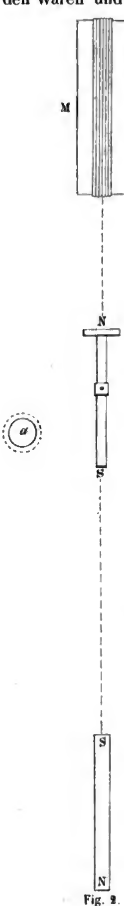


Fig. 2.

Diese beiden Spiraleu wurden nun so aufgestellt, dass eine durch die Nadel gelegte Horizontalebene sie halbirte; das Südende *S* der Nadel schwebte genau in der Mitte zwischen beiden Spiralen. Fig. 2 stellt die gegenseitige Lage der Nadel *NS* und der beiden Spiralen um *aa* im horizontalen Durchschnitte dar. Die beiden Wismuthcylinder wurden entweder in den Spiralen so tief herabgesenkt, dass ihr oberes Ende bis zum Niveau der Nadel herauf, oder sie wurden so hoch gehoben, dass ihr unteres Ende bis zum Niveau der Nadel herabreichte.

Die Gründe dieser Einrichtung sind folgende. Es kam erstens darauf an, dass der galvanische Strom, welcher durch beide Spiralen ging, gar keine Wirkung unmittelbar auf die Nadel ausübte, trotz seiner Stärke

und Nähe und trotz der Empfindlichkeit der Nadel. Durch die symmetrische Stellung der beiden Spiralen halb über halb unter der Horizontalebene der Nadel wurde die Ablenkung aufgehoben; durch die gleiche Entfernung der beiden Spiralen von der Nadel und durch die entgegengesetzte Richtung ihres Stromes wurde auch die senkrechte Kraft aufgehoben, welche sonst die Nadel in verticale Schwankung setzen würde. Da aber eine vollkommene Symmetrie dieser Verhältnisse praktisch nicht erreichbar ist, so bedurfte es noch einer besondern Einrichtung, um die unvermeidlichen kleinen Abweichungen zu compensiren. Dazu diente ein dritter Leitungsdraht, welcher in 18 Windungen um einen 4eckigen Rahmen *M* gewunden war und in die Kette eingeschaltet wurde. Dieser Rahmen war 244 Millimeter lang, 146 Millimeter hoch und wurde vertical in der Ebene der Nadel aufgestellt. Derselbe Strom, welcher durch die beiden Spiralen ging, übte, indem er auch diesen dritten Draht durchlief, ein Drehungsmoment auf die Nadel aus, welches durch Näherung oder Entfernung des Rahmens leicht vergrössert oder verkleinert werden konnte, bis die beabsichtigte Compensation vollkommen erreicht war.

Zweitens kam es darauf an, dass die beiden Wismuthcylinder abwechselnd in die untere Stellung, wo ihre oberen Enden stärker auf die Nadel wirkten, und in die obere Stellung, wo ihre unteren Enden stärker wirkten, gebracht werden konnten, ohne dass die Stärke ihres Diamagnetismus sich änderte und ohne dass durch diese Bewegung im Wismuth als Leiter ein Strom inducirt wurde. Hierbei trat nun der Vorzug des Elektrodiamagnets vor einem gewöhnlichen hervor. Denn der gewöhnliche, durch die Nähe eines Magnetpols hervorgebrachte, Diamagnetismus ändert sich mit jeder Verrückung seines Trägers und zugleich werden dabei in diesem Träger, wenn er ein Leiter ist, stets Ströme inducirt. Ganz anders verhält es sich mit einem Elektrodiamagnete, wo der diamagnetische Wismuthcylinder von allen Seiten von der galvanischen Spirale umschlossen ist. Ist diese Spirale gleichförmig gewunden und so lang, dass der Wismuthcylinder stets von den Enden der Spirale entfernt bleibt, so ergiebt sich die elektromagnetische Kraft der Spirale für alle Theile des Raumes, in denen der Wismuthcylinder sich befindet, nach bekannten elektromagnetischen Gesetzen, nahe constant, und der Wismuthcylinder kann also in dem mittleren Raume der

Spirale hin und her geschoben werden, ohne dass sein Diamagnetismus verändert, und ohne dass galvanische Ströme in demselben als Leiter inducirt werden. Dazu kommt noch, dass die ganze Wismuthmasse darin gleichmässig diamagnetisirt wird, welches bei der gewöhnlichen, durch die Nähe eines Magnetpols hervorgebrachten Diamagnetisirung nicht der Fall ist, weil hier diejenigen Theile, welche dem Pole am nächsten liegen, weit stärker werden, als die entfernteren, ein Umstand, welcher alle Maassbestimmungen verhindert.

Fand nun bei der beschriebenen Aufhebung kein directer Einfluss des Stroms auf die Nadel statt, und wurde in den Wismuthcylindern als Leitern bei ihrer Auf- und Abschiebung kein Strom inducirt, so musste die Ablenkung der Nadel, welche beobachtet wurde, als eine reine Wirkung der diamagnetischen Kraft der Wismuthstäbe betrachtet werden, und diese Ablenkung musste nach dem Gesetze der diamagnetischen Polarität positiv oder negativ sein, je nachdem die Wismuthstäbe ihre untere oder obere Stellung in den Drahtspiralen erhielten. Es ergiebt sich daraus der für die schärfere Beobachtung günstige Umstand, dass sich diese Ablenkung durch Multiplication verstärken lässt, indem man die Stellung der Wismuthstäbe immer in dem Augenblicke wechselt, wo die Nadel das Ende ihres Schwingungsbogens erreicht, so lange, bis endlich durch die Wirkung des Dämpfers, womit die Nadel versehen ist, ihr Schwingungsbogen während jeder Schwingung um eben so viel abnimmt, als er durch die diamagnetische Wirkung der Wismuthstäbe zunimmt. Der zugehörige Grenzwerth lässt sich aus allen nach einander beobachteten Schwingungsbögen mit grosser Schärfe berechnen und kann bei bekannter Dämpfung als Maass der Stärke des Elektrodiamagnetismus der Wismuthstäbe dienen.

Setzt man alsdann für die Wismuthstäbe einen Eisencylinder von gleicher Länge und wiederholt damit die nämlichen Versuche, so gelangt man zu einer Vergleichung der Stärke eines Elektrodiamagnets mit der eines Elektromagnets. Nur leuchtet ein, dass man bei der grossen Empfindlichkeit des Apparats die Wirkung des Elektromagnets dadurch möglichst schwächen muss, dass man einen sehr dünnen Eisenstab gebraucht. Bei den folgenden Versuchen war der Eisenstab so dünn, dass sein Gewicht nur den 59200sten Theil von dem Gewichte der beiden Wismuthstäbe betrug, und auch dann ergab

sich seine Wirkung noch viel stärker, als die der beiden Wismuthstäbe zusammen.

Endlich kam es drittens bei diesen Versuchen hauptsächlich noch darauf an, die Richtung der Ablenkung für jede Stellung der Wismuthstäbe zu bestimmen und mit der Richtung zu vergleichen, welche die Ablenkung bei gleicher Stellung des Eisenstäbchens hatte. Es wurde daher die Stellung der Stäbe für jede Schwingungsdauer bei den Beobachtungen bemerkt. Es ergab sich stets, wie die folgenden Versuche zeigen, dass die Ablenkung der Nadel, bei gleicher Stellung der Wismuth- und Eisenstäbe, in entgegengesetzter Richtung erfolgte, dass also, wie für gewöhnliche Diamagnete aus anderen Wirkungen schon bekannt ist, auch bei Elektrodiamagneten das nördliche und südliche magnetische Fluidum, unter gleichen Stromverhältnissen, auf entgegengesetzte Weise wie bei Elektromagneten vertheilt gedacht werden muss, was eben durch diese Versuche bewiesen werden sollte.

3.

Versuche und Messungen.

Die mit dem beschriebenen Apparate angestellten Versuche und Messungen sind von verschiedenen Beobachtern gemacht worden, um die Unsicherheit zu beseitigen, der bei so schwachen Wirkungen ein einzelner Beobachter leichter ausgesetzt erscheinen könnte. Ausser mir haben folgende Herren die Güte gehabt, dieselben Messungen an verschiedenen Tagen zu wiederholen, nämlich Professor Listing, Professor Sartorius von Waltershausen, Dr. von Quintus Icilius und Dr. Riemann. Ich werde beispielsweise statt des Protocolls meiner eigenen Messungen das Protocoll der von Herrn Professor Listing sehr sorgfältig gemachten Messungen hier vollständig mittheilen, indem ich nur bemerke, dass die meinigen sowohl wie alle anderen sämmtlich damit nahe übereinstimmen.

Göttingen 1851. Juni 21.

Beobachter: Herr Professor Listing.

Galvanischer Strom von 6 Grove'schen Platin-Zinkbechern.

1. Versuche mit den beiden Wismuthstäben.

Nr. der Schwingung.	Stellung der Stäbe.	Stand der Nadel am Anfange oder Ende jeder Schwingung.	Ruhestand der Nadel.	Schwingungsbogen der Nadel.
		500,0		
1.	oben	467,0	487,6	— 40,0
2.	unten	513,9	488,3	— 50,4
3.	oben	459,9	488,3	— 56,3
4.	unten	518,5	489,2	— 58,5
5.	oben	460,0	487,3	— 55,2
6.	unten	512,0	489,3	— 46,5
7.	oben	471,1	484,9	∓ 29,7
8.	oben	489,7	487,3	± 7,0
9.	unten	494,2	489,3	— 8,9
10.	oben	480,9	488,9	— 15,6
11.	unten	498,9	482,7	— 30,0
12.	oben	457,0	483,1	— 50,4
13.	unten	516,0	487,2	— 57,8
14.	oben	459,3	484,2	— 50,9
15.	unten	504,4	487,6	∓ 35,6
16.	unten	478,3	483,1	± 12,4
17.	oben	476,9	485,6	— 14,7
18.	unten	504,9	485,7	— 36,6
19.	oben	459,6	480,6	— 42,6
20.	unten	499,4	479,6	— 39,6
21.	oben	460,1	484,1	— 46,6
22.	unten	513,9	488,2	— 51,7
23.	oben	464,2	486,8	— 45,9
24.	unten	506,2	480,0	— 50,6
25.	oben	446,9	474,1	— 55,2
26.	unten	498,0	476,4	∓ 44,5
27.	unten	460,0	465,6	± 15,5
28.	oben	453,1	462,5	— 16,8
29.	unten	479,8	464,6	— 29,8
30.	oben	446,9	467,8	— 40,3
31.	unten	494,6	471,8	— 46,0
32.	oben	450,4	471,3	— 42,2
33.	unten	490,5	468,2	— 44,0
34.	oben	442,6		

2. Versuche mit einem Eisenstäbchen.

Um bei der Empfindlichkeit der Nadel die Wirkung des Eisens zu vermindern, wurde nur ein einfaches Stäbchen gebraucht und damit zwei Versuchsreihen gemacht, wobei das Stäbchen erst in der einen, dann in der andern Spirale auf- und abgeschoben wurde. Das Eisenstäbchen wog, bei gleicher Länge mit den Wismuthstäben, nur 5,8 Milligramm, d. i. 59200 Mal weniger als die beiden Wismuthstäbe zusammen. Dennoch war die Wirkung so stark, dass die Ablenkung nur ohne Multiplication einfach gemessen werden konnte.

Nr.	Erste Reihe.			
	Stellung des Eisenstäbchens.	Elongationen der Nadel.	Ruhestand der Nadel.	Mittel.
1.	unten	428,1 215,2 362,8 261,0	300,4 303,8 301,7	302,0
2.	oben	451,2 652,0 515,0 609,9 544,4	571,7 569,8 571,9 570,6	571,0
3.	unten	435,5 206,7 364,7 254,6 336,9	298,2 301,5 298,6 304,0	300,6
4.	oben	503,2 598,0 536,9	560,1 561,3	560,7

Nr.	Zweite Reihe.			
	Stellung des Eisenstäbchens.	Elongationen der Nadel.	Ruhestand der Nadel.	Mittel.
1.	oben	524,0 590,5 549,3	563,9 565,8	564,9
2.	unten	227,4 387,1 275,4 357,9	323,2 320,1 324,9	322,7
3.	oben	450,9 661,8 525,3 600,0	577,4 579,9 570,1	575,8
4.	unten	217,8 392,2 270,0 349,4	322,4 318,9 317,6	319,6
5.	oben	439,7 638,8 495,8 595,0	559,2 553,0 555,3	555,8

Es ist hierbei noch zu bemerken, dass die Intensität des von 6 Grove'schen Bechern hervorgebrachten Stromes mit einer Tangentenboussole, deren Ring 211 Millimeter Durchmesser hatte, gemessen wurde. Der Strom lenkte die Boussole um 28° 21' ab, wonach die Intensität des Stroms (den horizontalen Theil der erdmagnetischen Kraft = 1,8 gesetzt) gefunden wird

$$= 105{,}5 . \frac{1{,}8}{2\pi} . \tang 28^\circ\, 21' = 16{,}31.$$

4.

Berechnung der Versuche.

In der Tafel der mit den beiden Wismuthstäben gemachten Versuche sind die Nadelstände, wie sie am Anfange und Ende jeder Schwingung beobachtet worden sind, in der dritten Columne angegeben. Aus je drei von diesen unmittelbar beobachteten Nadelständen sind in der vierten und fünften Columne der entsprechende Ruhestand und Schwingungsbogen mit Rücksicht auf die Dämpfung berechnet. Ein positives Vorzeichen vor dem Schwingungsbogen bedeutet, dass die Nadel bei der oberen Stellung der Wismuthstäbe von kleineren auf grössere, oder bei der unteren Stellung von grösseren auf kleinere Skalentheile ging; das Umgekehrte gilt für das negative Vorzeichen. Nachdem die Stellung der Wismuthstäbe mehrmals regelmässig am Ende jeder Schwingung gewechselt worden war und der Schwingungsbogen seinen Grenzwerth fast erreicht hatte, wurde eine Unterbrechung dadurch hervorgebracht, dass die Stellung der Wismuthstäbe während zweier Schwingungen unverändert gelassen, darauf aber wieder regelmässig gewechselt wurde. Der negative Schwingungsbogen wurde dadurch in einen positiven verwandelt, der aber schnell bis auf Null abnahm und sehr bald wieder in einen negativen überging, wodurch die Richtung der von den Wismuthstäben hervorgebrachten Ablenkung am augenscheinlichsten hervortrat. — Zählt man die Schwingungsbögen von demjenigen an, welcher der Null am nächsten ist, so lassen sich die beobachteten dem Grenzwerthe am nächsten kommenden Werthe mit Hülfe des bekannten *decrementum logarithmicum* leicht auf den Grenzwerth reduciren, und daraus ein genauerer Mittelwerth des letzteren finden. In dem vorliegenden Falle, wo das *decrementum logarithmicum* nahe $= \log \frac{3}{2}$ war, genügt es, den Werth des $n$ten Schwingungsbogens mit $(1 - (\frac{2}{3})^n)$ zu dividiren, oder genauer, weil das *decrementum logarithmicum* $= 0{,}17887$ war, mit $(1 - 0{,}6624^n)$.
Hiernach ergeben sich folgende reducirte Werthe.

Nr.	beobachtet	reducirt	Mittel.
1.	— 40,0	— 63,4	
2.	— 50,4	— 66,6	
3.	— 56,3	— 67,1	— 61,8
4.	— 58,5	— 65,5	
5.	— 55,2	— 59,4	
6.	— 46,5	— 48,8	
11.	— 30,0	— 47,5	
12.	— 50,4	— 66,6	— 59,8
13.	— 57,8	— 68,5	
14.	— 50,9	— 56,8	
19.	— 42,6	— 67,5	
20.	— 39,6	— 52,3	
21.	— 46,6	— 55,5	
22.	— 51,7	— 57,9	— 56,1
23.	— 45,9	— 49,4	
24.	— 50,6	— 53,1	
25.	— 55,2	— 57,0	
30.	— 40,3	— 63,9	
31.	— 46,0	— 60,2	— 55,8
32.	— 42,2	— 50,0	
33.	— 44,0	— 49,3	

Aus allen Beobachtungen zusammen ergiebt sich also der gesuchte Grenzwerth

$$x = -58,4.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Nadel bei der unteren Stellung der Wismuthstäbe auf grössere, bei der oberen auf kleinere Skalentheile getrieben wurde. Bei diesen nach der Methode der Multiplication gemachten Versuchen ergiebt sich nun ferner aus dem gefundenen Grenzwerthe der Schwingungsbögen $= x$, nach der in der vorigen Abhandlung (in diesem Bande S. 348) von mir gege-

benen Regel, die dem Gleichgewichte der Nadel entsprechende Ablenkung E

$$E = \frac{x}{2} \cdot \frac{1 - e^{-\lambda}}{1 + e^{-\lambda}},$$

worin $\log e^{\lambda}$ das logarithmische Decrement bezeichnet, also $\log e^{\lambda} = 0{,}17887$ ist. Hieraus ergiebt sich die dem Gleichgewichte der Nadel entsprechende Ablenkung

$$E = -5{,}93.$$

Aus den mit dem Eisenstäbchen ohne Multiplication gemachten Versuchen haben sich abwechselnd für die obere und für die untere Stellung folgende Ruhestände der Nadel ergeben:

	erste Reihe	zweite Reihe
oben	—	564,9
unten	302,0	322,7
oben	571,0	575,8
unten	300,6	319,6
oben	560,7	555,8

Hieraus ergeben sich unmittelbar die Werthe der Ablenkung E:

erste Reihe	zweite Reihe
+ 134,50	+ 121,10
+ 135,20	+ 126,55
+ 130,05	+ 128,10
	+ 118,10

also im Mittel aus beiden Reihen die Ablenkung

$$E = +128{,}4.$$

Das positive Vorzeichen bedeutet, dass die Nadel bei der unteren Stellung des Eisenstäbchens auf kleinere, bei der oberen auf grössere Skalentheile getrieben wurde, d. i. gerade umgekehrt wie bei den Wismuthstäben.

Das Moment des Magnetismus des Eisenstäbchens verhält

sich hiernach zum Momente des Diamagnetismus der beiden Wismuthstäbe, wie

$$+128,4 : -5,93,$$

d. h. das Moment des Eisens ist dem 21,7fachen des Wismuths entgegengesetzt gleich, ungeachtet die Masse des Eisens 59200 Mal kleiner war. Hiernach würde also, auf gleiche Massen reducirt, der Diamagnetismus des Wismuth 1285000 Mal kleiner zu setzen sein, als der Magnetismus des Eisens.

Aus einer eben solchen von Herrn Professor Sartorius von Waltershausen ausgeführten Versuchsreihe hatte sich der Grenzwerth

$$x = -48,2,$$

aus einer dritten von Herrn Dr. von Quintus Icilius gemachten,

$$x = -47,3,$$

aus einer vierten von Herrn Dr. Riemann gemachten,

$$x = -45,0,$$

aus der von mir gemachten

$$x = -55,8$$

ergeben. Im Mittel aus allen diesen Versuchen ist also

$$x = -50,9$$

$$E = -5,17$$

und hiernach ist der Diamagnetismus des Wismuths 1470000 Mal kleiner zu setzen, als der Magnetismus des Eisens.

Die obigen Versuche genügen, um dadurch den Elektrodiamagnetismus des Wismuths nachzuweisen. Die für seine Stärke daraus abgeleitete Bestimmung kann nun zwar, wie man leicht übersieht, nur als eine ungefähre betrachtet werden; es reicht aber eine solche ungefähre Bestimmung hin, um als ein fester Stützpunkt bei der folgenden Untersuchung über diamagnetische Induction galvanischer Ströme gebraucht zu werden.

5.

Bequemste Einrichtung zur Beobachtung der diamagnetischen Polarität.

Die vorhergehenden Versuche beweisen dreierlei:

erstens, dass bei der Darstellung von Diamagneten, ebenso wie bei der Darstellung von Magneten, die rein magnetischen Kräfte durch elektromagnetische Kräfte galvanischer Ströme ersetzt werden können;

zweitens, dass an einem seiner Länge nach gleichförmig diamagnetisirten Wismuthstabe, wie er durch die elektromagnetische Kraft einer galvanischen Spirale, in die er gelegt wird, dargestellt werden kann, die diamagnetische Polarität deutlich und sicher beobachtet wird, indem er auf eine Magnetnadel entgegengesetzte Drehungskräfte ausübt, jenachdem er ihr mit seinem einen oder mit seinem andern Ende genähert wird, — gerade so wie die magnetische Polarität an einem durch denselben Strom magnetisirten Eisenstabe;

drittens, dass sich endlich unter den angegebenen Verhältnissen die von dem diamagnetisirten Wismuthstabe auf eine Magnetnadel ausgeübte Drehungskraft sowohl ihrer Richtung als Grösse nach bestimmen und mit der Richtung und Grösse der von einem durch dieselben Kräfte magnetisirten Eisenstabe auf dieselbe Magnetnadel ausgeübten Drehungskraft vergleichen lässt, woraus sich die Richtung der Drehungskraft stets entgegengesetzt ergiebt, während die Bestimmung der Grösse zu einer Vergleichung sich entsprechender magnetischer und diamagnetischer Momente führt.

Alle diese Versuche lassen sich mit geringen Hülfsmitteln, wenn sie zweckmässig verwendet werden, ausführen, was um so mehr Beachtung verdient, als nach der in der Einleitung gemachten Bemerkung, die Kräfte, um die es sich hierbei handelt, ausserordentlich klein sind, und man daher gefasst sein musste, dass die Beobachtung deutlich wahrnehmbarer Wirkungen dieser kleinen Kräfte die Anwendung sehr starker Mittel fordern würde, was in der That aber nicht der Fall ist. Denn eine Grove'sche oder Bunsen'sche Säule von 6 bis 8 Bechern und ein Paar Pfund Kupferdraht von angemessener Stärke sind Gegenstände, die zu vielen andern Versuchen gebraucht werden, und ausserdem bedarf es blos noch einer kleinen Magnetnadel, die mit einem Spiegel versehen ist, um wie beim Magnetometer mit einem Fernrohre (wozu ein Sextantenfernrohr genügt) beobachtet zu werden.

Um die Ausführung dieser für die Begründung der Lehre vom Diamagnetismus besonders wichtigen Versuche möglichst zu erleichtern, namentlich die auf die Aufstellung des Apparats zu verwendende Mühe zu vermindern, habe ich folgende Einrichtung getroffen, welche zur Wiederholung der Versuche als die bequemste empfohlen werden kann.

Sie besteht wesentlich darin, dass, statt zweier galvanischen Spiralen, welche bei obigen Versuchen (Art. 2) vertical so aufgestellt wurden, dass der eine Pol einer geraden Magnetnadel symmetrisch zwischen ihnen lag, nur eine solche Spirale gebraucht wird, welche symmetrisch mitten zwischen den beiden Polen einer hufeisenförmig gebogenen Magnetnadel aufgestellt wird. Fig. 3 stellt *A* den Querschnitt dieser Spirale dar, welcher symmetrisch zwischen den Polen *N*, *S* der hufeisenförmig gekrümmten Magnetnadel *NBS* liegt. Diese Magnetnadel wird von der Klemme *DE* gehalten, in deren Mitte *C* der Aufhängungsfaden befestigt ist. Fig. 4 und 5 stellt das Instrument in zwei Seitenansichten dar. Es ist vortheilhaft, der Spirale eine beträchtliche Länge

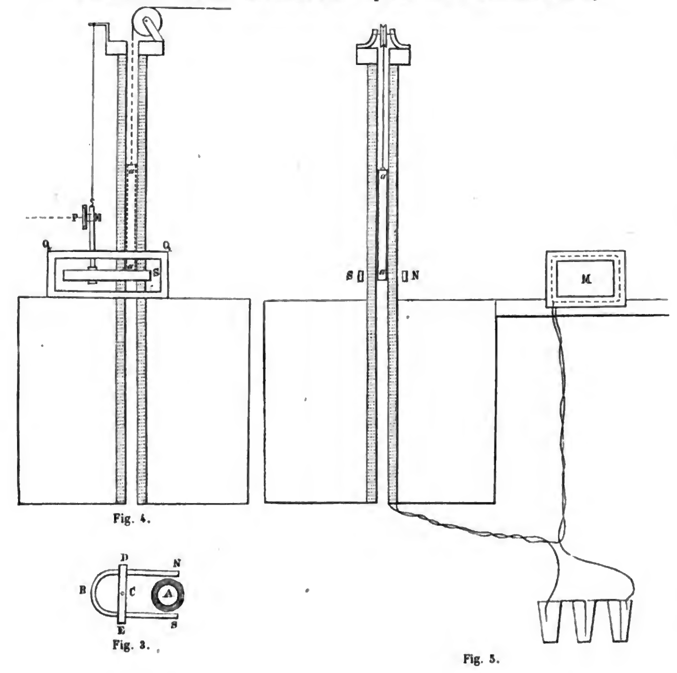


Fig. 4.

Fig. 3.

Fig. 5.

zu geben, z. B. von 400 bis 500 Millimeter, wodurch es leichter wird, die Aufhängung der Nadel so zu reguliren, dass sie in der die Länge der Spirale halbirenden Horizontalebene schwebt, wo dann der durch die Spirale gehende Strom auf die Nadel kein Drehungsmoment ausübt. Sollte aber auch ein kleines Drehungsmoment vorhanden sein, so lässt sich dies leicht auf die Art. 2 schon angegebene Weise durch einen aus wenigen Windungen bestehenden Multiplicator Fig. 5 *M* compensiren, indem man denselben Strom hindurchleitet und ihn der Magnetnadel nähert. Zur Beobachtung der Magnetnadel ist es nothwendig, sie mit einem Spiegel Fig. 4 *P* zu versehen und darin mit einem Fernrohre das Spiegelbild einer entfernten Skala zu beobachten. Die Magnetnadel wird ausserdem mit einem Dämpfer Fig. 4 *QQ* umgeben. Der Wismuthstab *aa* Fig. 4 und 5 wird an einem Faden vertical in der Spirale aufgehangen; er kann gehoben oder gesenkt werden, so dass entweder, wie Fig. 4 und 5 darstellt, sein unteres Ende zwischen den beiden Polen der Magnetnadel zu liegen kommt, oder sein oberes Ende. Die Beobachtungen lassen sich am bequemsten machen, wenn durch Rollen oder durch eine einfache Hebelvorrichtung die Einrichtung getroffen wird, dass der Beobachter am Fernrohre selbst durch Hebung oder Senkung des Fusses die Senkung oder Hebung des Wismuthstabes bewirken kann. Ist der Strom geschlossen und die Magnetnadel ganz in Ruhe, so hebt man den Wismuthstab und beobachtet darauf eine kleine Bewegung der Nadel. Sobald dann die Nadel ihre grösste Elongation erreicht hat, wird der Wismuthstab wieder gesenkt, und die Magnetnadel bewegt sich dann schon mit grösserer Geschwindigkeit zurück. Hat sie die grösste Elongation nach dieser Seite erreicht, so wird der Wismuthstab wieder gehoben u. s. w. Zwischen je zwei Elongationen bemerkt man die Stellung, welche der Wismuthstab während der dazwischen verflossenen Zeit gehabt hat. Vertauscht man den Wismuthstab mit einem gleich langen aber sehr dünnen Eisendrahte, so kann man sich überzeugen, dass bei gleicher Stellung des Eisendrahts die Ablenkung der Nadel in entgegengesetzter Richtung geschieht, wie beim Wismuthstabe.

Diamagnetelektricität und Messung der diamagnetisch inducirten elektrischen Ströme.

6.

Die Versuche über diamagnetelektrische Induction bieten, wie man leicht übersehen kann, wegen ihrer grösseren Feinheit der Beobachtung mehr Schwierigkeit dar, als die vorhergehenden Versuche über den Elektrodiamagnetismus, und es bedarf einer besonderen Kunst in der Einrichtung und Anordnung der Versuche, um mit einem Aufwande von mässigen Hülfsmitteln hier wirklich zum Ziele zu gelangen. Die folgenden Versuche werden zeigen, wie dies dennoch möglich ist, und wenn die mit Hülfe solcher Mittel dargestellten Wirkungen auch nur klein sind, so zeigen sie doch eine solche Uebereinstimmung, dass bei einiger Beachtung der Verhältnisse kaum etwas zu wünschen übrig bleibt, wenn es sich bloss darum handelt, das Factum der diamagnetischen Induction zu begründen und vor Täuschungen durch fremdartige Einflüsse sicher zu stellen. Die dargestellten Wirkungen können sogar, wie man sehen wird, zu quantitativen Bestimmungen über die Stärke der diamagnetischen Induction gebraucht werden, die sich zu solchen Prüfungen benutzen lassen, zu welchen ein geringerer Grad von Genauigkeit genügt. Nur der Wunsch, diesen quantitativen Bestimmungen die für einige besondere Untersuchungen nothwendige grössere Präcision zu geben, wird es künftig nöthig machen, grössere Mittel in Anwendung zu bringen. Ich werde die Beschreibung des hier gebrauchten diamagnetischen Inductionsapparats vorausschicken und darauf die der damit ausgeführten Versuche folgen lassen.

7.

Beschreibung des diamagnetischen Inductionsapparats.

Ich werde hier einen andern diamagnetischen Inductionsapparat beschreiben, als derjenige war, mit dem ich früher (Berichte 1847 und Poggendorffs Annalen 1848. Bd. 73.) eine schwache Spur von einer diamagnetischen Induction beobachtet habe, der aber nicht ganz die zu diesen Versuchen wünschenswerthe Feinheit und Genauigkeit besass. Jener Apparat war im Wesentlichen derselbe, dessen sich später

Faraday bediente und in den *Philos. Transact.* 1850. *P. I* beschrieb, mit dem ihm aber die Beobachtung der diamagnetischen Induction nicht gelungen ist, wiewohl er viele andere interessante Anwendungen davon gemacht hat. Der Grund dieses verschiedenen Erfolgs ist wohl in den von mir gebrauchten feineren galvanometrischen Mitteln zu suchen; denn auch ich würde, wie Faraday, ohne die Anwendung eines Galvanometers, dessen Nadel nach Art des Gauss'schen Magnetometers mit Spiegel und Fernrohr beobachtet wird, gar keine Spur einer solchen diamagnetischen Induction zu beobachten im Stande gewesen sein. Indessen können auch die von mir mit jenem Apparate gemachten Versuche nicht als genügend betrachtet werden, weil dabei die an sich schwachen Wirkungen mit anderen Wirkungen verbunden erscheinen, von denen sie schwer geschieden werden können. Auch gestatten dabei die Verhältnisse keine quantitative Controle. Der hier zu beschreibende Inductionsapparat unterscheidet sich von dem früheren wesentlich dadurch, dass

1) ein Elektrodiamagnet, statt eines gewöhnlichen, zur Induction benutzt wird, dessen Moment durch die vorhergegangene Untersuchung seiner Grösse nach wenigstens näherungsweise bekannt ist, wonach das Verhältniss der inducirenden Wirkung des Apparats bei Anwendung eines Wismuthstabes im Vergleiche zu der bei Anwendung eines Eisenstabs vorausgesagt werden kann;

2) dadurch, dass die Induction durch blosse Bewegung des diamagnetischen Körpers in einer ruhenden Drahtspirale hervorgebracht wird, indem der Diamagnetismus unverändert bleibt, wodurch vermieden wird, dass in dem Wismuth, als Leiter, galvanische Ströme inducirt werden, welche sonst leicht mit den diamagnetisch inducirten Strömen verwechselt werden könnten.

Der zur Induction benutzte Elektrodiamagnet.

Der zur Induction benutzte Elektrodiamagnet bestand aus einem Wismuthstabe in einer langen Drahtspirale, *cccc* Fig. 6 *A*, durch welche der Strom von 8 Bunsen'schen Kohlenzinkbechern geleitet wurde.

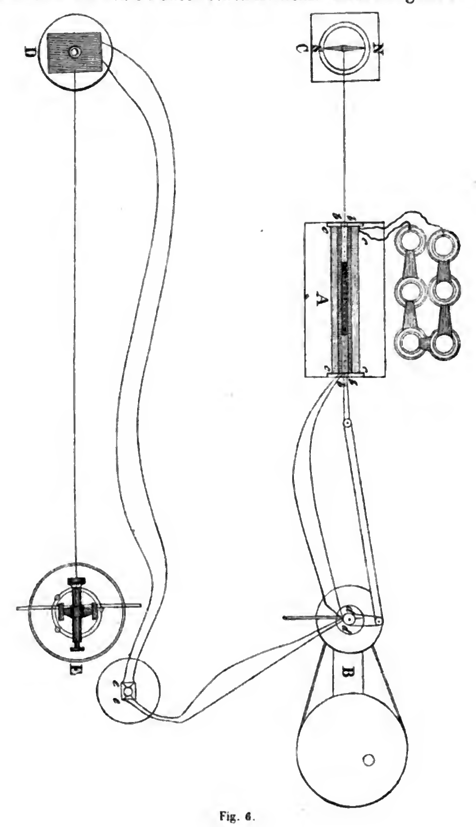


Fig. 6.

Der Wismuthstab war 186 Millimeter lang und wog 339300 Milligramm. Die Drahtspirale bestand aus Kupferdraht, welcher mit Wolle übersponnen und ausserdem noch durch eine Guttaperchadecke isolirt war. Der reine Kupferdraht war 2,3 Millimeter dick, der aufgewundene Draht bildete 8 Lagen über einander, jede zu 120 Umwindungen. Die ganze Spirale war 383 Millimeter lang und hatte 23,9 Millimeter inneren und 70 Millimeter äusseren Durchmesser.

Die Inductionsspirale.

Die Inductionsspirale *bbbb* Fig. 6 *A* ist diejenige Spirale, in welcher durch die Bewegung des Elektrodiamagnets ein Strom inducirt werden soll. Diese Spirale muss von der zum Elektrodiamagnet selbst gehörigen, durch welche der Strom der galvanischen Säule geht, sorgfältig isolirt und, zum Zwecke der Beobachtung des inducirten Stromes, mit dem Multiplicator eines Galvanometers verbunden werden. Diese Spirale bestand aus einem 1 Millimeter dicken, mit Seide übersponnenen Kupferdrahte, welcher 3 Lagen übereinander, jede von 294 Umwindungen, bildete. Die Länge war 383 Millimeter, der innere Durchmesser 19, der äussere 23 Millimeter. Nachdem sie, zur besseren Isolirung, noch mit dünnem Gutta percha umwickelt war, war sie fest in die weitere Röhre der zum Elektrodiamagnet gehörigen Spirale eingeschlossen, oder vielmehr die letztere Spirale wurde darum gewunden.

Der wesentlichste Punkt, der bei dieser Spirale in Betracht kommt, ist der, dass sie ihrer Länge nach in zwei ganz symmetrische und symmetrisch gewundene Hälften zerfällt. Das heisst, der Draht ist nicht der ganzen Länge nach gleichförmig in derselben Richtung fortgewunden, sondern die Spirale zerfällt ihrer Länge nach in zwei Hälften, in denen der Draht entgegengesetzt gewunden ist. Es ist dieses nothwendig, wenn durch die Bewegung eines diamagnetischen Wismuth- oder eines magnetischen Eisenstabs in dieser Spirale ein Strom inducirt werden soll, welcher mit dem damit verbundenen Galvanometer beobachtet werden könne; denn wird dieser inducirende Stab in die Mitte der Spirale gelegt und darauf bewegt, so ist die von seinem nördlichen Ende in der einen Hälfte der Spirale ausgeübte Inductionskraft der von seinem südlichen Ende in der andern Hälfte ausgeübten gerade entgegengesetzt, und die Wirkung beider würde sich aufheben, wenn beide

Hälften der Spirale in gleichem Sinne gewunden wären. Durch ihre entgegengesetzte Windung wird bewirkt, dass die beiden Inductionskräfte einander nicht aufheben, sondern verdoppeln.

Diese zum Zwecke der Induction nothwendige Einrichtung gewährt ausserdem zugleich noch einen für die praktische Ausführung der Versuche wichtigen Vortheil. Es leuchtet nämlich ein, dass der Strom der galvanischen Säule in der Spirale des Elektrodiamagnets zwar, so lange er constant ist, keine inducirende Kraft auf die Inductionsspirale ausüben könne, gegen welche er eine feste, unveränderliche Lage hat; durch die geringste Aenderung seiner Intensität würde aber in der Inductionsspirale ein Strom hervorgebracht werden, welcher viel stärker wäre, als der diamagnetisch inducirte Strom, und die Beobachtung des letztern stören würde. Nun leuchtet aber ein, dass dieselbe Einrichtung der Inductionsspirale, durch welche bewirkt wird, dass die diamagnetische Induction in beiden Hälften dieser Spirale sich verdoppelt, zugleich eine Aufhebung der von dem Strome der galvanischen Säule in der äussern Spirale auf beide Hälften der Inductionsspirale ausgeübten Inductionskräfte bewirkt, so dass, wenn nur die Symmetrie beider Hälften vollkommen ist, auch die grössten Intensitätsänderungen des Stroms der galvanischen Säule gar keinen Einfluss haben. Dazu kommt noch, 1) dass es sehr leicht zu prüfen ist, ob diese Aufhebung genau vorhanden ist, indem man, statt kleine Aenderungen hervorzubringen, den ganzen Strom löst oder commutirt; 2) dass, wenn es sich findet, dass diese Aufhebung nicht vollkommen ist, es sehr leicht dahin gebracht werden kann, bloss dadurch, dass das eine Drahtende der Inductionsspirale noch ein oder einige Male um die Spirale, durch die der Strom der galvanischen Säule geht, herumgewunden wird. Es ist auf diese Weise leicht, die Wirkungen der diamagnetischen Induction von allen fremdartigen Einflüssen zu befreien.

Die übrigen Theile des Inductionsapparats.

Ueber die Einrichtung der übrigen Theile des Inductionsapparats, welche mehr oder weniger der Willkür des Beobachters überlassen bleibt, füge ich nur folgende Bemerkungen bei. Um den Wismuthstab in der Inductionsspirale hin und her zu schieben, verbinde ich denselben mit der Kurbel eines Rads Fig. 6 *B*; damit ferner der in der Indu-

ctionsspirale bei der Zurückschiebung des Wismuthstabes inducirte Strom im Galvanometer dieselbe Richtung habe, wie bei der Hinschiebung, so ist am Rade ein Commutator *dd* angebracht, welcher sich mit dem Rade dreht, und durch welchen bei jeder halben Umdrehung des Rads (in dem Augenblicke, wo der Wismuthstab den Anfangs- oder Endpunkt seiner Bahn erreicht) die Verbindung der Drahtenden der Inductionsspirale mit denen des Multiplicators des Galvanometers gewechselt wird. Die hiernach immer gleiche Richtung, in welcher alle inducirten Ströme durch den Multiplicator des Galvanometers gehen, würde die Nadel immer nach derselben Seite ablenken. Um nun den Beobachter in den Stand zu setzen, auch eine Ablenkung der Nadel nach der andern Seite hervorzubringen, ist neben dem Beobachtungsfernrohre Fig. 6 *E* noch ein zweiter Commutator *ee* aufgestellt, welcher nur von dem Beobachter selbst gewechselt wird. Dieser Commutator heisse der Hülfscommutator; er verbindet die beiden Drahtenden des Multiplicators mit den Enden der beiden vom rotirenden Commutator kommenden Leitungsdrähte. Uebrigens ist besondere Aufmerksamkeit noch auf folgende zwei Punkte zu wenden: 1) dass man die Induction mehr durch die Beschleunigung der Drehung des Rads zu verstärken sucht, als durch die Grösse der Bahn, in welcher man den Wismuthstab hin und her schiebt. In den folgenden Versuchen wurde der Wismuthstab in einer nur 58,2 Millimeter langen Bahn hin und her geschoben, diese Bahn durchlief er aber in jeder Secunde 10,58 Mal. Durch eine grössere Schiebung würde wenigstens ein Theil des Wismuthstabs sich dem Ende der Spirale, durch welche der Strom der galvanischen Säule ging, genähert haben, wo nicht allein die Stärke seines Diamagnetismus geändert, sondern auch in ihm, als Leiter, ein Strom inducirt worden sein würde, der einen secundär inducirten Strom in der Inductionsspirale erzeugt hätte. Dieser muss vermieden werden, wenn man eine reine Wirkung der diamagnetischen Induction erhalten will — 2) ist besondere Aufmerksamkeit auf den rotirenden Commutator zu verwenden, wo leicht ein thermomagnetischer Strom entsteht. Man muss daher diesen Commutator so einrichten, dass sich gleiche Metalle (Messing an Messing) an einander reiben. Auch dadurch werden die thermomagnetischen Ströme nur geschwächt, nicht ganz vermieden. Nun heben sich zwar die an den verschiedenen Reibungsstellen erregten thermomagnetischen Ströme wechselseitig auf; da aber diese Aufhebung oft

nicht vollständig stattfindet, so muss man den dadurch hervorgebrachten, wenn auch geringen, Einfluss unschädlich machen, indem man ihn in Rechnung bringt, was leicht geschehen kann, wenn man den Beobachtungen, bei welchen der Wismuthstab hin und her geschoben wird, ganz gleiche Beobachtungen unmittelbar vorausschickt und nachfolgen lässt, wobei der rotirende Commutator ohne den Wismuthstab bewegt wird. Uebrigens kann man die ersteren Beobachtungen selbst leicht auch so anordnen, dass die kleinen Wirkungen des thermomagnetischen Stroms abwechselnd die Wirkungen der diamagnetischen Induction verstärken und schwächen, wodurch ein von dem Einflusse des thermomagnetischen Stroms unabhängiger Mittelwerth erhalten wird. Dies geschieht dadurch, dass man von Zeit zu Zeit durch Umkehrung des Stroms der galvanischen Säule den Diamagnetismus des Wismuthstabs umkehrt.

Zum Galvanometer Fig. 6 *D* gebrauchte ich, wie bei dem elektrodiamagnetischen Messapparate, ein kleines Magnetometer nach der Gauss'schen Einrichtung, welches mit einem sehr starken Multiplicator versehen war. Die Länge der Nadel war dabei auf 30 Millimeter reducirt. Die Richtkraft des Erdmagnetismus wurde, zur Vermehrung der Empfindlichkeit, hier ebenso wie früher vermindert. Die Nadel war ebenfalls mit einem dicken Kupferringe als Dämpfer umgeben. Dass der Inductionsapparat so weit von dem Galvanometer entfernt werden müsse, dass der Strom der dabei gebrauchten galvanischen Säule nicht unmittelbar auf die Nadel wirke, oder dass, wenn dies der Raum nicht gestattet, der Inductionsapparat durch besondere Orientirung in eine solche Lage gebracht werden müsse, wo seine ablenkende Kraft auf die Nadel Null oder wenigstens sehr klein ist, bedarf kaum der Erwähnung. Um endlich eine ungefähre Kenntniss von der Stärke des Stroms der galvanischen Säule selbst zu erhalten, wurde eine gewöhnliche Boussole Fig. 6 *C* in einer angemessenen Entfernung von der Spirale, durch welche der Strom ging, so aufgestellt, dass die durch den Strom hervorgebrachte Ablenkung der Boussole zur Bestimmung der Stromintensität benutzt werden konnte.

8.

Versuche.

Auch die folgenden Versuche sind nicht von mir allein ausgeführt worden, sondern es haben daran die Herren Professoren Listing und Sartorius von Waltershausen, Dr. von Quintus Icilius und Dr. Riemann, ebenso wie an den vorhergehenden elektrodiamagnetischen Theil genommen. Beispielshalber werde ich auch hier das Protocoll der von Herrn Professor Listing gemachten Versuche vollständig mittheilen, mit denen alle anderen nahe übereinstimmten.

Der Inductionsapparat war so aufgestellt worden, dass eine durch die Mitte des Galvanometers und durch die Mitte der Drahtspirale, durch welche der Strom der galvanischen Säule ging, gelegte Verticalebene mit dem magnetischen Meridiane einen Winkel von 45° bildete; die Axe jener Drahtspirale lag senkrecht gegen den magnetischen Meridian. Aus den Gesetzen des Elektromagnetismus ergiebt sich, was die Erfahrung unmittelbar bestätigt, dass bei dieser Anordnung der Strom die Galvanometernadel nicht ablenkt. Unter diesen Umständen war es nun ferner am vortheilhaftesten, die Boussole, durch welche die Stromintensität bestimmt werden sollte, in der Richtung der verlängerten Axe der Drahtspirale, durch welche der Strom ging, aufzustellen. Es geschah dies in 708 Millimeter Abstand von der Mitte auf der westlichen Seite. Derjenige Strom, durch welchen diese Boussole mit ihrem Nordende westlich abgelenkt wurde, soll als der normale Strom, derjenige, durch welchen das Nordende östlich abgelenkt wurde, als umgekehrter Strom bezeichnet werden. Ferner heisse die Schiebung des Wismuthstabs im Inductionsapparate in der Richtung von Westen nach Osten die normale Schiebung, in der Richtung von Osten nach Westen die umgekehrte Schiebung. Endlich heisse diejenige Stellung, welche der rotirende Commutator während der normalen Schiebung des Wismuthstabs hatte, seine normale Stellung, und die, welche er während der umgekehrten Schiebung des Wismuthstabs hatte, die umgekehrte Stellung. Die Drehung des Schwungrads geschah taktförmig nach dem Schlage einer Pendeluhr und es ergab sich, dass alsdann der Wismuthstab in jeder Secunde seine Bahn 10,58 Mal durchlief. Der Horizontalabstand des Spiegels der Magnetnadel von der Skala des Galvanometers betrug 1400 Skalentheile. Die Schwingungsdauer

der Galvanometernadel, welche für die ganze Richtkraft des Erdmagnetismus nahe 9 Secunden war, wurde nach der schon oben beschriebenen Methode durch Aufhebung eines Theils der erdmagnetischen Kraft auf 20,437 Secunden gebracht. Das logarithmische Decrement für die Abnahme der Schwingungsbögen war dabei = 0,12378.

Bei unveränderter Richtung des Stroms der galvanischen Säule in der Spirale des Elektrodiamagnets, und bei unveränderter Stellung des Hülfscommutators wurde die Galvanometernadel durch die diamagnetische Induction des von Westen nach Osten bewegten Wismuthstabs in demselben Sinne abgelenkt, wie wenn der Wismuthstab umgekehrt von Osten nach Westen bewegt wurde, wegen des dazwischen stattfindenden Wechsels des Rotationscommutators; die Ablenkung erfolgt daher bei schneller Hin- und Herschiebung wie wenn ein constanter Strom sie hervorbrächte. Wird aber die Stellung des Hülfscommutators gewechselt, so erfolgt eine Ablenkung der Nadel nach der entgegengesetzten Seite, woraus sich ergiebt, dass man zum Zwecke schärferer Beobachtung die Ablenkung der Nadel durch Multiplication verstärken kann, indem man die Stellung des Hülfscommutators immer in dem Augenblicke wechselt, wo die Nadel das Ende ihres Schwingungsbogens erreicht, so lange, bis endlich durch die Dämpfung der Nadel ihr Schwingungsbogen während jeder Schwingung um so viel verkleinert, wie durch den inducirten Strom vergrössert wird. Es wurde daher zwischen je zwei beobachteten Elongationen der Nadel die mit + oder — bezeichnete Stellung des Hülfscommutators bemerkt. War die Nadel zu Anfange der Beobachtungen schon in Schwingung, so wurde mit derjenigen Stellung des Hülfscommutators begonnen, bei welcher der inducirende Strom eine Abnahme des vorhandenen Schwingungsbogens hervorbrachte, welcher dann bei regelmässigem Wechsel bis Null abnahm und dann umgekehrt von Null an wuchs, bis er den Grenzwerth erreichte. Wenn die Nadel während der mit + bezeichneten Stellung des Hülfscommutators von kleineren auf grössere Skalentheile ging, ist in der folgenden Zusammenstellung das Vorzeichen + vor den Schwingungsbogen selbst gesetzt worden, im entgegengesetzten Falle das Vorzeichen —. Die Vorzeichen der Schwingungsbögen ergaben sich dann bei der diamagnetischen Induction des Wismuths denen bei der magnetischen Induction des Eisens entgegengesetzt und zugleich waren die letzteren Schwingungsbögen weit grösser,

wiewohl der Eisenstab viel dünner als der Wismuthstab war. Der Eisenstab wog nämlich bei gleicher Länge 790,86 Milligramm, der Wismuthstab 339300 Milligramm. Man brauchte daher, um die Wirkung der magnetelektrischen Induction zu messen, den Eisenstab nicht so schnell wie den Wismuthstab hin und her zu schieben, sondern es genügte eine einzige Schiebung desselben während jeder Schwingung der Nadel, in demjenigen Augenblicke, wo die schwingende Nadel ihre Ruhelage passirte. Die beiden Commutatoren blieben dabei in ihrer normalen Stellung und zwischen je zwei Elongationsbeobachtungen wurde allemal die Richtung bemerkt, nach welcher der Eisenstab verschoben wurde und zwar wurde die Richtung von Westen nach Osten mit +, die von Osten nach Westen mit — bezeichnet, wodurch die Vergleichung mit dem Wismuthstabe gegeben war. Die Beobachtungen ergeben dann für gleiche Schiebung des Eisen- und Wismuthstabs, wie schon erwähnt ist, entgegengesetzte Wirkungen.

Die Versuche wurden damit begonnen, dass 1) geprüft wurde, ob ein Einfluss des thermomagnetischen Stroms vorhanden, und wie gross derselbe war. Dazu wurde der Rotationscommutator in Bewegung gesetzt, ohne jedoch den Wismuthstab hin und her zu schieben. Die Wirkung wurde durch Wechsel des Hülfscommutators bei jeder Elongation multiplicirt. Sodann wurde 2) der Wismuthstab zugleich in Bewegung gesetzt und eine Reihe Beobachtungen bei normalem Strome gemacht; 3) dieselbe Reihe bei umgekehrtem Strome; 4) dieselbe Reihe wieder bei normalem Strome; 5) bei umgekehrtem Strome und 6) endlich nochmals bei normalem Strome. Darauf wurde 7) die Prüfung, ob ein Einfluss des thermomagnetischen Stroms vorhanden sei, wiederholt, und 8) der Wismuthstab mit dem Eisenstabe vertauscht und die Inductionswirkung des letzteren gemessen.

Göttingen, 1851. Juli 13.

Beobachter: Herr Professor Listing.

Galvanischer Strom von 8 Bunsen'schen Kohlen-Zinkbechern.

Nr. der Schwingung.	1. Thermomagnetischer Strom.			
	Stellung des Hülfscommutators.	Stand der Nadel am Anfange und Ende jeder Schwingung.	Ruhestand der Nadel.	Schwingungsbogen der Nadel.
		497,0		
1.	+	496,2	496,45	— 0,5
2.	—	496,4	496,35	— 0,1
3.	+	496,4	496,30	+ 0,2
4.	—	496,0	496,15	+ 0,3
5.	+	496,2		

Hiernach war also fast gar kein Einfluss des thermomagnetischen Stroms vorhanden.

Nr. der Schwingung.	2. Induction des Wismuthstabes bei normalem Strome.				
	Stellung des Hülfscommutators.	Stand der Nadel am Anfange und Ende jeder Schwingung.	Ruhestand der Nadel.	Schwingungsbogen der Nadel.	Ablenkung der Boussole.
		475,3			
1.	—	472,8	474,65	+ 3,70	32° 10'
2.	+	477,7	475,00	+ 5,40	westlich.
3.	—	471,8	475,20	+ 6,80	
4.	+	479,5	475,32	+ 8,35	
5.	—	470,5	475,33	+ 9,65	
6.	+	480,8	475,52	+ 10,55	
7.	—	470,0	475,70	+ 11,40	
8.	+	482,0	475,87	+ 12,25	
9.	—	469,5	475,85	+ 12,70	
10.	+	482,4	475,90	+ 13,00	
11.	—	469,3			

Nr. der Schwingung.	Stellung des Hülfscommutators.	Stand der Nadel am Anfange und Ende jeder Schwingung.	Ruhestand der Nadel.	Schwingungsbogen der Nadel.	Ablenkung der Boussole.
3. bei umgekehrtem Strome.					
		503,5			
1.	+	515,9	511,15	+ 9,50	31° 50′ östlich.
2.	—	509,3	511,13	+ 3,65	
3.	+	510,0	510,62	— 1,25	
4.	—	513,2	510,82	— 4,75	
5.	+	506,9	510,58	— 7,35	
6.	—	515,3	510,85	— 8,90	
7.	+	505,9	510,70	— 9,60	
8.	—	515,7	510,72	— 9,95	
9.	+	505,6	510,53	— 9,85	
10.	—	515,2			
4. bei normalem Strome.					
		480,5			
1.	+	471,0	474,57	— 7,15	31° 48′ westlich.
2.	—	475,8	474,40	— 2,80	
3.	+	475,0	474,58	+ 0,85	
4.	—	472,5	474,40	+ 3,80	
5.	+	477,6	474,47	+ 6,25	
6.	—	470,2	474,23	+ 8,05	
7.	+	478,9	474,27	+ 9,25	
8.	—	469,1	474,10	+ 10,00	
9.	+	479,3	473,93	+ 10,75	
10.	—	468,0	473,65	+ 11,30	
11.	+	479,3	473,65	+ 11,30	
12.	—	468,0			

Nr. der Schwingung.	5. bei umgekehrtem Strome.				
	Stellung des Hülfscommutators.	Stand der Nadel am Anfange oder Ende jeder Schwingung.	Ruhestand der Nadel.	Schwingungsbogen der Nadel.	Ablenkung der Boussole.
		501,5			
1.	+	515,0	509,93	+ 10,15	32° 13′
2.	—	508,2	510,35	+ 4,30	östlich.
3.	+	510,0	510,02	— 0,05	
4.	—	511,9	510,20	— 3,40	
5.	+	507,0	509,80	— 5,60	
6.	—	513,3	509,68	— 7,25	
7.	+	505,1	509,42	— 8,65	
8.	—	514,2	509,38	— 9,65	
9.	+	504,0	509,05	— 10,10	
10.	—	514,0	508,72	— 10,55	
11.	+	502,9	508,40	— 11,00	
12.	—	513,8	508,15	— 11,30	
13.	+	502,1	507,83	— 11,45	
14.	—	513,3	507,67	— 11,25	
15.	+	502,0			
	6. bei normalem Strome.				
		486,0			
1.	+	461,0	471,20	— 20,40	31° 39′
2.	—	476,8	470,60	— 12,40	westlich.
3.	+	467,8	470,87	— 6,15	
4.	—	471,1	470,48	— 1,25	
5.	+	471,9	470,52	+ 2,75	
6.	—	467,2	470,08	+ 5,75	
7.	+	474,0	470,45	+ 7,10	
8.	—	466,6	470,25	+ 7,30	
9.	+	473,8	469,92	+ 7,75	
10.	—	465,5	469,83	+ 8,90	
11.	+	475,0	470,02	+ 9,70	
12.	—	465,1	470,13	+ 10,05	
13.	+	475,3	470,17	+ 10,25	
14.	—	465,0	470,08	+ 10,15	
15.	+	475,0	469,95	+ 10,10	
16.	—	464,8			

Nr. der Schwingung.	Stellung des Hülfscommutators.	Stand der Nadel am Anfange und Ende jeder Schwingung.	Ruhestand der Nadel.	Schwingungsbogen der Nadel.	Ablenkung der Boussole.
		7. Thermomagnetischer Strom.			
		486,1			
1.	+	486,5	486,30	+ 0,40	
2.	—	486,1	486,22	+ 0,25	
3.	+	486,2	486,25	— 0,10	
4.	—	486,5	486,35	— 0,30	
5.	+	486,2	486,20	0,00	
6.	—	485,9	486,25	+ 0,70	
7.	+	487,0	486,18	+ 1,05	
8.	—	486,0	486,72	+ 1,45	
9.	+	487,9	487,05	+ 1,70	
10.	—	486,4	487,35	+ 1,90	
11.	+	488,7			
		8. Induction des Eisenstabs bei normalem Strome.			
		461,0			
1.	+	457,2	464,85	— 15,30	31° 48′
2.	—	484,0	467,17	— 33,65	westlich.
3.	+	443,5	466,30	— 45,60	
4.	—	494,2	466,73	— 54,95	
5.	+	435,0	466,10	— 62,20	
6.	—	500,2	466,47	— 67,45	
7.	+	430,5	466,25	— 71,50	
8.	—	503,8	466,55	— 74,50	
9.	+	428,1	466,55	— 76,90	
10.	—	506,2	466,90	— 78,60	
11.	+	427,1	467,05	— 79,90	
12.	—	507,8	467,38	— 80,85	
13.	+	426,8	467,35	— 81,10	
14.	—	508,0	467,35	— 81,30	
15.	+	426,6	467,35	— 81,50	
16.	—	508,2	467,33	— 81,75	
17.	+	426,3			

9.

Berechnung der Versuche.

Zählt man die Schwingungsbögen von demjenigen an, welcher der Null am nächsten ist, so lassen sich die dem Grenzwerthe am nächsten kommenden, mit Hülfe des bekannten logarithmischen Decrements der Abnahme der Schwingungsbögen = 0,12378, auf den Grenzwerth reduciren durch Division des *n*ten Schwingungsbogens mit $(1 - 0{,}752^n)$. Hiernach ergeben sich für die mit Wismuth gemachten Versuche folgende reducirte Werthe:

	Schwingungsbogen	beobachtet	reducirt	Mittel.
2.	8.	+ 11,40	+ 13,20	+ 13,60
	9.	+ 12,25	+ 13,65	
	10.	+ 12,70	+ 13,75	
	11.	+ 13,00	+ 13,80	
3.	8.	— 9,60	— 14,12	— 13,08
	9.	— 9,95	— 13,10	
	10.	— 9,85	— 12,02	
4.	9.	+ 10,00	+ 13,17	+ 13,06
	10.	+ 10,75	+ 13,12	
	11.	+ 11,30	+ 13,08	
	12.	+ 11,30	+ 12,88	
5.	10.	— 10,10	— 12,33	— 12,16
	11.	— 10,55	— 12,21	
	12.	— 11,00	— 12,25	
	13.	— 11,30	— 12,24	
	14.	— 11,45	— 12,15	
	15.	— 11,25	— 11,76	
6.	11.	+ 8,90	+ 10,86	+ 10,95
	12.	+ 9,70	+ 11,23	
	13.	+ 10,05	+ 11,20	
	14.	+ 10,25	+ 11,10	
	15.	+ 10,15	+ 10,77	
	16.	+ 10,10	+ 10,56	

Bezeichnet man den geringen Einfluss, welchen der thermomagnetische Strom auf das Resultat dieser Messungen ausübte, mit x, so erhält man aus obigen Angaben den der diamagnetischen Induction allein entsprechenden Grenzwerth auf normalen Strom reducirt:

aus 2.	+ 13,60 + x	+13,34
3.	+ 13,08 — x	+13,07
4.	+ 13,06 + x	+12,61
5.	+ 12,16 — x	+11,555
6.	+ 10,95 + x	

also im Mittel aus allen Beobachtungen

$$= + 12,644.$$

Aus diesem Grenzwerthe der Schwingungsbögen, welcher nach der Methode der Multiplication gefunden worden ist, bei gleichförmiger Vertheilung der Inductionsstösse auf die ganze Schwingungsdauer der Nadel, lässt sich nun leicht auch derjenige Grenzwerth ableiten, welcher nach derselben Methode der Multiplication erhalten worden wäre, wenn alle Inductionsstösse, statt gleichförmig auf die ganze Schwingungsdauer vertheilt, auf den Augenblick, wo die Nadel ihre Ruhelage passirte, concentrirt gewesen wären, wodurch das für Wismuth erhaltene Resultat mit dem für Eisen vergleichbar gemacht wird. Setzt man nämlich das bekannte logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbögen 0,12378 $= \lambda \log e$, wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet; so findet man aus obigem Grenzwerthe den gesuchten durch Multiplication mit

$$\frac{\sqrt{(\pi\pi + \lambda\lambda)}}{1 + e^{-\lambda}} . e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{arc tang} \frac{\pi}{\lambda}} = 1,574235,$$

erhält also den gesuchten Grenzwerth

$$+ 1,574235 . 12,644 = + 19,905.^{*)}$$

*) Sind die Inductionsstösse sehr zahlreich und gleichförmig auf die ganze Schwingungsdauer vertheilt, so wirken sie wie ein constanter Strom auf die Nadel und es lässt sich dann auf den nach der Methode der Multiplication erhaltenen Grenzwerth x die S. 348. 501 angeführte Regel anwenden, wonach $x = \frac{1 + e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} . 2E$ ist, wenn E die dem Gleichgewichte der Nadel bei constantem Strome entsprechende Ablenkung und

Die Reduction der mit Eisen gemachten Versuche auf ihren Grenzwerth giebt folgende Resultate:

Schwingungsbogen.	beobachtet	reducirt	Mittel.
8.	— 71,50	— 84,98	
9.	— 74,50	— 84,60	
10.	— 76,90	— 84,47	
11.	— 78,60	— 84,28	
12.	— 79,90	— 84,16	— 83,876
13.	— 80,85	— 84,04	
14.	— 81,10	— 83,50	
15.	— 81,30	— 83,10	
16.	— 81,50	— 82,85	
17.	— 81,75	— 82,78	

$\lambda \log e$ das logarithmische Decrement der Abnahme der Schwingungsbögen bezeichnet. Bei dieser Gleichgewichtslage der Nadel ist nun die ablenkende Kraft der aus der Directionskraft der Nadel resultirenden Kraft gleich, welche bekanntlich durch $\frac{\pi\pi}{TT} . E$ dargestellt wird, wenn T die Schwingungsdauer ohne Einfluss der Dämpfung bezeichnet. Ist nun τ die wirkliche Schwingungsdauer, unter dem Einflusse der Dämpfung, so ist die Geschwindigkeit, welche die auf die ganze Schwingungsdauer gleichförmig vertheilte Stromkraft, wenn sie auf einen Augenblick concentrirt wirkte, der Nadel ertheilen würde $= \frac{\pi\pi}{TT} . E\tau$. Aus dieser Geschwindigkeit lässt sich aber der Grenzwerth der Schwingungsbögen berechnen, dem man sich nach der Methode der Multiplication nähern würde, wenn jene concentrirte Kraft allemal in dem Augenblicke auf die Nadel wirkte, wo sie ihre Ruhelage passirt. Bezeichnet man nämlich diesen Grenzwerth mit y, so ist nach der in der vorigen Abhandlung S. 348 f. gegebenen Regel, wenn man den angegebenen Werth der Geschwindigkeit $= \frac{\pi\pi}{TT} . E\tau$ einsetzt:

$$\frac{\pi\pi}{TT} . E\tau = \frac{y}{2} . \frac{\pi}{T} (1 - e^{-\lambda}) \, e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}} .$$

Die Vergleichung des hieraus sich ergebenden Werths von y mit dem oben angegebenen von x führt zu der Proportion:

$$y : x = \frac{\pi\tau}{T} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}} : (1 + e^{-\lambda}),$$

worin nach der Theorie der Dämpfung für den Quotienten $\frac{\tau}{T}$ auch $\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}$ gesetzt werden kann.

Es folgt hieraus das Verhältniss der beiden dem Wismuthstabe und dem Eisenstabe entsprechenden Grenzwerthe wie

$$+ 19,905 : - 83,876.$$

Aehnliche Versuchsreihen sind von mir, Herrn Dr. von Quintus Icilius und von Herrn Dr. Riemann ausgeführt und auf gleiche Weise berechnet worden, woraus statt des angegebenen Verhältnisses folgende gefunden worden waren:

$$+ 18,158 : - 83,82$$
$$+ 15,357 : - 82,80$$
$$+ 14,890 : - 83,45.$$

Im Mittel aus allen Reihen ergiebt sich hiernach das Verhältniss

$$+ 16,956 : - 83,49.$$

Nun verhält sich die Intensität der vom Wismuthstabe und Eisenstabe inducirten Ströme diesen Grenzwerthen direct proportional, und umgekehrt proportional der Zahl der Inductionsstösse während einer Schwingung, für welche sie gelten, d. i. der Zahl $10,58 . 20,437 = 216,2$ für den Wismuthstab und der Zahl 1 für den Eisenstab. Die vom diamagnetischen Wismuthstabe inducirten elektrischen Ströme sind also ihrer Richtung nach den vom magnetischen Eisenstabe inducirten elektrischen Strömen entgegengesetzt und verhalten sich ihrer Intensität nach wie

$$16,956 : 83,49 . 216,2 = 1 : 1064,5,$$

ungeachtet der Wismuthstab 339300 Milligramm und der Eisenstab bloss 790,86 Milligramm wog. Hiernach kann man rechnen, dass wenn der Wismuthstab auch ein so geringes Gewicht wie der Eisenstab gehabt hätte, die Stärke des von ihm diamagnetisch inducirten Stroms 456700 Mal geringer gewesen sein würde, als die des vom Eisenstabe magnetisch inducirten Stroms.

10.

Vergleichung der beiden Bestimmungen der Stärke eines Elektrodiamagnets aus seiner magnetischen und magnetelektrischen Wirkung.

Nachdem in den beiden vorhergehenden Abschnitten die magnetische und die magnetelektrische Wirkung eines Elektrodiamagnets einzeln betrachtet worden sind, gehen wir endlich zur quan-

titativen Vergleichung beider Arten von Wirkungen unter einander über. Es könnte scheinen, dass sich diese Vergleichung ganz einfach ausführen liesse, indem man bloss 1) die beobachtete magnetische Wirkung des Elektrodiamagnets in Theilen der ebenfalls beobachteten magnetischen Wirkung des Elektromagnets, 2) die beobachtete magnetelektrische Wirkung des Elektrodiamagnets in Theilen der ebenfalls beobachteten magnetelektrischen Wirkung des Elektromagnets ausdrückte, wie dies schon oben geschehen ist und zu folgenden Resultaten geführt hat:

$$1)\quad \frac{\text{Magnetische Wirkung des Elektrodiamagnets}}{\text{Magnetische Wirkung des Elektromagnets}} = \frac{1}{1470000},$$

$$2)\quad \frac{\text{Magnetelektrische Wirkung des Elektrodiamagnets}}{\text{Magnetelektrische Wirkung des Elektromagnets}} = \frac{1}{456700}.$$

Diese einfache Vergleichung würde aber nur dann richtig sein, wenn 1) derselbe Elektrodiamagnet, welcher zur Darstellung der magnetischen Wirkungen gebraucht wurde, auch zur Darstellung der magnetelektrischen Wirkungen gedient hätte, und wenn ebenso 2) derselbe Elektromagnet zur Darstellung beider Arten von Wirkungen angewendet worden wäre, und wenn endlich 3) sowohl jener Elektrodiamagnet als auch dieser Elektromagnet dabei aus grösserer Entfernung gewirkt hätte, im Vergleiche zu ihren eigenen Dimensionen und zu denen des Körpers, auf welchen gewirkt wurde. Diese Bedingungen sind aber bei obigen Versuchen nicht erfüllt worden, und es war auch nicht möglich sie zu erfüllen, weil die Darstellung der magnetelektrischen Wirkungen die Anwendung ganz anderer Apparate als die der magnetischen Wirkungen und möglichste Verkleinerung der Entfernungen der auf einander wirkenden Körper nothwendig machte.

Werden aber, wie dies geschehen ist, zur Darstellung der magnetischen und magnetelektrischen Wirkungen verschiedene Elektrodiamagnete und verschiedene Elektromagnete gebraucht, so lässt sich, auch wenn sie aus grösseren Entfernungen wirkten, keine Gleichheit in den angegebenen Verhältnissen erwarten, und die darin sich zeigende Ungleichheit (dass nämlich das eine Verhältniss etwa 3 Mal grösser als das andere war) würde noch weit grösser ausgefallen sein, wenn nicht schon bei der Bestimmung dieser Verhältnisse auf die Verschiedenheit der Massen Wismuth und Eisen, welche zu den verschiedenen Elektrodiamagneten und Elektromagneten gebraucht wurden, Rücksicht genommen worden wäre. Durch diese Berücksichtigung der

Ungleichheit der Massen wurde die gröbste stattfindende Verschiedenheit ausgeglichen und es ist interessant zu bemerken, dass durch diese Berücksichtigung die oben angeführten Verhältnisse einander schon wirklich so nahe gebracht worden sind, dass sie als Grössen derselben Ordnung betrachtet werden können.

Es kommt daher darauf an, auch noch die anderen Verschiedenheiten aufzusuchen und zu bestimmen, welche nächst der Massenverschiedenheit den grössten Einfluss haben, um zu prüfen, wie dadurch die oben angeführten Verhältnisse geändert und ob sie der Gleichheit dadurch noch näher gebracht werden.

Diese Untersuchung ist darum von Wichtigkeit, weil wenn gar keine Verschiedenheit der gebrauchten Elektrodiamagnete und Elektromagnete stattgefunden und beide aus grösserer Entfernung gewirkt hätten, nach den in der Einleitung aufgestellten Gesetzen der diamagnetischen Polarität die beiden obigen Verhältnisse sich ganz gleich ergeben müssten. Da sich nun aber diese Gleichheit praktisch nicht unmittelbar prüfen lässt, so ist es wichtig, dass man wenigstens prüft, ob man sich dieser Gleichheit desto mehr nähere, je genauer man die factische Verschiedenheit der gebrauchten Elektrodiamagnete und Elektromagnete und den verschiedenen Einfluss, welchen die geringe Entfernung, aus der sie wirken, auf das Verhältniss ihrer Wirkungen ausübt, bestimmt und berücksichtigt, wodurch man näherungsweise dasselbe erreicht, wie wenn man die behauptete Gleichheit unmittelbar zu prüfen im Stande wäre.

Zu diesem Zwecke dient nun die folgende Uebersicht und Erörterung aller hierbei in Betracht kommenden Differenzen.

Erstens müsste eigentlich bei der geringen Entfernung, auf welche sich die beobachteten Wirkungen beziehen, zum Zwecke einer genauen Vergleichung die ideale Vertheilungsweise der magnetischen Fluida, wie sie an der Oberfläche des Wismuthstabes anzunehmen sei, im Vergleiche zu der bei dem Eisenstabe anzunehmenden, näher bekannt sein. Da dies nicht der Fall ist, so leuchtet ein, dass eine solche Vergleichung, auch wenn die Genauigkeit der Beobachtungen nichts zu wünschen liesse, doch nur einen ungefähren Ueberschlag geben kann, weil dabei die in geringen Entfernungen ausgeübten Wirkungen den Momenten proportional gesetzt werden müssen, was genau nur von den Wirkungen in grösseren Entfernungen gilt.

Zweitens sind bei obigen Versuchen zwei verschiedene Eisenstäbchen gebraucht worden, von denen das eine bloss 5, 8, das andere 790,86 Milligramm wog. Wir dürfen nicht voraussetzen, dass das Eisen beider Stäbchen in magnetischer Beziehung sich ganz gleich verhalte. Es wurde daher der Magnetismus beider Stäbchen unter Einwirkung desselben galvanischen Stroms verglichen, und in der That ergab sich bei geringerer Intensität dieses Stroms, dass das Verhältniss des magnetischen Moments von dem Verhältnisse ihrer Massen sehr abwich; bei wachsender Intensität des Stroms verschwand aber diese Ungleichheit und der Magnetismus beider Stäbchen ergab sich bald ihren Massen fast genau proportional, woraus folgt, dass bei unsern Versuchen, wo noch stärkere Ströme gebraucht wurden, eine Reduction wegen Verschiedenartigkeit des Eisens nicht nöthig ist.

Drittens sind bei obigen Versuchen verschiedene Wismuthstäbe gebraucht worden, nämlich zwei kleinere zur Beobachtung der magnetischen, und ein grösserer zur Beobachtung der magnetelektrischen Wirkung, von denen auch nicht vorausgesetzt werden kann, dass sie sich in diamagnetischer Beziehung ganz gleich verhielten. Es wurde daher der letztere in zwei Hälften getheilt, die den beiden ersteren an Länge und Dicke nahe gleich waren und darauf mit beiden Paaren abwechselnd einige Versuche zur Vergleichung ihres Diamagnetismus gemacht, aus denen sich allerdings eine nicht ganz unerhebliche Verschiedenheit herausstellte; es verhielt sich nämlich die Wirkung des ersten Paares zu der des zweiten etwa wie 1266 : 1000. Wenn sich also aus den Inductionswirkungen des grösseren Stabs Art. 8. 9 das diamagnetische Moment des Wismuths im Vergleiche zum magnetischen Momente des Eisens $= \frac{1}{456700}$ ergiebt, so würde es für das Wismuth des andern Stabs $= \frac{1}{360740}$ erhalten werden, wodurch die Differenz dieses Verhältnisses von dem aus den magnetischen Wirkungen abgeleiteten nicht verkleinert, sondern sogar noch vergrössert wird.

Viertens kommt aber auch noch die Verschiedenheit der elektromagnetischen Scheidungskraft der beiden gebrauchten Apparate in Betracht. Diese Verschiedenheit lässt sich mit hinreichender Genauigkeit aus den für diese Apparate gegebenen Bestimmungen ableiten und es ergiebt sich daraus, dass die elektromagnetische Scheidungskraft des Inductionsapparats 4,8 Mal grösser als die des elektro-

diamagnetischen Messapparats war*). Zugleich ergiebt sich, dass in beiden Apparaten die elektromagnetische Scheidungskraft eine solche Stärke besass, dass nach Müller's interessanten Versuchen das magnetische Moment der Eisenstäbchen nicht merklich von seinem Maximumwerthe verschieden sein konnte**), dass also die 4,8 Mal

---

*) Die Drahtspirale des elektrodiamagnetischen Messapparats hatte nach Art. 2 4 Lagen jede von 146 Windungen und war 190 Millimeter lang; ihr innerer Durchmesser war 17, der äussere 26 Millimeter, und die Intensität des durchgehenden Stroms war nach Art. 3 = 16,31. Hieraus ergiebt sich die elektromagnetische Scheidungskraft in ihrer Mitte sehr nahe

$$= \frac{4 \,.\, 146 \,.\, 2\pi \,.\, 16,31}{\frac{1}{2} \,.\, 190} = 629,9.$$

Die Drahtspirale des Inductionsapparats dagegen hatte nach Art. 7 8 Lagen jede von 120 Windungen und war 383 Millimeter lang; ihr innerer Durchmesser war 23,9, der äussere 70 Millimeter und die Ablenkung einer in 708 Millimeter westlichen Abstand befindlichen Boussole war nach den Versuchen Art. 7 etwa 32^0, wobei die Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus = 1,8 zu setzen ist. Hieraus lässt sich zunächst die Intensität des Stroms i berechnen und ergiebt sich sehr nahe

$$i = \frac{383}{S} \,.\, \frac{1,8 \,.\, \text{tang } 32^0}{\frac{1}{(708 - \frac{1}{2}\, 383)^2} - \frac{1}{(708 + \frac{1}{2}\, 383)^2}}$$

wo S den von der Spirale umwundenen Flächenraum, welcher = 1793200 Quadratmillimeter gefunden wird, also $i = 95,6$. Die gesuchte Scheidungskraft der Spirale folgt hieraus sehr nahe $= \frac{8 \,.\, 120 \,.\, 2\pi \,.\, 95,6}{\frac{1}{2} \,.\, 383} = 3012$. Es verhält sich aber 3012 : 629,9 sehr nahe wie 4,8 : 1.

**) Ein weicher Eisenstab nimmt bald einen schwächeren bald einen stärkeren Magnetismus an, je nachdem die magnetische oder elektromagnetische Scheidungskraft, die auf ihn wirkt, kleiner oder grösser ist. Herr Professor Joh. Müller in Freiburg hat nun in seinem »Berichte über die neuesten Fortschritte der Physik« Braunschweig 1850, S. 494 ff. eine interessante Untersuchung über die Abhängigkeit des Magnetismus solcher Eisenstäbe von der Stärke der auf sie wirkenden Scheidungskräfte mitgetheilt, welche sich dadurch auszeichnet, dass der Magnetismus der Eisenstäbe für sehr verschiedene, auch sehr grosse, Scheidungskräfte bestimmt worden ist. Es hat sich daraus das merkwürdige Resultat ergeben, dass der Magnetismus des Eisenstabs der Scheidungskraft, welche auf das Eisen wirkt, keineswegs immer proportional bleibt, sondern dass er sich bei grösseren Scheidungskräften einem Grenzwerthe nähert. Müller hat die Resultate seiner mit einer elektromagnetischen Spirale gemachten Messungen in folgender Formel zusammengefasst:

$$s = 0,016 \,.\, d^{\frac{3}{2}} \,.\, \text{tang } \frac{m}{0,00108 \,.\, dd},$$

worin, wenn i die Stromstärke der elektromagnetischen Spirale nach absolutem Maasse bezeichnet (nach S. 252 a. a. O.)

$$i = 66,813 \,.\, s,$$

stärkere Scheidungskraft des Inductionsapparats dem Eisenstäbchen keinen stärkeren Magnetismus ertheilte, als er durch die einfache Kraft

---

und (nach S. 511) wenn M den Magnetismus des Eisenstabs in der elektromagnetischen Spirale nach absolutem Maasse bezeichnet,

$$M = 5426021 \,.\, m$$

zu setzen ist. Die von Müller gebrauchten Eisenstäbe waren (nach S. 502) 330 Millimeter lang und lagen in einer Drahtspirale, welche 300 Millimeter lang war, aus der sie auf beiden Seiten 15 Millimeter hervorragten. d bezeichnet die Dicke des Eisenstabs. Die Drahtspirale bestand aus 5 Lagen übereinander, jede zu 76 Windungen; ihr innerer Durchmesser war 49 Millimeter und die Dicke des Drahts 2,8 Millimeter. Hiernach wird die Stärke der Scheidungskraft, welche der Strom einer Lage von Windungen, deren Halbmesser $= r$ ist, auf einen Punkt des Eisenstabs ausübt, welcher in der Entfernung $= a$ von der Mitte der Spirale liegt, durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$\frac{2 \,.\, 76}{300}\,\pi rri \int_{a-150}^{a+150} \frac{dx}{(rr+xx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{152}{300}\,\pi i \left\{ \frac{a+150}{\sqrt{((a+150)^2+rr)}} - \frac{a-150}{\sqrt{((a-150)^2+rr)}} \right\}.$$

Im Mittel für den ganzen Eisenstab folgt hieraus die Stärke dieser Kraft

$$\frac{152 \,.\, \pi i}{300 \,.\, 330} \int_{-165}^{+165} \left[\frac{a+150}{\sqrt{((a+150)^2+rr)}} - \frac{a-150}{\sqrt{((a-150)^2+rr)}} \right] da$$

$$= \frac{304 \,.\, \pi i}{99000} \left\{ \sqrt{(315^2+rr)} - \sqrt{(15^2+rr)} \right\}.$$

Endlich für alle 5 Lagen:

$$\frac{304 \,.\, \pi i}{99000} \cdot \frac{5}{14} \int_{24,5}^{38,5} \left[\sqrt{(315^2+rr)} - \sqrt{(15^2+rr)} \right] dr = 13{,}562 \,.\, i.$$

Diese Kraft unterscheidet sich von der erdmagnetischen Kraft nur durch ihre Stärke und kann daher nach demselben absoluten Maasse bestimmt werden, was hier auch geschehen ist. Wir wollen die Stärke dieser Kraft mit X bezeichnen, so ist also

$$X = 13{,}562\, i.$$

Setzt man nun diese Werthe in die Müller'sche Gleichung, so erhält man

$$X = 14{,}498 \,.\, d^{\frac{3}{2}} \,.\, \text{tang}\, \frac{M}{5860 \,.\, dd}.$$

Diese Formel gilt zunächst für Eisenstäbe von 330 Millimeter Länge; um sie auf andere Stablängen anwendbar zu machen, muss der Bogen $\frac{M}{5860 \,.\, dd}$ mit 330 multiplicirt und mit der Stablänge l dividirt werden, also

$$X = 14{,}498 \,.\, d^{\frac{3}{2}} \,.\, \text{tang}\, \frac{M}{17{,}76 \,.\, ddl},$$

jedoch hat Müller selbst bemerkt, dass der so in Rechnung gebrachte Einfluss der Länge mit der Erfahrung nicht genau übereinstimme und daher noch einer genaueren Prüfung bedürfe. Wendet man nun diese aus den Müller'schen Versuchen abgeleitete Regel an,

erhalten haben würde. Anders verhält es sich mit den Wismuthstäben, deren diamagnetisches Moment auch noch mit den grössten darstellbaren Scheidungskräften proportional wachsend anzunehmen ist*).

---

um den Magnetismus der beiden Eisenstäbchen zu bestimmen, welche sich in den beiden oben beschriebenen Spiralen des elektrodiamagnetischen Messapparats und des Inductionsapparats befanden, so hat man für das erste Stäbchen $l = 92$ und ausserdem sein absolutes Gewicht = 5,8 Milligramm und sein specifisches Gewicht = 7,78, woraus seine Dicke $d = 0,1016$ folgt. Der Werth von X für dieses Stäbchen ist in der vorigen Note bestimmt $X = 629,9$; man erhält also für dieses Stäbchen

$$\frac{M}{ddl} = 17,76 \text{ arc tang } 89^0\ 57'\ 23'' = 27,886.$$

Für das zweite Stäbchen ist $l' = 186$, ausserdem ist sein absolutes Gewicht = 790,86 Milligramm und sein specifisches Gewicht = 7,78, woraus seine Dicke $d' = 0,8342$ gefunden wird. Der Werth von X' ist für dieses Stäbchen in der vorigen Note bestimmt $X' = 3012$; man erhält daher

$$\frac{M'}{d'd'l'} = 17,76 \text{ arc tang } 89^0\ 47'\ 23'' = 27,834.$$

Bemerkt man, dass hierin ddl und $d'd'l'$ den Massen der beiden Eisenstäbchen proportional sind, so ergiebt sich hieraus ein ganz nahe gleiches Verhältniss des Magnetismus zur Masse für beide Stäbchen, ungeachtet auf das letztere Stäbchen eine 4,8 Mal grössere Scheidungskraft wirkte. Eine genauere Bestimmung hierüber findet man Art. 24 bis 26, wo auch die von Buff und Zamminer gegen die Müller'schen Versuche erhobenen Bedenken erörtert werden.

*) Aus keiner bisher bekannten Thatsache lässt sich eine Abweichung von dem Gesetze der Proportionalität des Diamagnetismus mit der magnetischen Scheidungskraft entnehmen, vielmehr lassen sich, wenn es auch an Messungen fehlt, verschiedene für dieses Gesetz sprechende Thatsachen anführen. Die wichtigste und auch in anderen Beziehungen interessanteste ist die von Plücker entdeckte und näher untersuchte Thatsache, wonach derselbe Magnetpol je nach der verschiedenen Entfernung in derselben Masse, z. B. in Holzkohle, Diamagnetismus oder Magnetismus hervorruft. Die nähere Untersuchung, welche Plücker hierüber in Poggendorff's Annalen 1848, Bd. 73, S. 616 ff. mitgetheilt hat, beweist, dass hierbei die verschiedene Entfernung des Magnetpols unmittelbar als solche nicht in Betracht kommt, sondern nur indirect, insofern einer grösseren Entfernung eine Abnahme der Kraft entspricht; Plücker hat nämlich bewiesen, dass der Magnetismus der Holzkohle in Diamagnetismus verwandelt werde durch die blosse Zunahme der auf die Holzkohle wirkenden magnetischen Kraft. Diese interessante Thatsache findet nämlich ihre einfachste Erklärung nach obigem Gesetze der Proportionalität des Diamagnetismus mit der magnetischen Scheidungskraft, sobald man dabei nur das von Müller für den Magnetismus des Eisens bewiesene Gesetz auch für den Magnetismus der Holzkohle gelten lässt; denn nähert sich der Magnetismus der Holzkohle bei zunehmender Scheidungskraft einem Grenzwerthe, während der Diamagnetismus der

Reducirt man hiernach das aus den Inductionswirkungen erhaltene Resultat auf eine 4,8 Mal schwächere Scheidungskraft, um es mit dem aus der magnetischen Wirkung erhaltenen Resultate vergleichbar zu machen, so muss das diamagnetische Moment des Wismuths 4,8 Mal kleiner genommen werden, während das magnetische Moment des Eisens unverändert bleibt. Man erhält dann für das erstere Moment im Vergleiche zu dem letzteren, statt $\frac{1}{360740}$, blos $\frac{1}{4,8 \, . \, 360740} = \frac{1}{1731560}$.

Dieses aus der magnetelektrischen Wirkung abgeleitete Resultat lässt sich nun mit dem aus der magnetischen Wirkung Art. 4 gefundenen direct vergleichen, wonach nämlich das diamagnetische Moment des Wismuths im Vergleiche zum magnetischen Momente des Eisens $= \frac{1}{1470000}$ erhalten wurde.

Die Differenz der beiden betrachteten Verhältnisse, welche vorher 200 Procent betrug, ist durch Berücksichtigung der angegebenen Verschiedenheit auf etwa 17 bis 18 Procent reducirt worden und diese Annäherung an die Gleichheit muss um so befriedigender erscheinen, als dabei, weil der zuerst angeführte Grund jener Differenz unberücksichtigt bleiben musste, nur von einer ungefähren Vergleichung die Rede sein konnte. Auch ist zu bemerken, dass der zuletzt angegebene, bei weitem einflussreichste Grund jener Differenz noch einer genaueren Berücksichtigung fähig ist, wenn dabei statt der oben angeführten Müller'schen Versuche die genaueren darüber gewonnenen Resultate zum Grunde gelegt werden, die man Art. 24 bis 26 zusammengestellt findet, wodurch, wie in der Note Art. 27 angegeben ist, das Verhältniss $\frac{1}{1470000}$ auf $\frac{1}{1593000}$ vermindert wird, so dass nur noch eine Differenz von etwa 8 Procent im Vergleiche mit dem andern Verhältnisse übrig bleibt.

Nach dieser Vergleichung des Verhältnisses der magnetischen und magnetelektrischen Wirkungen eines Elektrodiamagnets mit dem Verhältnisse der magnetischen und magnetelektrischen Wirkungen eines Elektromagnets findet sich also das Resultat bestätigt, dass in der Natur des Diamagnetismus die elektrodiamagnetische und die diamagnetelektrische Wirksamkeit wirklich ebenso begründet ist,

---

Holzkohle gleichmässig fortwächst, so leuchtet von selbst ein, dass der Diamagnetismus endlich den Magnetismus übertreffen muss, was so viel heisst, als dass der Magnetismus der Holzkohle in Diamagnetismus verwandelt werde.

wie in der Natur des Magnetismus die elektromagnetische und die magnetelektrische, und zwar stehen auch jene Wirkungen ihrer Grösse nach in demselben Verhältnisse zu einander, wie diese, so weit sich dies prüfen lässt, zum Beweise, dass zwischen diamagnetischer und magnetischer Wirksamkeit in den verschiedenartigsten Beziehungen gar kein Unterschied stattfindet, wodurch das in der Einleitung aufgestellte Gesetz der diamagnetischen Polarität bewiesen ist.

Es bliebe hiernach nur noch übrig, die aus den obigen Versuchen gefundenen Resultate zu benutzen, um das Verhältniss zu bestimmen, in welchem die Stärke des Wismuthdiamagnetismus zur Stärke des Eisenmagnetismus steht. Es leuchtet aber aus den vorhergegangenen Erörterungen ein, dass von einem bestimmten Verhältnisse des Diamagnetismus des Wismuths zum Magnetismus des Eisens im Allgemeinen nicht die Rede sein könne, weil, wenn man auch Wismuth- und Eisenstäbe von gleicher Grösse und Gestalt dabei voraussetzt, jenes Verhältniss doch bei verschiedener Stärke der magnetischen Scheidungskraft sehr verschieden erhalten wird, indem der Diamagnetismus bei zunehmender Scheidungskraft gleichmässig wächst, während der Magnetismus sich einem Grenzwerthe nähert. Ein solches Verhältniss lässt sich daher nur unter der Beschränkung bestimmen, dass die magnetischen Scheidungskräfte so klein sind, dass die Abweichung des Eisenmagnetismus von der Proportionalität mit diesen Kräften dabei noch nicht merklich sei. Unter dieser Beschränkung liesse sich nun zwar nach obigen Resultaten, mit Hülfe des in der Note S. 527 angeführten Müller'schen Gesetzes, das Verhältniss des Wismuthdiamagnetismus zum Eisenmagnetismus bestimmen; es ist aber zweckmässiger, diese Bestimmung zu verschieben, um dabei für den Eisenmagnetismus auch diejenigen Versuche zu benutzen, die wir im letzten Abschnitte Art. 25. 26. kennen lernen werden, wo dann die Bestimmung jenes Verhältnisses beigefügt werden soll.

11.

Faraday's Versuche.

Es soll hier nicht von Faraday's früheren Versuchen gehandelt werden, durch die er zuerst zu der Annahme geführt worden war, welche Plücker am kürzesten in den Worten ausspricht: «Im Wismuth inducirt jeder Nordpol eines Magneten einen Nordpol, jeder Südpol einen Südpol.» Plücker sagt von dieser Annahme, dass jeder Physiker darauf verfallen musste, und dass diamagnetische Polarität eine nothwendige Folge derselben sei. Wir beschränken uns hier auf diejenigen Versuche, welche von Faraday neuerlich zur Widerlegung dieser von ihm zuerst vermutheten diamagnetischen Polarität gemacht worden sind.

In der That waren bald, nachdem die Wichtigkeit eingeleuchtet hatte, welche die wirkliche Nachweisung der diamagnetischen Polarität besitzt, so viele und verschiedene Thatsachen dafür gefunden und mitgetheilt worden, dass diese Polarität fast ausser allem Zweifel gesetzt zu sein schien. Ich habe in meinem ersten Aufsatze (Berichte der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften 1847, S. 346 und Poggendorffs Annalen 1848, Bd. 73, S. 242) besonders die Beweiskraft hervorgehoben, welche in dieser Beziehung der von Reich angestellte Versuch besitzt, wonach Nordpol und Südpol, wenn sie von derselben Seite her auf ein Stück Wismuth wirken, keineswegs dasselbe mit der Summe der Kräfte abstossen, welche sie einzeln ausüben würden, sondern vielmehr nur mit der Differenz dieser Kräfte — und habe andere Versuche beigefügt, welche die beiden Pole eines in diamagnetischem Zustande erhaltenen Wismuthstabs durch den Gegensatz von Anziehung und Abstossung unmittelbar erkennen liessen. Endlich fügte ich auch die mit dem in Art. 7 erwähnten Apparate gemachten Versuche bei, welche gleiche von Diamagnetpolen wie von Magnetpolen ausgeübte elektromotorische Kräfte nachzuweisen schienen. Hieran schlossen sich unmittelbar einige Versuche von Poggendorff an (Annalen 1848, Bd. 73, S. 475 f.), welche theils zur Bestätigung, theils zur Ergänzung dienten, indem sie besonders die Nachweisung der beiden Diamagnetpole durch den Gegensatz der Wirkung gaben, welche der galvanische Strom auf sie ausübt, und geradezu bewiesen, dass ein Wismuthstab in der äquatorialen Lage ein wirklicher Transversal-

magnet wäre, der die Linie seiner Nordpole dem Nordpole und die Linie seiner Südpole dem Südpole des Magnets zukehrte, was ausserdem Plücker (Annalen 1848, Bd. 73, S. 613f.) durch eine sehr sinnreiche darauf gegründete Anwendung bestätigt fand, welche ein einfaches und praktisch wichtiges Mittel an die Hand gab, den Diamagnetismus schwingender Körper bedeutend zu verstärken. Plücker erklärte es dabei selbst für unwidersprechlich, dass der Diamagnetismus in einer polaren Erregung bestehe, eine Theorie, die er zuvor nur wegen der grossen Schwierigkeiten ihrer allgemeinen Begründung fallen gelassen habe und erst dann wieder aufgenommen, als die Polarität so entschieden nachgewiesen worden. Endlich hat Plücker an diesem Orte selbst noch eine der hauptsächlichsten der von ihm erwähnten Schwierigkeiten, nämlich die, welche aus dem bei manchen Körpern beobachteten magnetischen Verhalten in grösserer, und dem diamagnetischen Verhalten in kleinerer Entfernung vom Magnetpole entsprang (siehe die Note S. 529), durch die nähere Untersuchung in solcher Weise erledigt, dass, wie er selbst sagt, «das von ihm nicht vermuthete, aber von rein theoretischem Gesichtspunkte aus zu erwartende Resultat statt der früheren Schwierigkeit eine merkwürdige Bestätigung der von Faraday, Reich, Weber und Poggendorff adoptirten Theorie des Diamagnetismus gebe, zu der auch er sich jetzt entschieden bekenne.»

Allen diesen schnell auf einander gefolgten, in demselben 73. Bde. von Poggendorffs Annalen enthaltenen Nachweisungen der von Faraday zuerst vermutheten diamagnetischen Polarität widerspricht nun Faraday durch seine 23ste Versuchsreihe, deren nähere Betrachtung auch für die hier beschriebenen Versuche von Wichtigkeit ist.

Bei der Autorität, welche dieser grosse Naturforscher mit so vollem Rechte geniesst, und dem Interesse, welches seine Arbeiten überall erregen, dürfen die von ihm angeführten Versuche zur Widerlegung der diamagnetischen Polarität als bekannt vorausgesetzt werden. Auch kann es sich nicht um die Richtigkeit dieser Versuche handeln, an der bei Faraday's anerkannter Meisterschaft nicht zu zweifeln ist. Es handelt sich hier wesentlich nur darum, ob und in wie weit diese Versuche gegen diamagnetische Polarität, wie sie hier gleich zu Anfang definirt worden ist, wirklich zeugen und beweisen. Dabei kommt nun hauptsächlich dreierlei in Betracht: erstens, dass Faraday nicht alle Versuche, welche zur Nachweisung der dia-

magnetischen Polarität gemacht worden sind, wiederholt hat; zweitens, dass Faraday, bei aller Meisterschaft im Gebrauche seiner Hülfsmittel, in der Feinheit der Versuche durch die Instrumente, deren er sich bediente, beschränkt war. Drittens endlich hat Faraday nach seinen Ansichten manche Erscheinungen, die von andern Physikern auf diamagnetische Polarität zurückgeführt werden, auf andere Weise zu erklären gesucht. Es erscheint daher sogar zweifelhaft, ob Faraday die diamagnetische Polarität in dem Sinne, in welchem sie hier zu Anfang definirt worden ist, wirklich bestreitet.

Was die von Faraday nicht wiederholten und unberücksichtigt gelassenen Versuche betrifft, so bemerke ich zunächst, dass in Art. 2689 seiner Abhandlung ein von mir mit einem von Reich gemachten Versuche verwechselt zu sein scheint, wodurch es geschehen ist, dass Faraday den von Reich gemachten Versuch, dessen Beweiskraft für diamagnetische Polarität von mir besonders hervorgehoben worden war, ganz übersehen hat, wonach nämlich Nordpol und Südpol, wenn sie zugleich von derselben Seite her auf ein Stück Wismuth wirken, keineswegs dasselbe mit der Summe der Kräfte abstossen, welche sie einzeln ausüben würden, sondern nur mit der Differenz dieser Kräfte. Dieser Versuch ist von Reich mit dem feinsten Instrumente gemacht worden, was dazu gebraucht werden kann, nämlich mit der feinen Torsionswaage, womit er die classische Wiederholung der Cavendish'schen Versuche ausgeführt hatte. Ich kann hier nur wiederholen, was ich über diesen Versuch in meinem ersten Aufsatze gesagt habe, dass daraus allein schon mit grösster Wahrscheinlichkeit geschlossen werden kann, dass der Grund der diamagnetischen Kraft in einem im Wismuth vorhandenen beweglichen imponderablen Bestandtheile zu suchen sei, welcher bei Annäherung eines Magnetpols verschieden bewegt oder vertheilt werde. Die gleichzeitige Annäherung zweier entgegengesetzter Pole von derselben Seite her bewirkt dann nämlich, dass der imponderable Bestandtheil weder die eine noch die andere Bewegung oder Vertheilung annehmen kann, an welche das Hervortreten der diamagnetischen Kraft geknüpft ist, woraus sich das Verschwinden dieser Kraft in diesem Falle ergiebt. — Ferner gehören hierher die von Poggendorff angestellten und in demselben 73. Bde. der Annalen (S. 475—479) beschriebenen Versuche, durch welche er ohne Hülfe so feiner Messungsmittel, wie ich gebraucht habe, dasselbe Resultat durch einen ein-

fachen, augenfällig überzeugenden Versuch sogar auf zweifache Weise erlangt hat. Die Wiederholung dieser Poggendorff'schen Versuche findet keine Schwierigkeit und ist von verschiedenen Beobachtern ausgeführt worden.

Unter den Instrumenten, die eine noch grössere Feinheit und Genauigkeit gestatten, als diejenigen, deren sich Faraday bedient hat, kommen hauptsächlich die nach den Gauss'schen Vorschriften eingerichteten Magnetometer und Galvanometer in Betracht. Auch ich würde ohne diese Instrumente meine Versuche gar nicht auszuführen im Stande gewesen sein. Wenn nun Faraday diese Versuche, aber ohne diese Instrumente anzuwenden, wiederholt hat, so ist es wohl erklärlich, dass er mit seinen wenn auch sonst feinen Hülfsmitteln die von mir beobachteten sehr schwachen Wirkungen nicht wahrnehmen konnte. Faraday's hauptsächliches Bedenken gegen meine im 73. Bde. von Poggendorffs Annalen mitgetheilten Beobachtungen beruht übrigens darauf, dass ich daselbst die von ihm sehr sorgfältig beachteten Erscheinungen der secundären Volta-Induction gar nicht erwähnt hätte, welche desto deutlicher hätten hervortreten müssen, je feiner meine Instrumente gewesen wären. Ich bemerke hier deshalb, dass obiger aus den «Berichten der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften» entlehnte Artikel in Poggendorffs Annalen nur eine vorläufige Notiz meiner Arbeit geben sollte, wobei die speciellere Erörterung für eine spätere Abhandlung vorbehalten wurde. Es wird genügen, hier noch anzuführen, dass ich bei jenen Versuchen den Einfluss der secundären Volta-Induction zwar durch angemessene Combination der Versuche möglichst zu eliminiren gesucht habe; dass es aber jedenfalls weit vorzuziehen ist, diesen Einfluss, wie es bei den in dieser Abhandlung beschriebenen Versuchen geschehen ist, ganz zu beseitigen.

Fassen wir kurz zusammen, welchen Einfluss hiernach diese Faraday'sche Untersuchung auf die Frage der diamagnetischen Polarität habe, in dem Sinne, wie sie hier gleich zu Anfang definirt worden ist, so dürfte derselbe von geringer Bedeutung erscheinen. Faraday hat nämlich mehrere Versuche von Reich und Poggendorff übersehen, bei andern Versuchen, namentlich bei den von Plücker gemachten, hat er bloss eine auf andern Ansichten beruhende Erklärung gegeben, wobei es ungewiss erscheint, ob diese Ansichten mit demjenigen Sinne der diamagnetischen Polarität, welcher in

der hier gleich zu Anfang gegebenen Definition aufgestellt worden ist, in wirklichem Widerspruche stehen. Was endlich noch besonders den Zweifel betrifft, welchen Faraday an der Richtigkeit der Resultate meiner Versuche äussert, so dürfte erstens dieser Zweifel durch die obige Bemerkung gehoben sein, zweitens findet derselbe auf die in dieser Abhandlung beschriebenen Versuche gar keine Anwendung.

12.

Feilitzsch's Versuche und Theorie.

In *Art.* 3 und 4 ist bewiesen worden, dass ein Wismuthstab in einer galvanischen Spirale als Elektrodiamagnet auf eine Magnetnadel ein Drehungsmoment gerade in entgegengesetzter Richtung wie ein Eisenstab in derselben Spirale als Elektromagnet ausübt. Hiermit steht nun aber das Resultat in Widerspruch, zu welchem Feilitzsch gelangt ist, indem er, geleitet durch eine andere theoretische Ansicht, ein anderes Resultat erwartete und durch Versuche zu bestätigen suchte (siehe Poggendorffs Annalen 1851, Bd. 82, S. 90—110), nämlich folgendes: «Wismuth erhält innerhalb der elektrischen Spirale eine zwar schwächere, aber eine gleichgerichtete Polarität, wie das weiche Eisen.»

Der Grund dieses Widerspruchs liegt, wie ich glaube, in einer sehr wesentlichen Verschiedenheit der von mir und Feilitzsch gebrauchten Einrichtung. Feilitzsch sagt: «Die Spirale wurde etwa 200^{mm} entfernt auf der Westseite einer kleinen, an einem Coconfaden aufgehangenen Boussole aufgestellt, und durch einen auf der Ostseite befindlichen Nebenmagnet die Nadel wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückgebracht.» Von mir waren dagegen zwei Spiralen gebraucht und diese in Beziehung auf die Boussole so symmetrisch aufgestellt worden, dass es gar keines solchen Nebenmagnets bedurfte, um die Nadel in ihre ursprüngliche Lage zurückzubringen. Der wesentliche Unterschied beider Einrichtungen ist der, dass bei Feilitzsch die Nadel nur bei einer bestimmten Stromintensität im magnetischen Meridiane sich befindet, durch jede Variation der Stromintensität aber bald nach der einen bald nach der andern Seite abgelenkt wird; bei mir dagegen haben die Aenderungen der Stromintensität auf den Ruhestand der Nadel gar keinen Einfluss. Diese Unabhängigkeit des Ruhestands der Nadel von den Schwankungen der Strominten-

sität in der Spirale ist aber nothwendig, wenn die bei Einlegung des Wismuthstabs in die Spirale beobachtete Ablenkung der Nadel der unmittelbaren Wirkung des Wismuthstabs auf die Nadel zugeschrieben werden soll; denn die Einlegung des Wismuthstabs in die Spirale bringt eine kleine Intensitätsänderung des Stroms hervor und darin kann bei Feilitzsch die Ursache der Ablenkung der Nadel gelegen haben. Es bringt nämlich die Einlegung des kalten Wismuthstabs in die durch den Strom erwärmte Spirale eine Abkühlung der Spirale und dadurch eine Verstärkung der Stromintensität hervor, welche eine Ablenkung der Nadel in der von Feilitzsch beobachteten Richtung zur Folge haben muss. Ich habe vor längerer Zeit zahlreiche Versuche nach derselben Methode wie Feilitzsch ausgeführt und dabei ähnliche Resultate gefunden; es zeigte sich aber bei genauerer Prüfung, dass die beobachtete Kraft nicht momentan in dem Augenblicke der Einlegung des Wismuthstabs eintrat, sondern allmählig, und ebenso beim Herausziehen nicht sogleich, sondern allmählig wieder verschwand, was ein genügender Beweis ist, dass es sich um keine unmittelbare Wirkung des Wismuthstabs handelte. Diese Einwirkungen liessen sich auch vermehren, vermindern oder umkehren durch blosse Abkühlung oder Erwärmung des Wismuthstabs. Es ist wahrscheinlich, dass auch die von Feilitzsch beobachteten Ablenkungen der Nadel von diesen Temperatureinflüssen auf die Stromintensität hergerührt haben.

Ueber die Theorie des Diamagnetismus, welche Feilitzsch dabei zu geben versucht hat, möge hier nur Folgendes bemerkt werden. Feilitzsch will die diamagnetischen Erscheinungen ebenfalls aus einer bestimmten Vertheilung der magnetischen Fluida erklären; nimmt aber an, dass diese Vertheilung von einer Scheidung der magnetischen Fluida nach gleicher Richtung wie im Eisen herrühre, und dass der Unterschied nur darin bestehe, dass diese Scheidung im Eisenstabe von der Mitte nach den Enden zu abnehme, im Wismuthstabe dagegen zunehme. Aus dieser Zunahme ergiebt sich zwischen der Mitte und dem Ende des Stabs eine Ausscheidung von entgegengesetztem freien Magnetismus wie am Ende, und wenn dieser entgegengesetzte, zwischen der Mitte und dem Ende ausgeschiedene freie Magnetismus stärker sein könnte, als der am Ende, so würden sich daraus die diamagnetischen Erscheinungen wohl erklären lassen. Hätte aber Feilitzsch die Bedingungen näher geprüft, unter welchen

nach seiner eigenen Darstellung dieser von ihm zur Erklärung der diamagnetischen Erscheinungen vorausgesetzte Fall möglich wäre, so würde er gefunden haben, dass dieser Fall nur dann möglich ist, wenn die magnetischen Fluida in der Mitte des Stabs nicht nach gleicher, sondern nach entgegengesetzter Richtung geschieden sind wie an seinen Enden, was aber seiner Voraussetzung widerspricht. Man sieht überhaupt leicht ein, dass eine Erklärung der diamagnetischen Erscheinungen aus einer Vertheilung der magnetischen Fluida, welche von einer der Richtung nach gleichen Scheidung wie im Eisen herrührt, unmöglich ist.

Ueber den Zusammenhang der Lehre vom Diamagnetismus mit der Lehre von dem Magnetismus und der Elektricität.

13.

In den beiden ersten Abschnitten dieser Abhandlung ist versucht worden, das Gesetz der diamagnetischen Polarität in einer grösseren Allgemeinheit zu begründen, hauptsächlich dadurch, dass seine Gültigkeit auch auf die elektrodiamagnetische und diamagnetelektrische Wirkung ausgedehnt wurde. Durch dieses Gesetz allein wird aber, auch wenn es allgemein ist, noch keine Theorie des Diamagnetismus begründet; denn der Diamagnetismus wird dadurch nur aus seinen Wirkungen definirt: es gehört aber zur Begründung einer Theorie des Diamagnetismus, dass derselbe nicht bloss aus seinen Wirkungen, sondern auch aus seinen Ursachen definirt werde. Ich werde daher in diesem Abschnitte die hiernach nothwendige Ergänzung der Theorie erörtern und dasjenige, was ich über die Ursachen des Diamagnetismus schon in meinem ersten Aufsatze (in den Berichten 1847 und in Poggendorffs Annalen 1848, Bd. 73) gesagt habe, ausführlicher und vollständiger zu entwickeln versuchen.

14.

Ueber den Weg zur Erforschung der Ursachen des Diamagnetismus.

Man unterscheidet in der Lehre vom Magnetismus zwei Arten von Magneten, nämlich beharrliche und veränderliche. Ein Magnet von glashartem Stahle ist z. B. ein beharrlicher, ein Magnet von weichem

Eisen ein veränderlicher. Genau genommen findet nun zwar in der Wirklichkeit kein strenger Gegensatz zwischen beharrlichen und veränderlichen Magneten statt, denn alle Magnete, auch die beharrlichsten, zeigen sich unter der Einwirkung sehr grosser Kräfte veränderlich, und ebenso zeigen sich alle Magnete, auch vom weichsten Eisen, unter der Einwirkung sehr kleiner Kräfte beharrlich. Da man aber in der Regel zu physikalischen Versuchen Magnete wählt und unter Verhältnissen betrachtet, wo entweder der beharrliche oder der veränderliche Theil ihres Magnetismus nicht hervortritt, so kann jene einfache Unterscheidung in den meisten Fällen ohne Nachtheil für die Sache beibehalten werden. Bei der Betrachtung dieser beiden Arten von Magneten soll hier nun hauptsächlich folgender Unterschied, der sich zwischen ihnen machen lässt, hervorgehoben werden, dass nämlich der Magnetismus der beharrlichen Magnete, insofern sie wirklich als beharrlich betrachtet werden, nur aus seinen Wirkungen erforscht werden kann; der Magnetismus der veränderlichen Magnete dagegen auf doppelte Weise, nämlich sowohl aus seinen Wirkungen, als auch aus seinen Ursachen.

Versucht man diese zunächst für Magnete aufgestellte Unterscheidung auch auf Diamagnete anzuwenden, so ergiebt sich, dass es keine beharrlichen Diamagnete giebt, oder vielmehr, dass beharrliche Diamagnete von beharrlichen Magneten nicht unterschieden werden können. Es kommen also nur veränderliche Diamagnete in Betracht, und diese lassen sich gerade so wie veränderliche Magnete auf doppelte Weise erforschen, theils aus ihren Wirkungen, theils aus ihren Ursachen.

Nun ist bekannt, dass man durch Erforschung des Magnetismus eines Magnets aus seinen (auf andere Körper ausgeübten) Wirkungen zur Kenntniss der idealen Vertheilung der magnetischen Fluida an der Oberfläche des Magnets gelangen kann, von welcher Gauss bewiesen hat, dass sie die Kenntniss des wahren inneren Zustands bei der Betrachtung aller Wirkungen vollkommen vertritt, und es ist ein grosser Gewinn für viele Forschungen, dass durch die Betrachtung der idealen Vertheilung ein Weg gegeben ist, alle Wirkungen einfach und vollständig, ohne Hülfe einer Hypothese über das Innere des Körpers, zusammen zu fassen, besonders dann, wenn die Ursachen jener Wirkungen unbekannt sind und erst erforscht werden sollen. Gerade

daraus aber, dass diese Kenntniss von der idealen Vertheilung, welche man aus den beobachteten Wirkungen erwerben kann, zur Uebersicht aller Wirkungen so ganz Genüge leistet, leuchtet von selbst ein, dass man auf dem Grunde der beobachteten Wirkungen allein auch nicht weiter gelangen könne, als zur Kenntniss dieser idealen Vertheilung, welche doch noch von der Kenntniss der wahren inneren Natur des Magnets nothwendig unterschieden werden muss: dass man also auf dem blossen Grunde der beobachteten Wirkungen z. B. nicht im Stande ist, die wirkliche Vertheilung der im Magnete enthaltenen magnetischen Fluida, oder die wirkliche Zahl, Stärke und Anordnung der in ihm enthaltenen elektrischen Ströme zu erfahren.

Dasselbe gilt nun auch von den Wirkungen eines Diamagnets, und man könnte also zwar zur Kenntniss einer solchen idealen Vertheilung magnetischer Fluida an der Oberfläche eines Diamagnets gelangen und diese würde die Kenntniss seines wahren inneren Zustands in der Betrachtung aller seiner Wirkungen vollkommen ersetzen, aber man würde dadurch allein weder einen Aufschluss über den wirklichen inneren Zustand des Diamagnets, noch über das eigentliche Wesen des Diamagnetismus, noch über seine Entstehung und Veränderung erhalten. Um ihnen auf die Spur zu kommen, darf man sich daher auf die Betrachtung der Wirkungen und der davon abhängigen idealen Vertheilung nicht beschränken, sondern es ist nothwendig, eine andere Betrachtung zu Hülfe zu nehmen, welche auf einem von diesen Wirkungen unabhängigen Fundamente beruht.

Alle möglichen Ursachen des Diamagnetismus, ebenso wie des Magnetismus, lassen sich im Allgemeinen in innere und äussere scheiden. Die äussere Ursache ist (gleich den Wirkungen) durch die Beobachtung gegeben: sie ist für Magnetismus und Diamagnetismus dieselbe, nämlich eine ihrer Grösse und Richtung nach bestimmte magnetische oder elektromagnetische Scheidungskraft. Wäre ausser dieser äusseren Ursache die innere, im Körper selbst liegende, bekannt, so würde durch beide der Diamagnetismus bestimmt sein, und umgekehrt öffnet sich ein Weg, die unbekannte innere Ursache zu bestimmen, wenn ausser der bekannten äusseren Ursache der aus beiden resultirende Diamagnetismus (aus den Wirkungen) schon bekannt ist. Folgt man dem hier angedeuteten Wege und stellt die bekannten magnetischen Scheidungskräfte mit der aus den Wirkungen erforschten

idealen Vertheilung sowohl für Eisen als auch für Wismuth zusammen; so ergiebt sich, dass gleiche Scheidungskraft entgegengesetzte ideale Vertheilungen beim Eisen und beim Wismuth hervorbringt, oder umgekehrt, dass eine gleiche ideale Vertheilung bei Eisen und Wismuth entgegengesetzt gerichteten Scheidungskräften entspricht. Der Grund davon, dass entgegengesetzte äussere Ursachen im Eisen und Wismuth gleiche Wirkungen hervorbringen, muss nun in der Verschiedenheit der inneren, im Eisen und Wismuth selbst gelegenen, Ursachen enthalten sein. Um nun die hierdurch gegebene Verschiedenheit der inneren Ursachen im Eisen und Wismuth näher zu bestimmen, ist es nothwendig, alle möglichen inneren Ursachen, welche solche Wirkungen, die aus einer idealen Vertheilung erklärbar sind, haben können, zu classificiren und dann zu prüfen, ob unter allen, die wir aufzählen können, solche enthalten sind, welche von dem soeben erwähnten bei magnetischen und diamagnetischen Körpern thatsächlich vorhandenen Gegensatze Rechenschaft geben können.

15.

Classification der inneren Ursachen, welche den durch eine ideale Vertheilung gegebenen Wirkungen zum Grunde liegen können.

Man kann vier wesentlich verschiedene Arten von inneren, in den Körpern gelegenen, Ursachen angeben, welche solche, aus einer idealen Vertheilung magnetischer Fluida erklärbare, Wirkungen hervorbringen können:

1) die innere Ursache solcher Wirkungen kann in der Existenz zweier magnetischen Fluida, welche (mehr oder weniger) unabhängig von ihrem ponderablen Träger beweglich sind, enthalten sein;

2) sie kann in der Existenz zweier magnetischen Fluida enthalten sein, welche nur mit den Moleculen ihres ponderablen Trägers beweglich sind (drehbare Molecularmagnete);

3) sie kann in der Existenz beharrlicher, von den zwei elektrischen Fluidis gebildeter Molecularströme enthalten sein, welche mit den Moleculen drehbar sind;

4) sie kann in der Existenz zweier beweglicher elektrischer

Fluida enthalten sein, welche in Molecularströmung versetzt werden können.

Diese vier hier angeführten möglichen inneren Ursachen der durch eine ideale Vertheilung an der Oberfläche erklärbaren Wirkungen sind die einzigen, die man kennt und der Prüfung unterwerfen kann. Der erste Fall liegt der von Coulomb und Poisson entwickelten Theorie des Magnetismus zum Grunde; — der dritte Fall liegt dem von Ampère entwickelten Zusammenhange der Lehre vom Magnetismus mit der Elektrodynamik zum Grunde; — der zweite Fall lässt sich auf den dritten reduciren, indem man nach dem von Ampère bewiesenen Theoreme, dass Molecularmagnete und Molecularströme in allen ihren Wirkungen gleich sind, die ersteren für die letzteren substituirt. — Es bleibt also nur noch der vierte Fall übrig, der bisher unbeachtet und unerörtert geblieben ist.

16.

Abhängigkeit der idealen Vertheilung von der magnetischen Scheidungskraft, nach Verschiedenheit der aufgeführten vier möglichen inneren Ursachen.

Für jeden dieser vier Fälle ergiebt sich nun leicht ein bestimmter Zusammenhang zwischen der Art der idealen Vertheilung und der Richtung der magnetischen Scheidungskraft, der sie entspricht. Für den ersten Fall ergiebt sich nach Poisson's Theorie, dass, wenn man in der Richtungslinie der magnetischen Scheidungskraft diejenige Richtung als die positive bezeichnet, nach welcher der Nordpol einer Magnetnadel getrieben wird, und wenn man für die dieser Scheidungskraft entsprechende ideale Vertheilung die Schwerpunkte des nördlichen und südlichen Fluidums bestimmt, der erstere von diesen beiden Schwerpunkten gegen den letzteren in positiver Richtung verschoben ist. — Für den dritten Fall ist dieser Zusammenhang von Ampère entwickelt worden und es hat sich ergeben, dass hier dieselbe Abhängigkeit der idealen Vertheilung von der magnetischen Scheidungskraft stattfindet. Und aus der schon erwähnten Zurückführung des zweiten Falls auf den dritten leuchtet von selbst ein, dass dieselbe Abhängigkeit auch für den zweiten Fall gilt. — Es bleibt also in Beziehung auf diese Abhängigkeit nur noch der vierte Fall zu erörtern übrig.

Dieser vierte Fall setzt elektrische Fluida voraus, welche in Molecularströmung versetzt werden können; die Möglichkeit aber, in eine solche Molecularströmung versetzt zu werden, beruht darauf, dass in den einzelnen Moleculen, oder um sie herum, in sich zurücklaufende Bahnen vorhanden sind, in denen jene Fluida ohne Widerstand beweglich sind, woraus folgt, dass es dann nur einer stromerregenden Kraft (d. i. einer Kraft, welche auf das positive und negative Fluidum nach entgegengesetzten Richtungen wirkt) nach der Richtung dieser Bahn bedarf, um die Fluida in dieser Bahn wirklich zu bewegen. Nun beweist die Lehre von der Magnetelektricität, dass durch die zunehmende oder abnehmende Intensität einer magnetischen Scheidungskraft wirklich eine elektromotorische Kraft gegeben sei, welche auf die beiden beweglichen elektrischen Fluida nach entgegengesetzten Richtungen wirkt und sie also in Strombewegung setzen muss. Die Richtung dieser Molecularströmung ist durch das Grundgesetz der magnetischen Induction in ihrer Abhängigkeit von der Zunahme oder Abnahme der magnetischen Scheidungskraft gegeben, und die ideale Vertheilung ist wiederum in ihrer Abhängigkeit von diesen Molecularströmen durch den von Ampère für den dritten Fall entwickelten Zusammenhang der Elektrodynamik mit der Lehre vom Magnetismus gegeben. Es ergiebt sich hieraus also mittelbar auch der Zusammenhang zwischen der idealen Vertheilung und der Zunahme oder Abnahme der magnetischen Scheidungskraft, der sie entspricht.

Es leuchtet aber ferner daraus ein, dass in jedem Augenblicke, wo eine Zunahme oder Abnahme der magnetischen Scheidungskraft stattfindet, eine solche Molecularströmung hervorgebracht werden muss, und dass sich diese nach einander hervorgebrachten Strömungen, wenn sie nicht von selbst wieder verschwinden, summiren müssen. Diese Strömungen verschwinden aber nicht von selbst; denn Ampère hat bewiesen, dass den elektrischen Molecularströmen Beharrlichkeit zugeschrieben werden muss, d. h. dass die elektrischen Fluida bei ihren Kreisbewegungen um die ponderablen Molecule keinen solchen Widerstand erleiden, wie die elektrischen Fluida, welche einen ponderablen Leiter durchströmen, aus dem sich das schnelle Verschwinden der elektrischen Ströme in diesen Leitern erklärt. (Auf dieser von Ampère bewiesenen Beharrlichkeit der Molecularströme beruht auch der

oben angeführte Satz, dass die Möglichkeit, die elektrischen Fluida in Molecularströmung zu versetzen, voraussetze, dass in den einzelnen Moleculen, oder um sie herum, in sich zurücklaufende Bahnen vorhanden seien, in denen jene Fluida ohne Widerstand beweglich wären.) Hieraus folgt nun, dass mit fortgesetzter Zunahme der magnetischen Scheidungskraft auch in der idealen Vertheilung eine fortgesetzte Anhäufung der magnetischen Fluida eintreten müsse, woraus sich ergiebt, dass jeder gegebenen Stärke der magnetischen Scheidungskraft ein bestimmtes Moment ideal vertheilter magnetischer Fluida entspricht. Es findet aber diese Summation nur bei Molecularströmen statt, weil nur bei ihnen die Bewegung der elektrischen Fluida keinen Widerstand findet. Die anderen Ströme, die von der nämlichen Scheidungskraft in weiteren Bahnen hervorgebracht werden, die aber durch den Widerstand, den sie in diesen Bahnen finden, schnell wieder verschwinden, bringen nur im Augenblicke ihrer Erregung magnetische Wirkungen auf andere Körper hervor, welche mit ihnen sogleich verschwinden, sobald die Scheidungskraft, deren Aenderung sie hervorbrachte, constant geworden ist, und die daher in keinem bestimmten Verhältnisse zur vorhandenen Scheidungskraft stehen, was doch nothwendig wäre, wenn sie von den beobachteten magnetischen Wirkungen Rechenschaft geben sollten, wozu daher nur Molecularströme brauchbar sind. Entwickelt man nun in Beziehung auf die Molecularströme diese Abhängigkeit genauer nach den Gesetzen der magnetischen Induction, so findet man, dass, wenn in der Richtungslinie der magnetischen Scheidungskraft diejenige Richtung als die positive bezeichnet wird, nach welcher der Nordpol einer Magnetnadel getrieben wird, und wenn man für die von dieser Scheidungskraft abhängige ideale Vertheilung die Schwerpunkte des nördlichen und südlichen Fluidums bestimmt, der erstere von diesen beiden Schwerpunkten gegen den letzteren in negativer Richtung verschoben ist, d. i. gerade umgekehrt wie für die drei anderen Fälle.

17.

Innere Ursache des Diamagnetismus.

Dieses merkwürdige Resultat findet nun seine Anwendung auf die Begründung einer Theorie der diamagnetischen Erscheinungen, welche von dem inneren Zustande des diamagnetischen Körpers und von den Kräften, die ihn hervorbringen, Rechenschaft giebt, an der es bisher gefehlt hatte. Zu einer solchen Theorie genügt es nämlich, wie schon oben auseinander gesetzt worden ist, nicht, dass man den diamagnetischen Zustand eines Körpers in Beziehung auf alle seine Wirkungen durch eine ideale Vertheilung magnetischer Fluida an seiner Oberfläche zweckmässig repräsentiren kann, sondern es ist dazu wesentlich erforderlich, dass auch von denjenigen Kräften Rechenschaft gegeben werde, durch welche jener Zustand hervorgebracht wird, ferner davon, worauf diese Kräfte wirken und nach welchen Gesetzen sie wirken.

Aus der obigen Zusammenstellung und Betrachtung der verschiedenen möglichen Fälle, in welchen der durch eine ideale Vertheilung magnetischer Fluida repräsentirbare Zustand eines Körpers zu Stande kommen könne, hat sich nur ein einziger ergeben, in welchem für die Abhängigkeit dieses Zustands von den äusseren Verhältnissen solche Bestimmungen resultiren, die mit den Fundamentalerscheinungen bei der Entstehung des Diamagnetismus vereinbar sind. Daraus folgt, dass von der Entstehung des diamagnetischen Zustands der Körper nur dann Rechenschaft gegeben werden kann, wenn man diesen einzigen Fall als wirklich vorhanden annimmt, wonach der diamagnetische Zustand aus den inducirenden Kräften, welche auf den Körper gewirkt haben, und aus den inducirten im Körper befindlichen elektrischen Fluidis, welche ohne Widerstand in Kreisbahnen um die einzelnen Molecule beweglich sind, hervorgeht. Es wird hiernach also angenommen, dass ein Wismuthstab aus Moleculen besteht, welche in sich zurücklaufende Bahnen (oder Canäle) enthalten, in denen die elektrischen Fluida ohne Widerstand beweglich sind, während sie in allen anderen Bahnen nur mit Ueberwindung eines ihrer Geschwindigkeit proportionalen Widerstands beweglich sind. Die Entstehung eines reinen, mit Magnetismus nicht vermischten Diamagnetismus setzt

ausserdem voraus, dass die Molecule mit jenen Bahnen oder Canälen nicht drehbar sind; denn sonst würden drehbare Molecularströme entstehen, die, wie Ampère bewiesen hat, einen magnetischen Zustand zur Folge haben, wenn sich bei der Drehung ihre Intensität nicht ändert.

18.

Bestimmung der elektromagnetischen Scheidungskraft in einer galvanischen Spirale.

Nach der gegebenen Darstellung ist es nicht die magnetische oder elektromagnetische Scheidungskraft an und für sich selbst, welche den diamagnetischen Zustand eines Körpers hervorbringt, sondern es kommt diese Scheidungskraft bei der Bestimmung des Diamagnetismus nur mittelbar in Betracht, in sofern als dadurch die Summe der elektromotorischen Kräfte bestimmt wird, welche bisher auf den diamagnetischen Körper gewirkt und die elektrischen Fluida in Strombewegung um die einzelnen Molecule gesetzt haben. Von der Summe der elektromotorischen Kräfte, welche bisher auf den diamagnetischen Körper gewirkt haben, hängt aber die Stärke der jetzt vorhandenen (inducirten) Molecularströme ab, in denen das Wesen des Diamagnetismus besteht. Auf diese Weise dient die Bestimmung der Intensität der vorhandenen magnetischen oder elektromagnetischen Scheidungskraft nur mittelbar zur Bestimmung des Diamagnetismus, weil sie den Integralwerth aller Aenderungen giebt, welche die magnetische oder elektromagnetische Scheidungskraft erlitten hat, womit die Summe der elektromotorischen Kräfte und folglich die Stärke der jetzt vorhandenen (inducirten) Molecularströme proportional ist.

Ist nun der Leitungsdraht eines galvanischen Stroms gleichförmig um eine cylindrische Röhre gewunden, so ergiebt sich nach den bekannten elektromagnetischen Gesetzen für den Mittelpunkt der Röhre die von dem Strome nach der Richtung der Axe ausgeübte elektromagnetische Scheidungskraft, welche mit X bezeichnet werden soll:

$$X = \frac{2\pi n i}{d} \text{*)},$$

*) Denn bezeichnet r den Halbmesser einer Windung, x den Abstand ihres Mittelpunkts von der Mitte der Spirale, $rd\varphi$ die Länge eines Stromelements und i die

wo n die Zahl der Windungen, i die Stromintensität und $2d$ die Diagonale der Röhre (d. i. wenn $2a$ die Länge der Röhre und $2r$ der Durchmesser ist, $d = \sqrt{(aa+rr)}$) bezeichnet. Ist hierin die Stromintensität i nach dem in der vorigen Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen (S. 219 dieses Bandes) festgesetzten absoluten Maasse ausgedrückt, so ist durch obigen Ausdruck die elektromagnetische Scheidungskraft nach demselben Maasse gegeben, welches Gauss zur Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus festgestellt hat.

Der angegebene Werth der elektromagnetischen Scheidungskraft gilt nun zwar genau genommen nur für den Mittelpunkt der Spirale; in den meisten Fällen aber kann derselbe mit hinreichender Näherung für einen sehr grossen Theil des ganzen von der Spirale eingeschlossenen Raums genommen werden, zumal wenn der Durchmesser der Spirale gegen ihre Länge sehr klein ist. Betrachtet man z. B. einen Punkt der Axe, welcher in der Entfernung b von der Mitte der Spirale liegt, so findet man für diesen Punkt

$$X = \frac{\pi n i}{a}\left[\left(1+\frac{rr}{(a-b)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1+\frac{rr}{(a+b)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

oder, wenn man $\sqrt{(dd-rr)}$ für a, und ϱ für $\frac{r}{d}$ setzt,

$$X = \frac{2\pi n i}{d}\left[1 - \frac{3dd-bb}{2(dd-bb)^2}\cdot\varrho\varrho bb + \ldots\right].$$

Soll also die Differenz der elektromagnetischen Scheidungskraft, in Theilen ihres für den Mittelpunkt gültigen Maximumwerthes, den kleinen Bruch m nicht übersteigen, so setze man

$$\frac{3dd-bb}{2(dd-bb)^2}\cdot\varrho\varrho bb = m$$

oder

$$\frac{bb}{dd} = 1 + \frac{\varrho\varrho}{4m+2\varrho\varrho}\left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{16m}{\varrho\varrho}+9\right)}\right).$$

Stromintensität, so ist bekanntlich $\frac{irrd\varphi}{(rr+xx)^{\frac{3}{2}}}$ der Ausdruck der von diesem Stromelemente im Mittelpunkte der Spirale nach der Richtung ihrer Axe ausgeübten Kraft. Hieraus folgt der Ausdruck der von der ganzen Windung ausgeübten Kraft $= \frac{2\pi rri}{(rr+xx)^{\frac{3}{2}}}$, und der Ausdruck für n Windungen der Spirale, deren Länge $= 2a$ ist, $= 2\pi rri\cdot\frac{n}{2a}\int_{-a}^{+a}\frac{dx}{(rr+xx)^{\frac{3}{2}}}$, d. i. wenn $\sqrt{(aa+rr)} = d$ gesetzt wird, $= \frac{2\pi n i}{d}$.

Beträgt also der Durchmesser z. B. den 40sten Theil der Länge, so ist in mehr als $\frac{7}{8}$ des ganzen von der Spirale umschlossenen Raums die elektromagnetische Scheidungskraft bis auf 1 Procent constant, und in fast $\frac{2}{3}$ dieses Raums ist sie bis auf $\frac{1}{10}$ Procent constant.

Solche Spiralen können also dazu dienen, auf eine bequeme Weise einen seiner Länge nach beliebig ausgedehnten Raum darzustellen, für welchen die elektromagnetische Scheidungskraft eine genau bekannte, beliebig grosse und überall als gleich zu betrachtende Stärke besitzt. Die Darstellung eines solchen Raums ist aber für viele Untersuchungen von grosser Wichtigkeit und es können die in den beiden vorhergehenden Abschnitten dieser Abhandlung beschriebenen Versuche als Beispiele dafür dienen; denn diese Versuche würden ohne die Anwendung solcher Spiralen ganz unausführbar gewesen sein.

Die vorhergehende Darstellung bezieht sich eigentlich zunächst nur auf die in der Axe der Spirale gelegenen Punkte; das gefundene Resultat lässt sich aber mit Hülfe des von Gauss in der «Allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus» (Resultate aus den Beob. d. magn. V. im Jahre 1838) Art. 38 gegebenen allgemeinen Lehrsatzes leicht auch auf den übrigen von der Spirale umschlossenen Raum ausdehnen.

19.

Bestimmung des Elektrodiamagnetismus aus der elektromagnetischen Scheidungskraft.

Die durch $X = \frac{2\pi ni}{d}$ ausgedrückte elektromagnetische Scheidungskraft bringt nun nach der in der vorigen Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen (S. 221 dieses Bandes) gegebenen Bestimmung auf einen Kreis vom Halbmesser r während der Zeit, in welcher derselbe aus der gegen die Richtung der Scheidungskraft senkrechten Stellung in die damit parallele übergeführt wird, eine Summe oder einen Integralwerth von elektromotorischer Kraft hervor:

$$= \pi rr X.$$

Dieser Integralwerth ist die Summe der Producte aus der nach dem a. a. O. S. 219 festgestellten absoluten Maasse ausgedrückten Intensität in das Zeitelement, in welchem die Kraft mit dieser Intensität wirkt.

Der Ausdruck dieser Summe bleibt unverändert, wenn, statt den Kreis um 90° zu drehen, die elektromagnetische Scheidungskraft $X = \frac{2\pi ni}{d}$ verschwindet. Wächst umgekehrt diese Scheidungskraft von $X = 0$ bis $X = \frac{2\pi ni}{d}$ (beim Schliessen des Stroms), so ist der Ausdruck für jene Summe:

$$-\pi rr\, X = -\frac{2\pi\pi nrri}{d}.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass der inducirte Kreisstrom eine solche Richtung hat, dass die Pole eines ihm äquivalenten Molecularmagnets nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, als die, nach welchen die Pole einer Boussole unter dem Einflusse derselben Kraft X getrieben werden.

Dieser Bestimmung des Integralwerths der elektromotorischen Kraft liegt das aus dem absoluten Maasse des Magnetismus abgeleitete Maass elektromotorischer Kräfte, wie es in der schon angeführten Abhandlung S. 219 festgestellt ist, zum Grunde, und der gegebene Ausdruck muss mit $\sqrt{\frac{1}{2}}$ multiplicirt werden, wenn er für das a. a. O. S. 263 angegebene rein elektrodynamische Maass gelten soll, also:

$$-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.\, rr\, X = -\frac{\pi\pi\sqrt{2}\,.\, nrri}{d}.$$

Und dieser Ausdruck muss nach S. 269 mit $\frac{4}{c}$ multiplicirt werden (wo c denjenigen constanten Werth der relativen Geschwindigkeit bezeichnet, bei welcher zwei elektrische Massen gar keine Wirkung auf einander ausüben), wenn man die elektromotorische Kraft in Theilen des allgemeinen in der Mechanik für Kräfte festgestellten absoluten Maasses ausdrücken will, also:

$$-\frac{2\sqrt{2}}{c}\,.\,\pi rr\, X = -\frac{4\sqrt{2}\,.\,\pi\pi nrri}{cd}.$$

Dieser Ausdruck giebt die elektromotorische Kraft für die Länge der Kreisbahn, vorausgesetzt, dass in jeder Längeneinheit dieser Bahn die Einheit des elektrischen Fluidums sich befindet; man erhält daraus die elektromotorische Kraft, welche auf jede Masseneinheit des elektrischen Fluidums wirkt, durch Division mit der Kreisperipherie $2\pi r$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{c}\,.\, r\, X = -\frac{2\sqrt{2}\,.\,\pi nri}{cd},$$

d. i. der Integralwerth der Beschleunigung für den Zeitraum, in welchem die elektromagnetische Scheidungskraft von $X = 0$ bis

$X = \frac{2\pi ni}{d}$ wuchs, wenn an jede Einheit des elektrischen Fluidums eine ponderable Masseneinheit geknüpft wäre. Bezeichnet ε den unbekannten kleinen Bruch, welcher die der Einheit des elektrischen Fluidums zugehörige Masse in Theilen des ponderablen Massenmaasses ausdrückt, so giebt obiger Ausdruck, mit ε dividirt, die Stromgeschwindigkeit u, welche durch das angegebene Wachsthum der elektromagnetischen Scheidungskraft hervorgebracht worden ist. Multiplicirt man diesen Ausdruck der Stromgeschwindigkeit u mit $ae = \frac{4e}{c}$ (siehe a. a. O. S. 268), wo e die Menge des elektrischen Fluidums nach elektrischem Maasse ausdrückt, welche in jeder Längeneinheit der Kreisbahn sich befindet, so erhält man die Intensität des inducirten Kreisstroms nach dem a. a. O. S. 261 nach rein elektrodynamischen Principien aufgestellten Maasse ausgedrückt; multiplicirt man ferner noch mit $\sqrt{2}$, so erhält man diese Intensität nach demjenigen Maasse bestimmt, nach welchem ein Strom von der Intensität $= 1$, wenn er die Flächeneinheit umläuft, mit der Einheit des Magnetismus nach absolutem Maasse identisch wirkt, nämlich:

$$-\frac{8e}{cc\varepsilon} \cdot rX = -\frac{16\pi nrei}{ccd\varepsilon}.$$

i bezeichnet die Intensität des inducirenden Stroms nach demselben Maasse.

Das elektromagnetische Moment dieses inducirten Kreisstroms (Molecularstroms) findet man durch Multiplication der angegebenen Stromintensität mit dem von der Kreisbahn umschlossenen Flächenraume πrr

$$= -\frac{8e}{cc\varepsilon} \cdot \pi r^3 X = -\frac{16\pi\pi nr^3 ei}{ccd\varepsilon}.$$

Hierbei ist angenommen, dass die Normale der Kreisbahnebene mit der Richtung der elektromagnetischen Scheidungskraft parallel sei, was für alle Kreisbahnen nur bei einer bestimmten Anordnung der Molecule stattfinden kann. Beim Wismuth setzen wir keine solche Anordnung voraus, sondern nehmen vielmehr nach dem Begriffe der Homogeneität an, dass die Normalen der Kreisbahnen keine vorherrschende Richtung haben. Darnach muss die Zahl der Kreisbahnen, deren Normalen den Winkel φ mit der Richtung der elektromagnetischen Scheidungskraft machen, mit $\sin\varphi$ proportional gesetzt werden. Die Stromintensität ergiebt sich dann mit $\cos\varphi$ proportional, und die der Scheidungskraft parallele Componente des Moments mit

$\cos\varphi^2$. Multiplicirt man daher obigen Ausdruck mit $\sin\varphi\cos\varphi^2$, so erhält man einen Ausdruck, welcher dem Antheile aller Kreisströme (Molecularströme), deren Normalen mit der Richtung der Scheidungskraft den Winkel φ machen, an dem elektrodiamagnetischen Momente des Wismuths proportional ist, nämlich:

$$-\frac{8e}{cc\varepsilon}\,.\,\pi r^3 X\,.\,\sin\varphi\cos\varphi^2 = -\frac{16\pi\pi n r^3 ei}{ccd\varepsilon}\,.\,\sin\varphi\cos\varphi^2\,.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $d\varphi$ und dann ferner den zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ genommenen Integralwerth mit der Zahl der Molecularströme m, so erhält man das ganze elektrodiamagnetische Moment des Wismuths ausgedrückt durch

$$-\frac{8e}{3cc\varepsilon}\,.\,\pi m r^3 X = -\frac{16\pi\pi m n r^3 ei}{3ccd\varepsilon}\,.$$

Bezeichnet v das Volumen des Wismuths und a den Abstand der Mittelpuncte seiner Molecularströme, deren Halbmesser $= r$ ist, so ist die Zahl der Molecularströme $m = \frac{v}{a^3}$. Vorausgesetzt nun, dass die Grösse der Molecularströme den Molecularabständen proportional ist, also $\frac{a}{r} = \varkappa$ constant, so ist die Summe der von allen Molecularströmen umlaufenen Flächen $m\pi rr = \frac{\pi v}{\varkappa^3 r}$. Substituirt man diesen Werth in dem obigen Ausdrucke des elektrodiamagnetischen Moments, so erhält man

$$-\frac{8\pi}{3cc\varepsilon}\,.\,\frac{e}{\varkappa^3}\,.\,v X = -\frac{16\pi\pi ni}{3ccd\varepsilon}\,.\,\frac{e}{\varkappa^3}\,.\,v\,.$$

Das elektrodiamagnetische Moment einer Wismuthmasse ist also dem elektromagnetischen Scheidungsmomente X und dem Volumen der Wismuthmasse v proportional und wird daraus durch Multiplication mit einem aus der allgemeinen Elektricitätslehre zu entnehmenden constanten Factor $\frac{8\pi}{3cc\varepsilon}$, und einem von der Beschaffenheit des Wismuths abhängigen constanten Faktor $-\frac{e}{\varkappa^3}$ gefunden. Diesen letzteren Faktor kann man die diamagnetische Constante des Wismuths nennen.

20.

Vergleichung der Wechselwirkung diamagnetischer Molecule mit der Wechselwirkung magnetischer Molecule.

In der im vorigen Artikel gegebenen Bestimmung des elektrodiamagnetischen Moments ist die Induction von Molecularströmen in den Kreisbahnen der Molecule einzeln betrachtet worden, wie wenn

auf jedes Molecule bloss die aus der vorhandenen elektromagnetischen Scheidungskraft bestimmten elektromotorischen Kräfte gewirkt hätten. Dies ist genau genommen nicht der Fall, sondern es haben in jeder Kreisbahn ausserdem noch diejenigen elektromotorischen Kräfte mitgewirkt, welche von der Wechselwirkung der diamagnetischen Molecule herrührten, gerade so, wie auf ein Theilchen eines Eisenstabs nicht bloss die äussere, z. B. vom Erdmagnetismus ausgeübte, Scheidungskraft wirkt, sondern auch diejenigen Scheidungskräfte, welche von der Wechselwirkung der Theilchen des Stabs unter einander herrühren.

Soll nun diese Wechselwirkung der diamagnetischen Molecule in Rechnung gebracht werden, wiewohl sie so klein ist, dass sie einen kaum merklichen Einfluss hat, so verdient dabei zunächst ein merkwürdiger Gegensatz hervorgehoben zu werden, welcher zwischen der Wechselwirkung diamagnetischer und magnetischer Molecule stattfindet.

Befinden sich nämlich zwei Eisentheilchen in einer, der Richtung der auf sie wirkenden magnetischen Scheidungskraft X parallelen, Geraden, und bezeichnet man mit m das magnetische Moment, welches diese Scheidungskraft in jedem von diesen beiden Eisentheilchen, einzeln betrachtet, hervorbringen würde; so resultirt für jedes Theilchen aus der Wirkung des andern eine neue Scheidungskraft, welche das Moment m vergrössert. Diese neue, aus der Wechselwirkung beider Theilchen entspringende, Scheidungskraft wird nach bekannten Gesetzen durch $\frac{2m}{r^3}$ ausgedrückt, wenn r den Abstand der Theilchen bezeichnet, und die gesammte Scheidungskraft $\left(X+\frac{2m}{r^3}\right)$ bringt nun in dem betrachteten Theilchen ein grösseres Moment $=\left(1+\frac{2m}{Xr^3}\right)m$ hervor. — Befinden sich dagegen zwei Wismuththeilchen in einer, der Richtung der auf sie wirkenden elektromagnetischen Scheidungskraft X parallelen, Geraden, und wird das diamagnetische Moment, welches dieser Scheidungskraft entspricht, mit $-\mu$ bezeichnet (das negative Vorzeichen bedeutet, dass für gleichgerichtete Scheidungskräfte das diamagnetische Moment dem magnetischen entgegen gesetzt ist), so resultirt für jedes Theilchen aus der Wirkung des andern eine neue Scheidungskraft $=-\frac{2\mu}{r^3}$, wenn r der Abstand der beiden Theilchen ist, und der gesammten Scheidungskraft $=\left(X-\frac{2\mu}{r^3}\right)$ entspricht dann

das verkleinerte Moment $-\left(1-\frac{2\mu}{Xr^3}\right)\mu$. Es findet also der Gegensatz statt, dass der Magnetismus der in der Richtung der Scheidungskraft liegenden Eisentheilchen durch Wechselwirkung verstärkt, der Diamagnetismus der in dieser Richtung liegenden Wismuththeilchen dagegen durch Wechselwirkung geschwächt wird.

Umgekehrt verhält es sich, wenn die Eisen- und Wismuththeilchen in einer gegen die Richtung der Scheidungskraft senkrechten Geraden liegen, wo der Magnetismus der Eisentheilchen durch Wechselwirkung geschwächt, der Diamagnetismus der Wismuththeilchen dagegen durch Wechselwirkung verstärkt wird. Es ergiebt sich nämlich dann, wenn man dieselben Zeichen gebraucht, der geschwächte Magnetismus des Eisentheilchens $= +\left(1-\frac{m}{Xr^3}\right)m$, der verstärkte Diamagnetismus des Wismuththeilchens $= -\left(1+\frac{\mu}{Xr^3}\right)\mu$.

Hieraus folgt, dass, während man eine gegebene Masse Eisen, um ihr durch eine gegebene Scheidungskraft den stärksten Magnetismus zu ertheilen, in die Form eines langen und dünnen Stabs oder in die eines lang gestreckten Ellipsoids bringt, dessen grosse Axe der Richtung der Scheidungskraft parallel ist, so muss man dagegen eine Wismuthmasse, um ihr den stärksten Diamagnetismus zu ertheilen, in die möglichst dünnste Plattenform oder in die Form eines möglichst abgeplatteten Ellipsoids bringen, dessen kleine Axe der Richtung der Scheidungskraft parallel ist. Diese Folgerung würde sich an der Erfahrung prüfen lassen, doch ist dabei zu beachten, dass beim Wismuth der Einfluss der Wechselwirkung der Theilchen, wegen der Schwäche des einer gegebenen Scheidungskraft entsprechenden Diamagnetismus, sehr gering sein muss. Wendet man aber das gefundene Resultat auf die Prüfung des zuerst von Faraday ausgesprochenen Satzes an, dass sich nämlich Wismuth unter dem Einflusse magnetischer Scheidungskräfte ganz wie Eisen mit dem einzigen Unterschiede verhalte, dass die beiden magnetischen Fluida mit einander vertauscht erschienen, so stellt sich heraus, dass dieser Satz nicht streng richtig ist; denn darnach müsste die gestreckte ellipsoidische Form für Wismuth ebenso wie für Eisen die günstigste sein, dort den stärksten Diamagnetismus wie hier den stärksten Magnetismus darzustellen, was nicht der Fall ist. — Die Entwickelung dieser Gesetze der Wechselwirkung diamagnetischer Molecule im Vergleiche mit der Wechselwirkung magnetischer Molecule

führt zu einer einfachen Unterscheidung magnetischer und diamagnetischer Stoffe, die in dem folgenden Artikel näher betrachtet werden soll.

21.

Unterscheidung magnetischer und diamagnetischer Körper durch positive und negative Werthe einer Constanten.

Statt der nicht ganz richtigen Unterscheidung magnetischer und diamagnetischer Körper, wonach bei gleichgerichteter Scheidungskraft die beiden magnetischen Fluida nur mit einander vertauscht wären, lässt sich eine andere genau richtige und ebenso einfache Unterscheidung geben, die blos auf der Verschiedenheit der Werthe einer aus der Natur jedes Körpers zu bestimmenden Constante beruht.

Beschränkt man sich nämlich der Einfachheit wegen auf die Betrachtung eines Rotations-Ellipsoids von Eisen oder Wismuth, dessen Hauptaxe der Richtung der Scheidungskraft parallel ist, so hat Neumann in Crelle's «Journal für die reine und angewandte Mathematik» Bd. 37 bewiesen, dass für Eisen bei der Scheidungskraft X das magnetische Moment des Ellipsoids durch den Ausdruck

$$\frac{kvX}{1+4\pi kS}$$

dargestellt werde, wo v des Volumen des Ellipsoids und S eine durch das Verhältniss der Axen gegebene Grösse bezeichnet. Es ist nämlich

$$S = \sigma(\sigma\sigma - 1)\left\{\frac{1}{2}\log\frac{\sigma+1}{\sigma-1} - \frac{1}{\sigma}\right\}$$

und

$$\sigma = \sqrt{\left(1 - \frac{rr}{\lambda\lambda}\right)}.$$

r und $\sqrt{(rr - \lambda\lambda)}$ sind die Axen des Ellipsoids. k endlich soll darin für Eisen einen constanten, von seiner Natur abhängigen Werth haben, welchen Neumann mit dem Namen der magnetischen Constante des Eisens bezeichnet, und zwar ist dieser Werth bei Eisen und allen magnetischen Körpern nothwendig positiv.

Der Werth von S ergiebt sich für ein unendlich gestrecktes Ellipsoid $S = 0$; folglich das magnetische Moment

$$= kvX,$$

also ist für $v = 1$ und $X = 1$ das magnetische Moment $= k$. Die magnetische Constante k lässt sich hiernach als der Grenzwerth

definiren, dem sich das magnetische Moment der Volumeneinheit unter dem Einflusse der Einheit der magnetischen Scheidungskraft desto mehr nähert, ein je gestreckteres Ellipsoid aus der Volumeneinheit gebildet wird. Da die Constante k bei allen magnetischen Körpern einen positiven Werth hat, so ist das magnetische Moment positiv oder negativ, jenachdem die Scheidungskraft positiv oder negativ ist.

Für eine Kugel ergiebt sich der Werth von $S = \frac{1}{3}$, folglich das magnetische Moment

$$= \frac{kvX}{1 + \frac{4}{3}\pi k}.$$

Man sieht hieraus, dass bei der Kugelform des Eisens, weil k einen positiven Werth hat, auf die Volumeneinheit weniger Magnetismus kommt, als bei gestreckter Ellipsoidenform.

Der Werth von S ergiebt sich endlich für ein zu einer unendlich dünnen Kreisscheibe abgeplattetes Ellipsoid $S = 1$, folglich das magnetische Moment

$$= \frac{kvX}{1 + 4\pi k}.$$

Die Grösse k dient nun als Unterscheidungsmerkmal verschiedener magnetischer Stoffe, indem ihr Werth nach Verschiedenheit der Stoffe bis Null abnehmen kann, nur aber der Natur des Magnetismus gemäss stets positiv sein muss. Man kann aber den Gebrauch der Grösse k als Unterscheidungsmerkmal verallgemeinern und ihn, statt auf magnetische Körper zu beschränken, auf alle Körper ausdehnen, indem man negative Werthe von k zulässt und die physische Bedeutung daran knüpft, dass ein Körper, dem ein solcher negativer Werth von k zugehöre, kein magnetischer, sondern ein diamagnetischer sei. Statt negative Werthe von k einzuführen, wollen wir bei diamagnetischen Körpern $-k$ schreiben. Das diamagnetische Moment eines Wismuthellipsoids, dessen Volumen $= v$ ist, und auf welches die elektromagnetische Scheidungskraft X der Hauptaxe parallel wirkt, wird alsdann ausgedrückt durch

$$- \frac{kvX}{1 - 4\pi kS},$$

wo S dieselbe Bedeutung wie oben hat. Für unendlich gestreckte Ellipsoide, wo $S = 0$, ist also das diamagnetische Moment

$$= -kvX;$$

für eine Kugel, wo $S = \frac{1}{3}$, ist dasselbe

$$= -\frac{kvX}{1 - \frac{4}{3}\pi k};$$

für ein unendlich abgeplattetes Ellipsoid, wo $S = 1$, ist es

$$= -\frac{kvX}{1-4\pi k}.$$

Bei der gestrecktesten Form kommt also auf die Volumeneinheit am wenigsten, bei der abgeplattetsten Form am meisten Diamagnetismus, gerade umgekehrt, als es mit dem Magnetismus der Fall war, wie schon im vorigen Artikel bewiesen worden ist.

Da aber $-k$ einen sehr kleinen negativen Werth auch beim Wismuth hat, welches am stärksten diamagnetisch wird, so ergiebt sich, dass der Diamagnetismus des Wismuths immer sehr nahe dem Producte des Volumens und der Scheidungskraft proportional ist und von der Form als fast unabhängig betrachtet werden kann. Es kann daher die Bedeutung von $-k$ unmittelbar mit derjenigen diamagnetischen Constante verglichen werden, von welcher am Ende des 19. Artikels die Rede war. Auch dort wurde das diamagnetische Moment dargestellt durch das Product des Volumens in die Scheidungskraft multiplicirt mit einem constanten Coefficienten, welcher in zwei Factoren zerfiel, nämlich in einen aus der allgemeinen Elektricitätslehre zu entnehmenden $\frac{8\pi}{3cc\varepsilon}$, und in einen von der Beschaffenheit des Wismuths abhängigen Factor $-\frac{\varepsilon}{\varkappa^2}$, welcher dort die diamagnetische Constante des Wismuths genannt worden ist. Man sieht leicht, dass diese beiden Factoren hier in $-k$ nicht geschieden sind und dass $-k$ also keine andere Bedeutung hat als die des Products jener beiden constanten Factoren*).

*) Es möge hierbei noch bemerkt werden, dass der magnetische Coefficient k sich nur nach der Theorie scheidbarer magnetischer Fluida (Art. 15, Nr. 1) constant ergiebt; dass er aber nach der Theorie drehbarer Molecularmagnete (Art. 15, Nr. 2) eine Function der Scheidungskraft X sein muss. Der diamagnetische Coefficient $-k$ ist dagegen nach der Theorie der diamagnetelektrischen Induction (Art. 15, Nr. 4) seiner Natur nach constant, wie Art. 19 gezeigt worden ist. Es wird in den folgenden Art. 23—26 bewiesen werden, dass in Beziehung auf den Magnetismus die Erfahrung mit der Theorie scheidbarer magnetischer Fluida in Widerspruch steht und zu Gunsten drehbarer Molecularmagnete (oder Molecularströme Art. 15, Nr. 3) entscheidet, weil nämlich der Werth von k beim Eisen wirklich nicht constant, sondern mit der Grösse der Scheidungskraft X veränderlich ist.

22.

Ueber die Existenz magnetischer Fluida.

Wenn eine gewisse Classe von Wirkungen eines Körpers auf andere Körper so beschaffen ist, dass sie aus einer idealen Vertheilung magnetischer Fluida auf seiner Oberfläche erklärt werden kann, so lassen sich für die wahren Ursachen aller jener Wirkungen, welche im Innern des Körpers liegen, verschiedene Möglichkeiten denken und darnach 4 verschiedene Fälle unterscheiden, welche Art. 14 angegeben und in den darauf folgenden Artikeln näher erörtert worden sind. Zwei dieser Fälle beruhten auf der Voraussetzung, dass zwei magnetische Fluida existiren, denen in den Moleculen des Körpers entweder eine constante oder eine variable Scheidung zugeschrieben wird; die beiden anderen Fälle beruhten auf der Voraussetzung, dass die beiden nach der Elektricitätslehre vorhandenen elektrischen Fluida in einer bestimmten Kreisbahn um jedes Molecule des Körpers entweder in einer constanten oder in einer variablen Strombewegung sich befänden. Diese 4 verschiedenen Fälle schliessen nun, wie man leicht einsicht, keineswegs einander wechselseitig aus; denn es kann ein Theil der magnetischen Fluida in den Moleculen constant geschieden bleiben, während die Scheidung eines anderen Theils variabel ist; und ebenso kann ein Theil der elektrischen Strömung in der für jedes Molecule gegebenen Kreisbahn constant sein, während ein anderer Theil seiner Intensität nach variirt. In letzterer Beziehung liesse sich sogar die Existenz von constanten Strömungen ohne das Hinzukommen eines variablen Theils bei den vielen vorhandenen elektromotorischen Kräften gar nicht begreifen, weil die elektrischen Fluida, wenn sie wirklich in bestimmten Kreisbahnen um die Molecule frei beweglich sind, wie die Existenz beharrlicher Strömungen beweist, dem Antriebe jener nach der Richtung der Kreisbahnen zerlegten elektromotorischen Kräfte nothwendig folgen müssen. Der erste und zweite Fall können daher entweder einzeln oder zugleich stattfinden; der dritte und vierte stehen aber unter einander in einem nothwendigen Zusammenhange, so dass entweder keiner von beiden oder beide zusammen stattfinden müssen. Jene 4 Fälle lassen sich hiernach paarweise verbunden unter 2 Hauptfälle bringen, nämlich 1) dass zwei geschiedene oder scheidbare magnetische Fluida in

den Moleculen des Körpers existiren, 2) dass die nach der Elektricitätslehre überall vorhandenen elektrischen Fluida in bestimmten Kreisbahnen um die Molecule des Körpers frei beweglich sind. Diese beiden Hauptfälle können aber als einander wechselseitig ausschliessend in sofern betrachtet werden, als die wirkliche Nachweisung eines von beiden den andern als überflüssige Hypothese erscheinen lassen würde.

Nun lässt sich für jeden von diesen beiden Hauptfällen eine Theorie entwickeln, und jede von diesen Theorien in zwei Theile theilen, nämlich in einen solchen, worin beide Theorien in ihren Resultaten übereinstimmen, und in einen solchen, wo sie in ihren Resultaten einander widersprechen. Denn es verhält sich hier gerade so wie in der Optik mit der Emissionstheorie und Wellentheorie, die in ihren Resultaten ebenfalls in sehr vielen Beziehungen mit einander übereinstimmten, bis die Entdeckung der Interferenzerscheinungen zu einer näheren Erörterung desjenigen Theils führte, in welchem beide Theorien in ihren Resultaten einander widersprechen. Haben nun auch bis jetzt die beiden auf der Existenz magnetischer Fluida und auf der Existenz elektrischer Molecularströme beruhenden Theorien in sehr vielen Beziehungen eine bewundernswürdige Uebereinstimmung in den Resultaten ergeben; so durfte man doch auch hier, wie in der Optik, erwarten, dass endlich die Entdeckung irgend einer neuen Classe von Erscheinungen ebenfalls zu einer näheren Erörterung desjenigen Theils führen würde, wo beide Theorien in ihren Resultaten einander widersprächen, und dass alsdann die neuentdeckten Erscheinungen die bisherige Alternative zwischen beiden Theorien entscheiden würden*).

---

*) Ich habe früher in den «Resultaten aus den Beob. d. magn. V. im Jahre 1839» die Vermuthung zu begründen gesucht, dass die daselbst unter dem Namen der «Unipolaren Polarität» beschriebenen Erscheinungen zu einer solchen Entscheidung führen könnten. Dies ist aber nicht der Fall, weil eine andere Erklärung von den dort beschriebenen Erscheinungen sich geben lässt, sobald zwischen den im Innern der Conductoren sich bewegenden elektrischen Fluidis und den ponderablen Theilen der Conductoren eine solche Verbindung stattfindet, dass jede auf die elektrischen Fluida wirkende Kraft ganz oder fast ganz auf die ponderablen Theile übertragen wird, wie ich dies in den «Elektrodynamischen Maassbestimmungen» (Abhandl. bei Begründung der K. S. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. v. d. F. Jabl. Ges. Art. 19, S. 309) näher erörtert habe.

Die beiden optischen Theorien trennten sich in den Folgerungen, welche sich aus ihnen für das Zusammentreffen zweier homogenen Lichtstrahlen ergaben; denn nach der einen sollte immer Verstärkung, nach der andern bald Verstärkung bald Aufhebung stattfinden: die Interferenzerscheinungen bestätigten die Resultate der Wellentheorie. Auf ähnliche Weise kann auch der Scheideweg unserer Theorien bestimmt werden. Beide stimmen zwar 1) in allen, die Erscheinungen beharrlicher Magnete betreffenden Resultaten überein; 2) auch in Betreff der veränderlichen Magnete, darin, dass jede eine Eintheilung derselben in zwei Classen gestattet, nämlich in solche, die ihren Magnetismus der blossen Orientirung fertig vorhandener drehbarer Molecule (Molecularmagnete oder Molecularströme) verdanken, und in solche, die ihren Magnetismus der Scheidung oder Bewegung imponderabler Fluida in ruhenden Moleculen (der Scheidung magnetischer Fluida in den Moleculen, oder der Erregung elektrischer Ströme in bestimmten Kreisbahnen um die Molecule) verdanken; 3) endlich stimmen beide Theorien auch noch in ihren Resultaten über die erste Classe der veränderlichen Magnete mit einander überein; aber sie widersprechen einander in ihren Resultaten über die zweite Classe; denn für diese zweite Classe ergiebt sich aus den beiden Theorien eine entgegengesetzte Lage der Pole: nach der einen soll die Lage der Pole für die zweite Classe gleich der für die erste Classe sein; nach der andern soll die Lage der Pole für die zweite Classe entgegengesetzt der für die erste Classe sein.

So lange man also nur solche veränderliche Magnete kannte, wo die Lage der Pole (für gleichgerichtete Scheidungskräfte) gleich war, so liessen sie sich nach beiden Theorien erklären, und es bedurfte nur nach der zweiten Theorie der Annahme, dass Magnete der zweiten Classe entweder gar nicht vorkämen oder nur mit Magneten der ersteren Classe so verbunden, dass die Wirkung der letzteren immer vorherrsche. Weil die erste Theorie einer solchen Annahme nicht bedurfte, konnte sie sogar den Vorzug zu verdienen scheinen, so lange man nur Magnete mit gleicher Lage der Pole für gleichgerichtete Scheidungskräfte kannte. Sobald man aber veränderliche Magnete (Diamagnete) entdeckte, wo die Lage der Pole (bei gleichgerichteten Scheidungskräften) entgegengesetzt war, so blieb keine Wahl mehr zwischen beiden Theorien, denn

es konnte dann nur die zweite Theorie gebraucht werden, weil sie allein von der Entstehung zweier Classen von Magneten mit entgegengesetzter Lage der Pole bei gleichgerichteten Scheidungskräften Rechenschaft giebt.

Die von Faraday entdeckten diamagnetischen Erscheinungen dienen daher zur Entscheidung der Alternative zwischen diesen beiden Theorien, gerade so, wie die Interferenzerscheinungen zur Entscheidung der Alternative zwischen Emissions- und Wellentheorie in der Optik gedient haben, und dies ist die wesentlichste und wichtigste Bedeutung, welche dieser Entdeckung gegeben werden kann. Durch die Entdeckung des Diamagnetismus wird also die Hypothese der elektrischen Molecularströme im Innern der Körper bestätigt; die Hypothese der magnetischen Fluida im Innern der Körper widerlegt.

Alle unsere Hypothesen oder Vorstellungen von den Körpern finden immer nur innerhalb eines begrenzten Bereichs von Erscheinungen Geltung, und unterscheiden sich von einander durch die grössere Beschränkung oder Ausdehnung dieses Bereichs. Wir schreiben ihnen Realität zu, so lange wir keine Erscheinungen kennen, die ausserhalb des Bereichs, für welches sie gelten, lägen; im entgegengesetzten Falle bezeichnen wir sie als ideal. Wenn nun auch die magnetischen Fluida künftig in die Reihe der idealen Vorstellungen gesetzt werden müssen, so behalten sie doch die nämliche Wichtigkeit und Bedeutung, die sie bisher besassen, so oft man Betrachtungen auf denjenigen Kreis beschränkt, für welchen sie gelten. — Und wenn wir auch für jetzt den elektrischen Molecularströmen im Innern der Körper Realität zuschreiben, gleichwie dem Wellen fortpflanzenden Lichtäther in der Optik, so kann es doch geschehen, dass auch sie künftig, bei weiterer Ausbildung der Wissenschaft, in die Reihe der idealen Vorstellungen versetzt werden müssen.

Ueber die Abhängigkeit des magnetischen und diamagnetischen Moments von der Grösse der Scheidungskraft.

23.

Die Richtigkeit des gewonnenen Resultats, dass keine magnetischen, sondern nur elektrische Fluida wirklich existiren, für welche aber in

den ponderablen Körpern zwei verschiedene Arten von Bahnen vorhanden sind, in denen sie sich bewegen können, nämlich theils solche, in welchen ihre Bewegung einen mit ihrer Geschwindigkeit proportionalen Widerstand findet, theils solche, in welchen ihre Bewegung gar keinen Widerstand findet (Molecularbahnen), beruht, den vorhergehenden Erörterungen gemäss, hauptsächlich auf der Betrachtung der entgegengesetzten Lage der Pole oder der entgegengesetzten Richtung, nach welcher bei gleicher magnetischer oder elektromagnetischer Scheidungskraft die ideale Scheidung der magnetischen Fluida in magnetischen und diamagnetischen Körpern erfolgt; es kann aber die Richtigkeit dieses Resultats noch einer weiteren Prüfung unterworfen werden, wenn man ausser der Richtung, nach welcher bei einer gegebenen magnetischen oder elektromagnetischen Scheidungskraft die ideale Scheidung der magnetischen Fluida erfolgt, ferner die Stärke dieser Scheidung genauer erforscht. Es findet nämlich zwar in Beziehung auf die Stärke dieser Scheidung kein solcher Gegensatz zwischen beiden Theorien statt, wie in Beziehung auf die Richtung; doch ergiebt sich auch in ersterer Beziehung keine volle Uebereinstimmung. Eine vollständige Entscheidung der Alternative fordert daher noch die Entwickelung derjenigen Differenzen, welche zwischen beiden Theorien in Beziehung auf die Stärke jener idealen Scheidung stattfinden, und deren Prüfung an der Erfahrung.

Ergäbe sich von der einen Seite, wie in der Note am Ende des 21. Artikels bemerkt worden ist, dass nach der Theorie wirklich existirender magnetischer Fluida Proportionalität der magnetischen Momente mit den Scheidungskräften stattfinden sollte, dass aber diese Proportionalität (nach den Müller'schen Versuchen) der Erfahrung widerspreche, und liesse sich von der anderen Seite nachweisen, dass die Theorie der Molecularströme in keinem solchen Widerspruche mit der Erfahrung stände, so könnte die Richtigkeit der letzteren Theorie auf diesem Wege bewiesen werden, ohne dass es dazu nöthig wäre, die diamagnetischen Erscheinungen und die verkehrte Lage der Pole, welche sich dabei zeigt, zu Hülfe zu nehmen, wie es in den vorhergehenden Artikeln geschehen ist. Indessen kommt dabei ein wesentlicher Umstand in Betracht, welcher macht, dass dieser bloss auf magnetische Versuche gegründete Beweis, wozu die diamagnetischen Versuche gar nicht zu Hülfe genommen zu werden brauchten, für sich

allein betrachtet, nicht völlig entscheidend ist. Es giebt nämlich, wie schon Art. 14 auseinander gesetzt worden ist, unter der Voraussetzung von der wirklichen Existenz magnetischer Fluida, zwei Arten der Entstehung von Magneten, nämlich entweder durch Scheidung der magnetischen Fluida in ruhenden Moleculen, oder durch Drehung der Molecule, in denen die magnetischen Fluida beharrlich geschieden sind. Die schon erwähnte von Poisson und Neumann entwickelte Theorie, nach welcher Proportionalität der magnetischen Momente mit den Scheidungskräften stattfinden soll, betrifft aber nur die Gesetze zur Bestimmung des Magnetismus der auf die erste Art entstandenen Magnete, und es bedarf einer näheren Prüfung, ob dieselben Gesetze ganz unverändert auch auf die Bestimmung des Magnetismus der auf die zweite Art entstandenen Magnete Anwendung finden können. Dies ist nicht der Fall, sondern es gelten für die auf die zweite Art entstandenen Magnete andere Gesetze, und zwar die nämlichen, wie für Magnete, die ihren Magnetismus der Existenz drehbarer Molecularströme verdanken. Wenn also die Gesetze dieser letzten Magnete mit der Erfahrung übereinstimmen, so folgt daraus von selbst, dass die Erfahrung auch mit den Gesetzen der Magnete, deren Magnetismus von drehbaren Moleculen mit beharrlich geschiedenen magnetischen Fluidis herrührt, übereinstimmen müsse. Folglich kann auf diese Gesetze allein keine allgemeine Widerlegung von der wirklichen Existenz der magnetischen Fluida gegründet werden, sondern nur eine Widerlegung der Entstehung der Magnete durch Scheidung der magnetischen Fluida, wie sie in der von Poisson und Neumann entwickelten Theorie angenommen wird.

Aber auch diese partielle Widerlegung gewinnt eine allgemeinere Bedeutung, wenn man die Gründe beachtet, durch die Poisson und Neumann sich berechtigt halten durften, eine Scheidung der magnetischen Fluida in ruhenden Moleculen und keine Drehung der Molecule mit beharrlich geschiedenen magnetischen Fluidis anzunehmen. Betrachtet man nämlich näher, wie man zur Aufstellung der Hypothese von der Existenz magnetischer Fluida überhaupt gekommen ist, so wird man sich leicht überzeugen, dass sie hauptsächlich auf der Analogie mit der statischen Elektricitätslehre beruht, und dass diese Analogie im Wesentlichen darin besteht, dass bei der Magnetisirung des Eisens eine ähnliche Scheidung der magnetischen Fluida in den Eisen-

moleculen stattfinde, wie die der elektrischen Fluida bei der Elektrisirung eines Systems kleiner Conductoren. Diese Analogie würde aber ganz verloren gehen, wenn die Magnetisirung des Eisens auf keiner Scheidung der magnetischen Fluida in den Eisenmoleculen, sondern auf einer Drehung der Eisenmolecule selbst beruhte. Es geht hieraus hervor, dass die Hypothese von der Existenz zweier magnetischen Fluida ihr ursprüngliches, auf der Analogie mit der Elektricitätslehre beruhendes, Fundament durch Widerlegung der von Poisson und Neumann entwickelten Theorie verlieren und fast wie eine ganz neue Hypothese zu betrachten sein würde. Es leuchtet dies auch daraus ein, dass alsdann selbst der Name der magnetischen Fluida gar nicht mehr passen würde, weil, wenn diese Stoffe in den Eisenmoleculen beharrlich geschieden und stets auf gleiche Weise fest mit den Eisentheilchen verbunden wären und nur mit den Eisentheilchen sich bewegen könnten, von einem flüssigen Aggregatzustande dieser Stoffe gar nicht die Rede sein könnte. Es würde alsdann sogar das Recht bezweifelt werden müssen, diese Stoffe als gesondert vom Eisen zu betrachten, wenn sie in der Wirklichkeit immer und in unveränderter Weise mit den Eisentheilchen verbunden blieben; denn es würde alsdann genügen, blos zwei Arten von Eisentheilchen zu unterscheiden.

Die erwähnte partielle Widerlegung gewinnt also dadurch eine allgemeinere Bedeutung, dass sie alle Analogie zerstört, welche man früher zwischen den Hypothesen von den magnetischen und elektrischen Fluidis herzustellen gesucht hatte. Eine solche Analogie gab der Hypothese eine gewisse Wahrscheinlichkeit, deren wahrer Werth sich nicht genau bestimmen liess, und daher leicht zu hoch angeschlagen werden konnte, nun aber durch die oben erwähnte Widerlegung der Scheidungstheorie ganz wegfällt.

In demselben Verhältnisse aber, in welchem die eine Theorie, nämlich die auf der wirklichen Existenz magnetischer Fluida gebaute, an Wahrscheinlichkeit verliert, gewinnt die andere, nämlich die auf der Existenz von Molecularströmen begründete Theorie, zumal wenn sich beweisen lässt, dass die Stärke der magnetischen Momente für verschiedene Scheidungskräfte sich genau dieser Theorie gemäss verhalte. Die bisher blos an der beobachteten Richtung der Scheidung geprüfte Theorie würde dann auch durch die beobachtete Stärke der Scheidung geprüft und bestätigt werden. Es ergiebt sich

hieraus, dass diese zweite Prüfung eine wesentliche Ergänzung und Vervollständigung der ersteren bildet, welche daher in den folgenden Artikeln ausführlich gegeben werden soll.

24.

Zusammenhang des Vorhandenseins eines Maximumwerths des magnetischen Moments mit der Annahme von der Drehbarkeit der Molecule.

Die Annahme von drehbaren Molecularmagneten stimmt zwar, wie schon Art. 16 angeführt worden ist, in der Bestimmung der Lage der Pole mit der Annahme von scheidbaren magnetischen Fluidis in unbeweglichen Moleculen überein; beide aber unterscheiden sich nach dem vorigen Artikel wesentlich von einander in Beziehung auf das Gesetz, nach welchem die Stärke des Magnetismus eines Eisenstabs sich mit der Grösse der magnetischen Kraft, welche auf das Eisen wirkt, ändern soll. Es leuchtet nämlich ein, dass, nach der ersteren Annahme, der Stärke des Magnetismus eine Grenze gesetzt ist, die sie nicht überschreiten kann, welche nämlich dem Falle entspricht, wo die Axen aller Molecularmagnete durch Drehung eine parallele Lage angenommen haben. Eine solche Grenze ist für die Stärke des Magnetismus nach der zweiten Annahme, so wie sie nach Coulomb, Poisson und Neumann der Theorie zum Grunde gelegt zu werden pflegt, nicht vorhanden, weil nämlich darnach in den Moleculen eine unerschöpfliche Menge von scheidbarem neutralen magnetischen Fluidum (nach Analogie mit der Elektricitätslehre) vorausgesetzt wird*). Aber wenn man auch diese letztere Annahme etwas modificiren und voraussetzen wollte, dass durch Verstärkung der auf das Eisen wirkenden Kraft nach und nach das ganze in den Moleculen vorhandene neutrale magnetische Fluidum geschieden werde, so ergäbe sich doch auch dann noch eine wesentliche Verschiedenheit zwischen

*) Nach dieser Annahme wird nämlich der magnetische Gleichgewichtszustand dadurch definirt, dass an der Oberfläche aller Molecularconductoren eine Vertheilung der beiden magnetischen Fluida stattfindet, welche auf alle Punkte im Innern der Molecule solche Kräfte ausüben, dass dadurch die Wirkung aller äussern Scheidungskräfte aufgehoben wird. Hieraus folgt leicht, dass bei Verdoppelung der äusseren Scheidungskräfte auch die Menge des magnetischen Fluidums an der Oberfläche aller Molecule verdoppelt werden müsse u. s. w.

beiden Annahmen, welche darin besteht, dass das Wachsthum des Magnetismus bei immer zunehmender Kraft, welche auf das Eisen wirkt, nach der letzteren Annahme einem ganz anderen Gesetze vor der Erschöpfung des neutralen magnetischen Fluidums unterworfen sein muss, wie nachher, dass nämlich bis zu dem Augenblicke, wo der letzte Rest von neutralem Fluidum geschieden wäre, das Verhältniss der Stärke des Eisenmagnetismus zu der Grösse der Kraft, welche auf das Eisen wirkt, constant bleiben müsse (weshalb auch dieses Verhältniss mit dem Namen der magnetischen Constante des Eisens bezeichnet zu werden pflegt); dass aber von jenem Augenblicke an dieses Verhältniss schnell abnehmen müsse. Nach der ersteren Annahme ergiebt sich dagegen, dass jenes Verhältniss stets veränderlich sei und von Anfang bis zu Ende nach einem und demselben Gesetze stetig abnehmen müsse.

Hierdurch wird die Möglichkeit gegeben, unmittelbar aus den Erscheinungen des Eisenmagnetismus zu entscheiden, ob die Magnetisirung des Eisens, nach der Hypothese wirklich existirender magnetischer Fluida, entweder einer Drehung seiner Molecule oder der Scheidung der magnetischen Fluida in seinen Moleculen zugeschrieben werden müsse. Im ersteren Falle können aber die drehbaren Molecule ebensowohl Träger von Molecularströmen wie von beharrlich geschiedenen magnetischen Fluidis sein, während in dem letzteren Falle die Existenz der magnetischen Fluida als erwiesen angesehen werden müsste, weil nur bei der Drehung der Molecule, aber nicht bei der Scheidung der magnetischen Fluida in den Moleculen (durch eine gegebene magnetische oder elektromagnetische Scheidungskraft) eine Stellvertretung für die magnetischen Fluida durch elektrische Ströme möglich ist.

Durch die schon angeführten Müller'schen Versuche müsste nun die letztere Annahme von scheidbaren magnetischen Fluidis in undrehbaren Moleculen als widerlegt angesehen werden, und es bliebe nur noch zu prüfen übrig, ob die stetige Abnahme des Verhältnisses der Stärke des Eisenmagnetismus zur Grösse der auf das Eisen wirkenden Scheidungskraft, wie sie Müller durch seine Versuche bestimmt hat, mit dem nach der ersteren Annahme aus einer bestimmten Drehbarkeit der Molecule abzuleitenden Gesetze übereinstimme oder nicht, wobei es unbestimmt gelassen werden kann, ob diese Molecule die

Träger von geschiedenen magnetischen Fluidis oder von Molecularströmen sind. Indessen sind die Müller'schen Versuche von Buff und Zamminer (Annalen der Chemie und Pharmacie von Liebig, Wöhler und Kopp Bd. 75, S. 83) wiederholt und die von Müller gefundenen Resultate dadurch nicht bestätigt worden. Vielmehr glauben Buff und Zamminer durch ihre Versuche bewiesen zu haben, dass das Verhältniss der Stärke des Eisenmagnetismus zu der Grösse der auf das Eisen wirkenden Kraft (abgesehen von dem Einflusse der Coercitivkraft, wenn das Eisen nicht vollkommen weich ist) wirklich constant sei, so weit als es mit den jetzt vorhandenen Hülfsmitteln geprüft werden könne, was nur nach der Annahme scheidbarer magnetischer Fluida in undrehbaren Moleculen möglich sein würde. Die Annahme drehbarer Molecularmagnete, und folglich auch die drehbarer Molecularströme, müsste hiernach verworfen werden und die wirkliche Existenz der magnetischen Fluida würde also dadurch als wirklich begründet erscheinen.

Es schien hiernach vor Allem nöthig, dieselben Versuche nochmals zu dem Zwecke zu wiederholen, um den vorliegenden Widerspruch zu entscheiden. Ich werde daher im folgenden Artikel die von mir gemachten Versuche und die besonderen Einrichtungen, welche ich getroffen habe, um ein sicheres Resultat zu gewinnen, beschreiben, woraus sich eine Bestätigung des Müller'schen Resultats ergeben hat, ein Resultat, was auch nach einigen, schon vor Müller, von Joule angestellten und in *The Annals of Electricity etc. by W. Sturgeon* Vol. V, p. 472 mitgetheilten Versuchen erwartet werden konnte.

25.

Versuche zum Beweise des Vorhandenseins eines Maximumwerths des magnetischen Moments.

Aus den von Müller gemachten Versuchen hatte sich ergeben, dass bei gleichen Kräften, welche auf das Eisen wirken, die Abnahme des Verhältnisses der Stärke des Eisenmagnetismus zur Grösse der auf das Eisen wirkenden Kraft bei dünnen Eisenstäben leichter als bei dicken wahrgenommen werden könnte. Es kommt daher bei der Vergleichung der von Müller mit den von Buff und Zamminer gemachten Versuchen wesentlich in Betracht, dass der dünnste von Müller gebrauchte Stab nur 6, der dünnste von Buff und Zamminer

gebrauchte Stab aber 9 Millimeter dick war, und diese Verschiedenheit der Dicke wird durch ihr Verhältniss zur Länge noch einflussreicher, indem der dünnere Stab von Müller 330, der dickere von Buff und Zamminer nur 200 Millimeter lang war. Ich habe mich zu den folgenden Versuchen eines noch dünneren Stabs als Müller bedient, nämlich von 3,6 Millimeter Dicke bei 100,2 Millimeter Länge und 8190 Milligramm Masse. Es ergab sich, dass sich der Magnetismus eines solchen dünnen Stabs durch die aus der Ferne hervorgebrachte Ablenkung eines kleinen Spiegelmagnetometers noch mit grosser Genauigkeit messen liess. Die einzige Schwierigkeit, welche die Anwendung eines so dünnen Stabs bietet, besteht in der genauen Scheidung der vom Eisenmagnetismus und der vom galvanischen Strome herrührenden Wirkungen auf das Magnetometer. Es leuchtet nämlich ein, dass wenn man dieselbe galvanische Spirale zur Magnetisirung sowohl dicker als auch dünner Stäbe gebraucht, wie es von Müller, Buff und Zamminer geschehen ist, diese Scheidung bei den dünnen Stäben weniger Genauigkeit gestattet, weil die Wirkung der Spirale dieselbe bleibt und daher für dünnere Stäbe verhältnissmässig grösser als für dickere ist. Zu den folgenden Versuchen wurde daher eine Spirale gebraucht, welche nicht weiter war, als zum Hineinlegen des dünnen Stabs nöthig war. Auch hiermit habe ich mich noch nicht begnügt, sondern habe das Ende des Spiraldrahts noch zweimal in umgekehrter Richtung um die Mitte der Spirale in einem viel weiteren Kreise herumgewunden, so dass der von diesen beiden Windungen begrenzte Flächenraum dem von allen Windungen der engen Spirale begrenzten Flächenraume gleich war. Dadurch wird nach den bekannten Gesetzen des Elektromagnetismus bewirkt, dass der Strom unmittelbar gar keine Wirkung auf das entfernte Magnetometer ausübt, was sich leicht durch Versuche prüfen und bestätigen lässt. Die ganze am Magnetometer beobachtete Wirkung rührt dann blos von dem Eisenmagnetismus her, der sich dann mit gleicher Schärfe und Genauigkeit wie der Magnetismus harter Stahlmagnete nach der von Gauss in der Intensitas etc. gegebenen Anleitung durch Ablenkungsversuche aus der bekannten Intensität des Erdmagnetismus nach absolutem Maasse bestimmen lässt.

Als ein wesentlicher Umstand ist noch hervorzuheben, dass die von Müller, Buff und Zamminer gebrauchten Spiralen kürzer als die dadurch magnetisirten Eisenstäbe waren. Bei Müller war dieser

Unterschied nur gering, indem die Eisenstäbe nur 15 Millimeter zu beiden Seiten aus der Spirale hervorragten; bei Buff und Zamminer war er aber viel grösser, indem die Enden des längsten und dünnsten Stabes 45 Millimeter zu beiden Seiten aus der Spirale hervorragten. Ausserdem wurde der davon herrührende Einfluss bei Buff's und Zamminer's Versuchen verhältnissmässig dadurch noch verstärkt, dass die Länge des in der Spirale eingeschlossenen Theils nur 110 Millimeter betrug, bei Müller dagegen 300 Millimeter. Dieser Umstand dürfte der Hauptgrund von der scheinbaren Differenz der Resultate sein, zu denen diese Beobachter gelangt sind; denn es leuchtet ein, dass die Wirkung der Spirale auf das Eisen in der Mitte der Spirale am stärksten ist, nach den Enden aber abnimmt, und dass diese Abnahme ausserhalb der Spirale ausserordentlich gross ist. Daraus folgt, dass wenn auch bei wachsender Stromstärke die in dem mittleren Theile des Stabs hervorgebrachte Wirkung einem Grenzwerthe sich näherte, eine solche Annäherung bei den ausserhalb der Spirale befindlichen Theilen noch keineswegs merklich sein konnte. Bei den folgenden Versuchen wurde eine Spirale gebraucht, welche bedeutend länger als der Eisenstab war, so dass nach den Art. 18 entwickelten Gesetzen die von der Spirale auf die Enden des Stabs ausgeübte Kraft von der auf die Mitte nicht merklich verschieden war, wodurch allein ein sicheres Resultat erhalten werden konnte.

Ich begnüge mich hier, ohne auf eine Beschreibung der Versuche im Einzelnen einzugehen, welche nicht nöthig erscheint, weil sie bis auf die eben angegebenen Verschiedenheiten mit der von Müller, Buff und Zamminer gegebenen Beschreibung nahe übereinstimmen würde, die auf diese Weise gewonnenen Resultate in der folgenden Tafel kurz zusammen zu stellen. Ich bemerke nur, dass jede einzelne Bestimmung auf 4maligem Wechsel der Stromrichtung beruht, wobei sich stets die grösste Uebereinstimmung ergab, zum Beweise, dass die Coercitivkraft des Eisens der Genauigkeit der Resultate keinen Eintrag that. Ferner wäre es leicht gewesen, den Einfluss der Temperatur des Eisenstabs zu berücksichtigen, indem diese Temperatur durch einen Wasserstrom constant erhalten worden wäre; doch ergab sich, dass der Einfluss mässiger Temperaturänderungen so gering war, dass zu seiner genaueren Bestimmung die Messungen mit einer noch viel grösseren Feinheit hätten ausgeführt werden müssen, wozu besondere neue Einrichtungen hätten

getroffen werden müssen, welche sogleich zu beschaffen nicht möglich war. Die nach bekannten Regeln in der Tafel gemachte Zurückführung des Eisenmagnetismus auf absolutes Maass bedarf hier keiner weiteren Erläuterung. Auch die Stromstärke ist mit Hülfe einer Tangentenboussole nach absolutem Masse bestimmt worden und es ist dabei die von Müller schon erwähnte, zu grösserer Genauigkeit nothwendige Correction, welche von dem Verhältnisse der Nadellänge zum Durchmesser des galvanischen Rings abhängt, da sie leicht auszuführen war, genau ermittelt und berücksichtigt worden. Diese Kenntniss der Stromstärke nach absolutem Maasse ist aber ferner dazu benutzt worden, um mit Hülfe der Zahl der Windungen der Spirale, durch welche der Strom ging, und ihrer Dimensionen, die Grösse der auf das Eisen wirkenden Kraft nach demselben absoluten Maasse zu bestimmen, nach welchem der Erdmagnetismus ausgedrückt wird, um dadurch jene Kraft mit der bekannten Intensität der erdmagnetischen Kraft vergleichbar zu machen. In der folgenden Tafel ist in der Columnenüberschrift diese Kraft mit X bezeichnet. Der gefundene Eisenmagnetismus M ist mit der in Milligrammen ausgedrückten Masse des Eisens $p = 8190$ dividirt, und der so auf die Masseneinheit reducirte Magnetismus ist in der Columnenüberschrift mit m bezeichnet worden.

Nr.	X	m
1.	658,9	911,1
2.	1381,5	1424,0
3.	1792,0	1547,9
4.	2151,0	1627,3
5.	2432,8	1680,7
6.	2757,0	1722,7
7.	3090,6	1767,3
8.	3186,0	1787,7
9.	2645,6	1707,9
10.	2232,1	1654,0
11.	1918,7	1584,1
12.	1551,2	1488,9
13.	1133,1	1327,9
14.	670,3	952,0

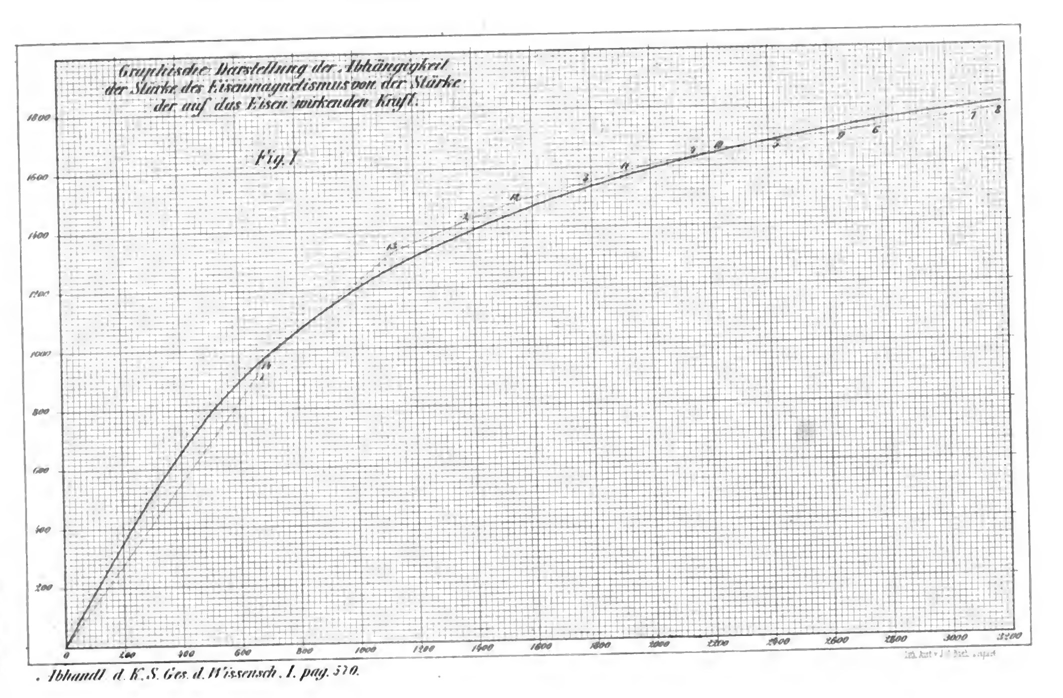
Diese Tafel zerfällt, wie man sieht, in zwei Abtheilungen, nämlich in eine, wo die Grösse der Kraft, welche auf das Eisen wirkt, zunimmt, und in eine andere, wo sie abnimmt. Man sieht aber aus der Fig. 7 gegebenen graphischen Darstellung, dass die Versuche der letzteren Abtheilung, welche darin mit Nr. 8 bis 14 bezeichnet sind, sehr gut zu den Versuchen der ersten, welche mit Nr. 1 bis 7 bezeichnet sind, passen. Bei dem letzten Versuche der ersten Abtheilung hatte der Eisenstab eine höhere Temperatur erreicht und es wurde vor dem Beginne der folgenden Versuche so lange gewartet, bis er wieder abgekühlt war. Dessenungeachtet sieht man, dass beide Versuche den übrigen sich gleich gut anreihen, ein Beweis also, dass der Einfluss dieser Temperaturdifferenz sehr gering gewesen sein müsse.

Es geht also aus diesen Versuchen offenbar das Resultat hervor, dass das Verhältniss der Stärke des Eisenmagnetismus zur Grösse der auf das Eisen wirkenden Kraft veränderlich ist, und es ist darnach höchst wahrscheinlich, dass der Eisenmagnetismus sich einem Grenzwerthe nähert, den er nie überschreiten kann. Es leuchtet ein, dass es unmöglich ist, die Versuche so weit fortzusetzen, dass dieser Grenzwerth unmittelbar durch die Beobachtungen erhalten und bestimmt würde. Eine solche unmittelbare Bestimmung des Grenzwerths ist aber nicht nothwendig, weil es im Grunde genügt, dass die stetige Veränderung jenes Verhältnisses bewiesen ist. Dieselben Versuche sind noch von andern Beobachtern mit ganz gleichem Erfolge wiederholt worden und ich glaube, dass die daraus gezogenen Resultate keinem Zweifel unterliegen. Es wird dadurch also das von Müller gefundene Resultat im Wesentlichen bestätigt.

26.

Das Gesetz der Abhängigkeit des magnetischen Moments von der Grösse der Scheidungskraft nach der Annahme von der Drehbarkeit der Molecule, und Vergleichung mit den Versuchen.

Es bleibt nun näher zu erörtern übrig, ob die durch obige Versuche gefundene Veränderlichkeit der Stärke des Eisenmagnetismus bei verschiedener Grösse der auf das Eisen wirkenden Kräfte mit demjenigen Gesetze übereinstimme, welches sich aus der Annahme einer bestimmten Drehbarkeit der Molecule folgern lässt. Findet dieses Statt, so leuchtet von selbst ein, dass man mit Ampère auch annehmen kann,



Abhandl. d. K. S. Ges. d. Wissensch. I. pag. 570.

dass diese Molecule die Träger von Molecularströmen sind, wodurch die Erklärung der Entstehung und der Veränderungen des Eisenmagnetismus, ebenso wie die seiner Wirkungen, von der Annahme magnetischer Fluida ganz unabhängig gemacht und blos auf die Annahme elektrischer Fluida zurückgeführt werden könnte.

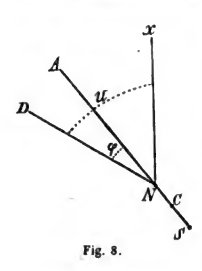


Fig. 8.

Es sei Fig. 8 NS ein Molecularmagnet, welcher sich um seinen Mittelpunkt C drehen kann; ND sei die Richtung, mit welcher seine magnetische Axe beim Gleichgewicht parallel ist, wenn die äussere Kraft $X = 0$ ist. Die Thatsache, dass beim weichen Eisen der durch eine äussere auf das Eisen wirkende Kraft hervorgebrachte Magnetismus von selbst wieder verschwindet, sobald die äussere Kraft zu wirken aufhört, beweist, dass der Molecularmagnet, auf dessen Drehung der hervorgebrachte Magnetismus beruhte, von selbst wieder in seine ursprüngliche mit ND parallele Lage zurückgetrieben werde. Diese in der Wechselwirkung der Molecule begründete zurücktreibende Kraft muss aber mit der Grösse der Ablenkung $AND = \varphi$ wachsen und kann durch

$$D \sin \varphi$$

dargestellt werden, wo D eine constante Grösse bezeichnet, welche man die moleculare Directionskraft nennen kann. Wirkt nun ausser dieser molecularen Directionskraft auf den Molecularmagnet nach der Richtung NX die äussere Kraft X, welche mit der Richtung der Directionskraft den Winkel $XND = u$ einschliesst, so wird der Molecularmagnet dadurch um den Winkel $AND = \varphi$ gedreht oder abgelenkt, und man hat dann zur Bestimmung der neuen Gleichgewichtslage folgende Gleichung:

$$X \sin u \cos \varphi = (D + X \cos u) \sin \varphi$$

oder

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{X \sin u}{D + X \cos u}.$$

Aus dieser Ablenkung φ lässt sich nun die Zunahme des nach der Richtung der Kraft X zerlegten magnetischen Moments des Molecules bestimmen. Wird nämlich das ganze magnetische Moment des Molecules mit μ bezeichnet, so war das nach der Richtung der Kraft X zerlegte vor der Ablenkung

$$= \mu \cos u,$$

nach der Ablenkung

$$= \mu \cos(u - \varphi),$$

folglich die gesuchte Zunahme x

$$x = \mu (\cos(u - \varphi) - \cos u).$$

Substituirt man hierin für φ den durch obige Gleichung $\operatorname{tang}\varphi = \frac{X \sin u}{D + X \cos u}$ gegebenen Werth, so erhält man

$$x = \mu \left\{ \frac{X + D \cos u}{\sqrt{(XX + DD + 2XD \cos u)}} - \cos u \right\}:$$

Für ein System von Moleculen, deren magnetische Axen beim ursprünglichen Gleichgewichte nach allen Richtungen des Raums ohne Unterschied gerichtet sind, ist die Zahl der Molecule, deren magnetische Axen mit der Richtung NX der Kraft X den Winkel u bilden, mit $\sin u$ proportional zu setzen. Es soll nun das magnetische Moment y bestimmt werden, welches aus der Drehung aller Molecule des Systems durch die Kraft X resultirt.

Man multiplicire zu diesem Zwecke den oben gefundenen Werth von x mit $\sin u\, du$ und nehme dann den Integralwerth von $u = 0$ bis $u = \pi$. Dieser Integralwerth, mit der Anzahl der Molecule n multiplicirt und mit $\int_0^\pi \sin u\, du = 2$ dividirt, giebt das gesuchte Moment y

$$y = \frac{n}{2} \int_0^\pi x \sin u\, du.$$

Durch Ausführung der Integration erhält man hiernach für y folgenden Ausdruck: $y = \frac{2}{3} n\mu \frac{X}{D}$, wenn $X < D$; $y = n\mu\left(1 - \frac{1}{3}\frac{DD}{XX}\right)$, wenn $X > D$.

$$y = n\mu \frac{X}{\sqrt{(XX + DD)}} \cdot \frac{X^4 + \frac{1}{3} XXDD + \frac{1}{3} D^4}{X^4 + XXDD + D^4}.$$

Die Kraft, welche auf das Eisen wirkte, und durch welche dieses Moment hervorgebracht wurde, war $= X$. Bezeichnet n die Zahl der Molecule in der Volumeneinheit, so hat das Verhältniss des Moments y zu der Kraft X, durch die es hervorgebracht wird, in der Drehungstheorie dieselbe Bedeutung, welche in der Scheidungstheorie die Grösse hat, welche Neumann, in Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 37, bei der Bestimmung des magnetischen Zustandes eines Rotationsellipsoids, welcher durch vertheilende Kräfte erregt ist, mit k bezeichnet. Substituirt man daher in Neumann's Rechnung für den von ihm als constant betrachteten Werth von k den eben gefundenen variablen Werth $\frac{y}{X}$, so ergiebt sich, wenn n die Zahl der

Molecule in der Volumen- oder Masseneinheit angiebt, der auf die Volumen- oder Masseneinheit reducirte Magnetismus des Eisens m durch folgende Gleichung:

$$m = \frac{y}{1 + 4\pi S \frac{y}{X}} \text{ für die Volumeneinheit,}$$

$$m = \frac{y}{1 + 4\pi S\varrho \frac{y}{X}} \text{ für die Masseneinheit,}$$

wo ϱ die Dichtigkeit des Eisens und S einen von der Gestalt abhängigen Faktor bezeichnet (siehe Art. 21).

Hiernach lässt sich nun die Stärke des Eisenmagnetismus m aus der Grösse der auf das Eisen wirkenden Kraft X berechnen, wenn die Werthe der beiden dem Eisen eigenthümlichen Constanten $n\mu$ und D, und, zur Reduction auf die Masseneinheit, seine Dichtigkeit ϱ gegeben sind. Setzt man

$$n\mu = 2324{,}68$$
$$D = 276{,}39\,,$$

so erhält man, da die Dichtigkeit des Eisens $\varrho = 7{,}78$ ist, folgende Vergleichung der Rechnung mit der Beobachtung, wobei jedoch bemerkt werden muss, dass zur Bestimmung des Zahlenfaktors S statt der cylindrischen Form des Eisens eine ihr möglich nahe kommende ellipsoidische Form substituirt werden musste, wonach $S = \frac{1}{249}$ erhalten wurde.

Nr.	X	m beobachtet	m berechnet	Unterschied.
1.	658,9	911,1	948,4	— 37,3
2.	1381,5	1424,0	1387,0	+ 37,0
3.	1792,0	1547,9	1533,0	+ 14,9
4.	2151,0	1627,3	1623,5	+ 3,8
5.	2432,8	1680,7	1685,0	— 4,3
6.	2757,0	1722,7	1742,2	— 19,5
7.	3090,6	1767,3	1791,2	— 23,9
8.	3186,0	1787,7	1803,4	— 15,7
9.	2645,6	1707,9	1723,6	— 15,7
10.	2232,1	1654,0	1644,8	+ 9,2
11.	1918,7	1584,1	1568,9	+ 15,2
12.	1551,2	1488,9	1452,9	+ 36,0
13.	1133,1	1327,9	1276,8	+ 51,1
14.	670,3	952,0	957,5	— 5,5

Beachtet man, dass bei diesen Versuchen zur Messung der Intensität der Ströme als Tangentenboussole eine gewöhnliche auf einer Spitze drehbare Boussole, die blos 60 Millimeter lang war, gebraucht wurde, wo die Bruchtheile eines Grads nicht mit Sicherheit beobachtet werden konnten und daher die Intensität leicht um 1 Procent zu klein oder zu gross gefunden werden konnte, so leuchtet ein, dass man keine vollkommnere Uebereinstimmung der Rechnung mit der Beobachtung erwarten durfte, als die, welche obige Tafel wirklich zeigt. In der graphischen Darstellung Fig. 7 sind die berechneten Werthe durch eine stärkere Linie, die beobachteten durch eine feinere Linie verbunden. Es scheint hierdurch die Drehbarkeit der Eisenmolecule ausser Zweifel gesetzt. Und da man nun diese Eisenmolecule nach Ampère als die Träger von Molecularströmen betrachten kann, so ist dadurch eine vollständige Uebereinstimmung aller magnetischen Erscheinungen, auch derjenigen, welche an veränderlichen Magneten beobachtet werden, mit der Theorie der Molecularströme bewiesen und es ist dadurch eine wichtige Bestätigung dieser Theorie durch die magnetischen Erscheinungen gewonnen worden, als Gewähr der vorher gegebenen Begründung derselben durch die diamagnetischen Erscheinungen.

27.

Anwendung auf die Art. 10 gemachte Vergleichung.

Das im vorigen Artikel aus der Theorie drehbarer Molecule abgeleitete Gesetz zur Bestimmung der Stärke des Eisenmagnetismus nach seiner Abhängigkeit von der magnetischen oder elektromagnetischen Scheidungskraft findet seine wichtigste Anwendung auf die Construction starker Elektromagnete, wie überhaupt aller elektromagnetischen Instrumente, deren Wirkung von der Stärke des Eisenmagnetismus abhängt. Da aber diese Anwendung, auf welche Joule und Müller besonders aufmerksam gemacht haben, mit dem hier erörterten Gegenstande (Diamagnetismus) nicht unmittelbar zusammenhängt, so beschränke ich mich darauf, hier bloss die Anwendung obigen Gesetzes auf die Art. 10 gemachte Vergleichung der Stärke eines Elektrodiamagnets aus seinen magnetischen und magnetelektrischen Wirkungen beizufügen, weil darauf Art. 10, S. 530 verwiesen worden ist.

Es ist nämlich Art. 10 der Wismuthdiamagnetismus mit dem Eisenmagnetismus auf doppelte Weise verglichen worden, erstens

durch die von beiden hervorgebrachten Ablenkungen einer Magnetnadel, zweitens durch die von beiden, bei gleicher Bewegung in einem geschlossenen Leiter, inducirten elektrischen Ströme. Aus beiden Vergleichungen lässt sich die Stärke des Wismuthdiamagnetismus nach absolutem Maasse bestimmen, wenn die Stärke des Eisenmagnetismus nach absolutem Maasse bekannt ist. Es kommt also nur darauf an, obiges Gesetz unter den bei jener Vergleichung gegebenen Verhältnissen auf die Bestimmung des Eisenmagnetismus anzuwenden, um für den Wismuthdiamagnetismus zwei von einander unabhängige Bestimmungen zu erhalten, welche durch ihre Uebereinstimmung das Gesetz der diamagnetischen Polarität bestätigen. Nun ist zwar schon Art. 10 das aus den Müller'schen Versuchen abgeleitete Gesetz unter den dort angegebenen Verhältnissen auf diese Bestimmung des Eisenmagnetismus angewendet, jedoch dabei bemerkt worden, dass das daraus gefundene Resultat keineswegs als ganz sicher und genau gelten könne, und es wird daher zu grösserer Sicherheit und Genauigkeit gereichen, das im vorigen Artikel schärfer bestimmte Gesetz darauf anzuwenden.

Es war nämlich Art. 10 der, nach der Note S. 527, durch eine elektromagnetische Kraft $X = 629{,}9$ im Wismuth hervorgebrachte Diamagnetismus mit dem durch dieselbe Kraft im Eisen hervorgebrachten Magnetismus durch die von beiden auf eine Magnetnadel ausgeübten Drehungsmomente verglichen und ihr Verhältniss wie

$$1 : 1470000$$

gefunden worden. Nach diesem Verhältnisse kann der Diamagnetismus nach absolutem Maasse bestimmt werden, wenn der Eisenmagnetismus nach absolutem Maasse bekannt ist. Nun ist aber nach dem vorigen Artikel für $X = 629{,}9$

$$\frac{y}{X} = 3{,}3959 .$$

Substituirt man ferner, wie im vorigen Artikel, der cylindrischen Form des Eisenstäbchens, welches 92 Millimeter lang und 0,1016 Millimeter dick war, eine möglich nahe kommende ellipsoidische Form, so erhält man nach Neumann

$$S = \frac{1}{133780}$$

und man findet damit, wenn $\varrho = 7{,}78$ gesetzt wird,

$$\log m = \log \frac{yT}{X} - \log\left(1 + 4\pi S\varrho \frac{y}{X}\right) = 3{,}32919,$$

also den Eisenmagnetismus nach absolutem Maasse

$$m = 2134.$$

Für diesen Werth des Eisenmagnetismus erhält man aber nach dem angeführten Verhältnisse den derselben Kraft $X = 629{,}9$ entsprechenden Diamagnetismus des Wismuths, nach absolutem Maasse

$$= \frac{1}{1470000} \cdot 2134 = \frac{1}{689}.$$

Es war ferner nach Art. 10 der nach Note S. 527 durch eine elektromagnetische Kraft $X = 3012$ im Wismuth hervorgebrachte Diamagnetismus mit dem durch dieselbe Kraft im Eisen hervorgebrachten Magnetismus durch die Intensität der von ihnen bei ihrer Bewegung in einem geschlossenen Leiter erregten elektrischen Ströme verglichen und ihr Verhältniss wie 1 : 456700 oder, nach der Art. 10 S. 526 für das Wismuth angegebenen Reduction, wie

1 : 360740

gefunden worden. Nach diesem Verhältnisse kann nun ebenfalls der Diamagnetismus nach absolutem Maasse bestimmt werden, wenn der Eisenmagnetismus nach absolutem Maasse bekannt ist. Nun ist aber nach dem vorigen Artikel für $X = 3012$

$$\frac{y}{X} = 0{,}77133.$$

Substituirt man nun auch hier der cylindrischen Form des Eisenstäbchens, welches 186 Millimeter lang und 0,8342 Millimeter dick war, eine möglich nahe kommende ellipsoidische Form, so erhält man nach Neumann $\quad S = \frac{1}{9747},$

und hiermit, für $\varrho = 7{,}78$,

$$\log m = \log \frac{yT}{X} - \log \left(1 + 4\pi S\varrho \frac{y}{X}\right) = 3{,}36274,$$

also den Eisenmagnetismus nach absolutem Maasse

$$m = 2305{,}4.$$

Für diesen Werth des Eisenmagnetismus erhält man aber nach dem angeführten Verhältnisse den derselben Kraft $X = 3012$ entsprechenden Diamagnetismus des Wismuths nach absolutem Maasse

$$= \frac{1}{360740} \cdot 2305{,}4 = \frac{1}{156{,}5}.$$

Reducirt man endlich diese für verschiedene Werthe der Kraft X bestimmte Stärke des Diamagnetismus durch Division mit X auf denjenigen Werth, welcher der Einheit der Kraft X entspricht so erhält man nach der ersteren Vergleichung (durch magnetische Wirkungen) für die Stärke des durch die Einheit der Kraft in der Massen-

einheit des Wismuths hervorgebrachten Diamagnetismus nach absolutem Maasse den Werth

$$\frac{1}{629,9} \cdot \frac{1}{689} = \frac{1}{434000};$$

aus der letzteren Vergleichung (durch elektrische Wirkungen) erhält man dagegen

$$\frac{1}{2301} \cdot \frac{1}{156,5} = \frac{1}{471300}\,{}^{*)}.$$

Im Mittel also aus beiden, nach Verhältniss der Art. 10 schon näher erörterten Umstände wohl übereinstimmenden, Vergleichungen ergiebt sich die Stärke des durch die Einheit der Kraft in der Masseneinheit des Wismuths hervorgebrachten Diamagnetismus nach absolutem Maasse

$$= \frac{1}{452000}.$$

Aus den im vorigen Artikel angeführten Formeln findet man aber den Grenzwerth des durch die Einheit der Kraft in der Masseneinheit des Eisens hervorgebrachten Magnetismus nach demselben absoluten Maasse ausgedrückt

$$= 5,6074,$$

d. i. 2540000 Mal grösser als den Diamagnetismus.

Für kleine Scheidungskräfte und dünne Eisenstäbe, für welche der Eisenmagnetismus zum Wismuthdiamagnetismus nahe in einem constanten Verhältnisse steht, ergiebt sich also der Wismuthdiamagnetismus etwa $2^1/_2$ Millionen Mal kleiner als der Eisenmagnetismus. Je grösser aber die Scheidungskräfte und je dicker die Eisenstäbe werden, desto mehr wächst der Diamagnetismus des Wismuths im Vergleiche zum Magnetismus des Eisens, so dass er z. B. in dem Art. 10 angeführten Falle bis zu dem 360740sten Theile des Eisenmagnetismus stieg, welches der grösste Werth desselben ist, der in obigen Versuchen vorkommt.

*) Nach diesem Verhältnisse ergiebt sich leicht, wenn das aus der magnetischen Wirkung des Wismuths gefundene Resultat nach S. 524. $= \frac{1}{1470000}$ angenommen wird, das aus der magnetelektrischen Wirkung abgeleitete $= \frac{4340}{4718} \cdot \frac{1}{1470000} = \frac{1}{1596000}$, was also statt des S. 530 angegebenen Werths $= \frac{1}{1781560}$, welcher gefunden worden war, indem die Müller'schen Versuche bei der Reduction des Eisenmagnetismus zum Grunde gelegt wurden, zu setzen ist. Das hier gefundene genauere Resultat ist übrigens a. a. O. unter Verweisung auf diese Note schon angeführt worden.

Inhalt.

ELEKTRODYNAMISCHE MAASSBESTIMMUNGEN

INSBESONDERE

ZURÜCKFÜHRUNG

DER

STROMINTENSITÄTS-MESSUNGEN

AUF MECHANISCHES MAASS.

VON

R. KOHLRAUSCH UND W. WEBER.

1.

Die Intensität eines elektrischen Stroms pflegt durch die Beobachtung entweder seiner *magnetischen*, oder *elektrodynamischen* oder endlich seiner *elektrolytischen* Wirkung bestimmt zu werden. Es können aber diese Wirkungen unter sehr verschiedenen Verhältnissen beobachtet werden und es ist Sache des Beobachters, diese Verhältnisse so zu wählen, wie er seinen Beobachtungen die grösste Vollkommenheit geben kann, während die *elektromagnetischen*, *elektrodynamischen* und *elektrolytischen Gesetze* dazu dienen, die unter verschiedenen Verhältnissen beobachteten Wirkungen auf einander zu *reduciren;* denn nur durch eine *Reduction der Beobachtungen auf gleiche Verhältnisse* kann man zu einer *Vergleichung der Stromintensitäten* gelangen. Diese *gleichen Verhältnisse* nun, auf welche alle unter verschiedenen Verhältnissen gemachten Beobachtungen reducirt werden sollen, nennt man die *Normalverhältnisse*, und durch Festsetzung dieser *Normalverhältnisse* wird *das Maass der Stromintensität* nach folgender Regel bestimmt:

> *Das Maass der Stromintensität* ist die Intensität desjenigen Stroms, welcher *unter den Normalverhältnissen* die Einheit der messbaren Wirkung hervorbringt.

Für die Beobachtungen der *magnetischen Wirkungen* eines Stroms sind die Normalverhältnisse folgende: *der Strom geht durch einen kreisförmigen Leiter, welcher die Flächeneinheit umschliesst, und wirkt auf einen Magnet, welcher die Einheit des Magnetismus besitzt, aus einer beliebigen aber grossen Entfernung* $= R$*; der Mittelpunkt des Magnets liegt in der Ebene des Leiters und seine magnetische Axe ist nach dem Mittelpunkte des kreisförmigen Leiters gerichtet.* — Das von dem Strome auf den Magnet ausgeübte *Drehungsmoment* D ist unter diesen Verhältnissen verschieden sowohl nach Verschiedenheit der Stromintensität, als auch nach Ver-

schiedenheit der Entfernung R; das Product R^3D hängt aber blos von der Stromintensität ab und ist daher unter diesen Verhältnissen *die messbare Wirkung* des Stroms, wonach man also zum ***Maass der Stromintensität*** die Intensität desjenigen Stroms erhält, dessen messbare Wirkung unter den beschriebenen Verhältnissen

$$R^3D = 1$$

ist. — Dieses Maass der Stromintensität, ergiebt sich dann aus den *elektromagnetischen Gesetzen*, ist zugleich auch die Intensität desjenigen Stroms, welcher, wenn er eine Ebene von der Grösse der Flächeneinheit umfliesst, in der Ferne überall die Wirkungen eines im Mittelpunkte jener Ebene befindlichen Magnets ausübt, welcher die Einheit des Magnetismus besitzt und dessen magnetische Axe auf der Ebene senkrecht steht —; oder ist auch die Intensität desjenigen Stroms, von welchem eine *Tangentenboussole mit einfachem Multiplicatorkreise vom Halbmesser* $= R$ bei einer Ablenkung vom magnetischen Meridiane

$$\varphi = arc \tang \frac{2\pi}{RT},$$

wenn T den horizontalen Erdmagnetismus bezeichnet, *im Gleichgewichte* erhalten wird.

Für die Beobachtungen der *elektrodynamischen Wirkungen* eines Stroms sind die Normalverhältnisse folgende: *derselbe Strom geht durch zwei kreisförmige Leiter, von denen jeder die Flächeneinheit umschliesst und die in einer beliebigen aber grossen Entfernung* $= R$ *von einander liegen: die Durchschnittslinie beider auf einander senkrechten Kreisebenen halbirt den ersten kreisförmigen Leiter.* — Das von dem Strome im *ersten* Leiter auf den durchströmten *zweiten* Leiter ausgeübte, nach mechanischem Maasse ausgedrückte *Drehungsmoment* D, ist unter diesen Verhältnissen verschieden sowohl nach Verschiedenheit der Stromintensität, als auch nach Verschiedenheit der Entfernung R; das Product R^3D hängt aber blos von der Stromintensität ab und ist daher unter diesen Verhältnissen die *messbare Wirkung* des Stroms, wonach man also zum ***Maass der Stromintensität*** die Intensität desjenigen Stroms erhält, dessen messbare Wirkung unter den beschriebenen Verhältnissen

$$R^3D = 1$$

ist.

Für die Beobachtungen der *elektrolytischen Wirkungen* eines Stromes sind die Normalverhältnisse folgende: *der Strom geht durch Wasser*

während eines beliebigen genau messbaren Zeitraums T hindurch, ohne eine Änderung der Intensität zu erleiden. — Die nach dem angenommenen Massenmaasse (Milligramm) ausgedrückte, von dem Strome zerlegte Wassermasse M ist unter diesen Verhältnissen verschieden sowohl nach Verschiedenheit der Stromintensität, als auch nach Verschiedenheit des (in Secunden ausgedrückten) Zeitraums T; der Quotient $\frac{M}{T}$ hängt aber blos von der Stromintensität ab und ist daher unter diesen Verhältnissen die *messbare Wirkung* des Stroms, wonach man also zum *Maass der Stromintensität* die Intensität desjenigen Stroms erhält, dessen messbare Wirkung unter den beschriebenen Verhältnissen

$$\frac{M}{T} = 1$$

ist.

Es bleibt nur übrig, um die Intensitäten aller Ströme, deren *magnetische, elektrodynamische* oder *elektrolytische* Wirkungen beobachtet worden sind, unter einander vergleichen zu können, die durch die oben beschriebenen Normalverhältnisse gegebenen drei Maasse auf einander zurückzuführen.

Für die *beiden ersten Maasse* ergiebt sich diese Zurückführung aus den *allgemeinen Gesetzen der Elektrodynamik*, welche, wie Ampère gezeigt hat, die Gesetze des Magnetismus und Elektromagnetismus mit umfassen, es ergiebt sich nämlich daraus, wie schon in den Elektrodynamischen Maassbestimmungen II. S. 261 nachgewiesen worden ist, dass das *erste* Maass sich zum *zweiten* verhält wie

$$\sqrt{2} : 1. ^{*})$$

*) Es ist hiebei von Interesse zu bemerken, dass sich zwischen diesen beiden Maassen eine vollkommene Identität herstellen lassen würde, wenn man in den oben beschriebenen *Normalverhältnissen für die elektrodynamischen Wirkungen* das von dem Strome im *zweiten* Kreise auf den Strom im *ersten* Kreise ausgeübte Drehungsmoment statt des von dem Strome im *ersten* Kreise auf den im *zweiten* ausgeübten Drehungsmoments setzte. Der Grund, warum dies nicht geschieht, liegt blos darin, dass der von Ampère angegebene Ausdruck der Abstossungskraft zweier Stromelemente unverändert beibehalten werden soll, wonach, wenn α, α' die Länge beider Elemente, i, i' die Stromintensitäten, r die Entfernung, ε den Winkel zwischen α und α', θ den Winkel zwischen α und r, θ' den Winkel zwischen α' und der verlängerten r bezeichnet, jene Kraft durch

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr} ii' \left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right)$$

oder durch

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{rr} ii' \left(3\cos\theta\cos\theta' - 2\cos\varepsilon\right)$$

Für das *dritte* Maass hat sich die Zurückführung auf das *erste* und also mittelbar auch auf das *zweite* durch gleichzeitige Beobachtungen der von einem und demselben Strome hervorgebrachten *magnetischen* und *elektrolytischen* Wirkungen ergeben. Aus der Vergleichung dieser auf die oben beschriebenen Normalverhältnisse reducirten Beobachtungen wurde nämlich gefunden, dass das *dritte Maass* der Stromintensität, oder die Intensität desjenigen Stroms, von welchem 1 Milligramm Wasser in 1 Secunde zersetzt wird, $106\frac{2}{3}$ Mal grösser ist, als das *erste Maass*, oder als die Intensität desjenigen Stroms, welcher, wenn er eine Ebene von der Grösse des Flächenmaasses umfliesst, in grossen Entfernungen überall dieselben Wirkungen hervorbringt, wie ein Magnet im Mittelpunkte jener Ebene, der die Einheit des Magnetismus besitzt und dessen

---

dargestellt wird. Aus dem Ampère'schen *Fundamentalgesetze der Elektrodynamik* folgt im Allgemeinen aber nur, dass jene Kraft diesem Ausdrucke *proportional* ist, wonach also die Kraft selbst, wenn man das Maass der Stromintensität noch unbestimmt lässt, durch das Product dieses Ausdrucks in eine beliebige Constante dargestellt wird, also durch

$$-C.\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'\left(\cos\varepsilon-\frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right)$$

oder durch

$$D.\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'\left(3\cos\theta\cos\theta'-2\cos\varepsilon\right),$$

worin C oder D die erwähnte Constante bezeichnet. Ampère hat nun zur Feststellung eines bestimmten Stromintensitätsmaasses der Constanten C den Werth $C=1$ oder der Constanten D den Werth $D=\frac{1}{2}$ beigelegt und hat dadurch den schon erwähnten Ausdruck der Abstossungskraft zweier Stromelemente

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'\left(\cos\varepsilon-\frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'\left(3\cos\theta\cos\theta-2\cos\varepsilon\right)$$

erhalten, welcher sich für zwei parallele auf r senkrechte Stromelemente, für die $\varepsilon=0$ und $\theta=\theta'=90°$ ist, auf

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'$$

reducirt. Es würde aber, der Übereinstimmung mit den elektromagnetischen Messungen wegen, zweckmässiger gewesen sein, $D=1$ oder $C=2$ zu setzen, wo dann der Ausdruck der Abstossungskraft zweier Stromelemente

$$\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'\left(3\cos\theta\cos\theta'-2\cos\varepsilon\right)=-2\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'\left(\cos\varepsilon-\frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right)$$

geworden wäre, und sich für zwei mit r zusammen fallende Stromelemente, für die $\theta=\theta'=\varepsilon=0$ ist, auf

$$\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'$$

reducirt hätte. In Übereinstimmung hiemit würde die angeführte *Änderung der Normalverhältnisse für die elektrodynamischen Stromwirkungen* stehen und dadurch eine vollkommene Identität des *elektrodynamischen* Maasses der Stromintensität mit dem *magnetischen* gewonnen werden.

magnetische Axe auf der Ebene senkrecht steht. Siehe »Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840«, S. 96, und Casselmann »Über die galvanische Kohlenzinkkette. Marburg 1844.« S. 70.

2.

Die Intensität eines elektrischen Stroms lässt sich aber nicht blos aus seinen *Wirkungen*, sondern auch aus seinen *Ursachen* bestimmen. Die nächsten Ursachen eines elektrischen Stroms liegen aber in der Masse des neutralen elektrischen Fluidums, welche in einem geschlossenen Leiter enthalten ist, und in der Geschwindigkeit, mit welcher die beiden Bestandtheile desselben, nämlich die Masse des *positiven* und *negativen* Fluidums, gleichzeitig in entgegengesetzten Richtungen sich bewegen. Auf Grund dieser *Ursachen* wird *das Maass der Stromintensität* folgender Maassen festgestellt:

> Das Maass der Stromintensität ist die Intensität desjenigen Stroms, welcher *hervorgebracht* wird durch eine solche Geschwindigkeit der beiden elektrischen Fluida, bei welcher die durch den Querschnitt des Leiters fliessende Masse jedes Fluidums dividirt durch die Zeit, in welcher sie durchfliesst, = 1 ist.

Dieses Maass ist *das mechanische Maass der Stromintensität*, und es ist die Aufgabe dieser Abhandlung, die im vorigen Artikel beschriebenen Maasse auf dieses Maass zurückzuführen, welches im Wesen des Stroms am einfachsten begründet liegt und daher bei Fundamentalbestimmungen vor den andern Maassen den Vorzug verdient.

Zurückführung des magnetischen, elektrodynamischen und elektrolytischen Maasses der Stromintensität auf mechanisches Maass.

3.

Es ist bisher noch kein Versuch gemacht worden, Stromintensitäten nach *mechanischem Maasse* zu bestimmen, und noch weniger die nach andern Maassen bestimmten Stromintensitäten auf dieses Maass *zurückzuführen*. Man weiss blos, dass die *Elektricitätsmenge*, welche selbst bei schwachen, mit den geringsten galvanischen Mitteln dargestellten, Strömen durch den Querschnitt der geschlossenen Kette fliesst, auch für eine sehr kurze Zeit schon sehr gross sein müsse, da die kräf-

tigste Elektrisirmaschine, deren Conductor mit dem Reibzeuge durch einen Leitungsdraht verbunden wird, einen viel schwächeren Strom giebt, als ein einziges galvanisches Element, welches durch einen Leitungsdraht von mässig grossem Widerstande geschlossen wird.

Der Mangel an Bestimmungen der Stromintensität nach *mechanischem Maasse* hat seinen Grund in den Schwierigkeiten, die ihre Ausführung findet, während die Bestimmung der Stromintensitäten nach den andern oben angeführten Maassen sehr leicht ist und dabei einen viel höhern Grad von Genauigkeit gestattet. Die letztern Maasse werden daher für den *praktischen* Gebrauch zunächst immer in Anwendung kommen, und es handelt sich wesentlich nur darum, dass nur irgend *einmal* eine einzige nach einem von diesen letztern Maassen bekannte Stromintensität auch nach *mechanischem Maasse* so genau wie möglich gemessen werde, um das Grössenverhältniss des *mechanischen Maasses* zu einem von jenen Maassen zu ermitteln und dadurch in den Stand gesetzt zu werden, alle nach jenen Maassen gemachten Bestimmungen *auf mechanisches Maass zurückzuführen.*

Zu einer solchen Messung fehlt es vor Allem an der Kenntniss der in einem geschlossenen Leiter in Strömung begriffenen *Elektricitätsmenge*, oder vielmehr, weil diese Kenntniss während der Stömung gar nicht zu erlangen ist, an der Kenntniss einer *Elektricitätsmenge, welche in Strömung versetzt werden soll, und die z. B. in einer Leidener Flasche sich vorher schon angesammelt befindet.* Man besitzt dazu blos die vorzüglich von Coulomb herrührenden Mittel und Methoden, die Elektricität zu messen, von denen aber zur Messung der in einer geladenen Leidener Flasche angesammelten Elektricität noch nie Gebrauch gemacht worden ist.*)

---

*) Buff hat in den »Annalen der Chemie und Physik« Bd. 86. S. 33 mit Hülfe seiner Tangentenboussole mit langem Leitungsdrahte gefunden, dass die Elektricitätsmenge, durch welche 1 Milligramm Wasserstoff aus 9 Milligrammen Wasser elektrisch ausgeschieden wird, wenn man die Mittel besässe dieselbe zu verdichten, hinreichen würde, eine Batterie von 45480 Leidener Flaschen von 480 Millimeter Höhe und 160 Millimeter Durchmesser bis zu einer Schlagweite von 100 Millimeter zu laden. Diese Bestimmung von Buff ist die beste und genaueste, welche existirt, genügt aber noch nicht zur Bestimmung der *Elektricitätsmenge*, welche in diesen Flaschen enthalten ist, wozu nach *mechanischen Principien* die Kenntniss der *Abstossungskraft* erforderlich ist, welche diese in einem Punkte concentrirte *Elektricitätsmenge* auf eine gleiche in einem

Die Frage nach der *Elektricitätsmenge*, welche sich in einer Leidener Flasche angesammelt befindet, ist öfters aufgeworfen worden: sie ist, wenn sie gründlich gelöst und die *Elektricitätsmenge* durch die *Kräfte* bestimmt wird, welche sie auszuüben vermag, keineswegs eine blosse Frage der Neugier, sondern es knüpfen sich daran wichtige Bestimmungen, welche der Elektricitätslehre gegenwärtig noch fehlen und ihr den Weg zu interessanten Untersuchungen bahnen können. *)

Zu den *elektrodynamischen Maassbestimmungen* steht diese die Elektricitätsmenge in einer Leidener Flasche betreffende Frage in einer besondern Beziehung, die jedenfalls nähere Beachtung verdient. Im ersten Theile dieser Maassbestimmungen ist ein Grundgesetz der elektrischen Wirkung aufgestellt, welches die *Elektrostatik*, *Elektrodynamik* und *Induction* zugleich umfasst. Es ist nach diesem Grundgesetze die Kraft, welche die elektrische Masse e auf die elektrische Masse e' aus der Entfernung r ausübt, nicht blos eine Function dieser *Entfernung*, sondern zugleich eine Function des Bewegungszustands der beiden elektrischen Massen gegen einander, welcher durch ihre *relative Geschwindigkeit* $\frac{dr}{dt}$ und *Beschleunigung* $\frac{ddr}{dt^2}$, mit welcher sie die Entfernung r passiren, gegeben ist. In diesem Grundgesetze der elektrischen Wirkung:

$$\frac{ee'}{rr}\left[1-\frac{1}{cc}\left(\frac{dr^2}{dt^2}-2r\frac{ddr}{dt^2}\right)\right]$$

---

andern davon entfernten Punkte concentrirte Elektricitätsmenge ausüben würde; an der Kenntniss dieser *Abstossungskraft* fehlt es aber noch und es ist mit den mannichfaltigen Mitteln und Methoden, welche von Coulomb und Anderen angegeben worden sind, solche Kräfte zu messen, bisher nicht versucht worden, auch nur eine genäherte Kenntniss davon zu erlangen.

*) Dahin gehört erstlich, wenn man beachtet, dass die meisten Anwendungen der Naturgesetze von der Werthbestimmung gewisser Constanten abhängen, die Bestimmung der unbekannten *Constanten der Elektricitätslehre*, die grossentheils von der Lösung obiger Frage abhängt. — Es ist ferner sehr wahrscheinlich, dass eine Bestimmung der zur *Wasserzersetzung* erforderlichen Elektricität durch die Kräfte, die sie auszuüben vermag, zur Untersuchung derjenigen Kräfte würde benutzt werden können, welche bei der Zersetzung des Wassers wirksam sind; und dass auf gleiche Weise eine Bestimmung der Elektricitätsmenge, durch die ein Draht in bestimmter Frist zum *Erglühen* gebracht wird, durch die *Kräfte*, die sie auszuüben vermag, zur näheren Einsicht in die bei der Wärmeerzeugung wirksamen Kräfte führen würde u. s. w. Im zweiten Theile werden einige von diesen Anwendungen näher erörtert werden.

bedeutet *die Constante c diejenige relative Geschwindigkeit, bei welcher, so lange sie unverändert bleibt, die elektrischen Massen gar keine Wirkung auf einander ausüben würden.* Im zweiten Theile dieser Maassbestimmungen ist sodann entwickelt worden, wie die Werthbestimmung dieser *Constanten c* die Möglichkeit bietet, nicht blos die Messungen der elektromotorischen Kräfte, sondern auch die Stromintensitätsmessungen auf die *Maasse der Mechanik* zurückzuführen, und es ist daselbst die Relation angegeben, nach welcher aus der *Constanten c* die *Elektricitätsmenge* bestimmt werden kann, welche bei den auf die magnetischen und elektrodynamischen Stromwirkungen begründeten Maasseinheiten der Stromintensität in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters passirt. Umgekehrt würde also auch die auf andern Wegen erworbene Kenntniss dieser *Elektricitätsmenge* zur Werthbestimmung jener *Constanten c* führen, auf die unsere Aufmerksamkeit durch obiges Grundgesetz besonders gelenkt ist. Die Bestimmung einer solchen in der Natur gegebenen *Constante* ist ein für feinere Messung besonders geeigneter Gegenstand. Im vorliegenden Falle lässt sich diese Bestimmung auf folgende Aufgabe zurückführen.

4.

Aufgabe.

Es soll diejenige *Elektricitätsmenge* bestimmt werden, welche bei einem Strome von der Intensität der auf die *magnetische* oder *elektrodynamische* oder *elektrolytische* Wirkung begründeten Maasseinheit in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters passirt, und zwar soll diese Elektricitätsmenge *durch die Grösse der von ihr ausgeübten elektrostatischen Grundkraft* bestimmt werden; oder specieller:

> *es sei ein constanter Strom gegeben, von welchem eine Tangentenboussole mit einfachem Multiplicatorkreise vom Halbmesser* $= R$ *bei einer Ablenkung* $\varphi = arc \tan \frac{2\pi}{RT}$ *im Gleichgewichte erhalten wird, wenn T die Intensität des die Boussole lenkenden horizontalen Erdmagnetismus bezeichnet: es soll bestimmt werden, wie die Elektricitätsmenge, welche bei einem solchen Strome in 1 Secunde durch den Querschnitt des Leiters fliesst, sich zu der Elektricitätsmenge auf jeder von zwei kleinen gleich geladenen Kugeln verhält, welche einander aus der Einheit der Entfernung mit der Einheit der Kraft abstossen. Es soll dabei zur Einheit der Kraft diejenige Kraft*

genommen werden, welche der Masse eines Milligramms in 1 Secunde die Einheit der Geschwindigkeit ertheilt.

Der gegebene *Strom* ist nach obiger Bestimmung ein solcher, welcher, wenn er eine Ebene von der Grösse der Flächeneinheit umfliesst, in der Ferne ganz gleiche Wirkungen ausübt wie ein Magnet, welcher die Einheit des magnetischen Moments besitzt, d. i. derjenige Strom, dessen Stärke gewöhnlich bei Beobachtungen mit der Tangentenboussole zum Maasse für die Stärke aller andern Ströme gewählt wird; und die auf jeder der kleinen Kugeln vorhandene *Elektricitätsmenge* ist diejenige, welche bei elektrostatischen Messungen mit der Coulomb'schen Drehwage als Maasseinheit zum Grunde gelegt zu werden pflegt.

5.

Plan zur Lösung der Aufgabe.

Wenn *eine auf einem isolirten Leiter angesammelte Elektricitätsmenge E* durch den Multiplicator eines Galvanometers zur Erde hin entladen wird, so übt sie während ihres Durchfliessens ein Drehungsmoment auf die Magnetnadel des Galvanometers aus. Hat man nun auch durch Einschaltung von *Wassersäulen* in die Strombahn die *Entladungszeit* so viel als nöthig ist verlängert, damit zwischen den Windungen des Multiplicators kein Funke überspringt, sondern alle Windungen nach einander vom Entladungsstrome durchlaufen werden, so bildet diese *Entladungszeit* doch immer nur einen äusserst kleinen Bruchtheil von der *Schwingungsdauer* der Magnetnadel, so dass auch derjenige Theil der Bahn, den die Nadel während dieser *Entladungszeit* (also während der Wirkung des Entladungsstroms) zurücklegt, verschwindend klein ist gegen die ganze Bahn der Nadel, d. i. gegen die Grösse der *Elongation,* zu welcher die Nadel nach Verlauf einer *halben Schwingungsdauer* gelangt. Die Wirkung des Entladungsstroms kann daher wie ein *Stoss* betrachtet werden, welcher der Nadel in ihrer Ruhelage ertheilt wird, wonach aus der *Beobachtung der ersten Elongation der Nadel nach der Entladung* die im Augenblicke des Stosses selbst der Nadel vom Entladungsstrome ertheilte *Angulargeschwindigkeit* nach bekannten Schwingungsgesetzen berechnet werden kann.

Übrigens verhält sich hiebei Alles ganz so, wie bei einem *Inductionsstosse*, auch darin, dass die Beschaffenheit des Entladungsstroms

ganz gleichgültig ist, möge er aus vielen getrennten aber schnell auf einander folgenden Partialentladungen bestehen, oder möge er stetig sein mit einer nach irgend einem Gesetze rasch bis zu Null abnehmenden Intensität, — *immer wird die Angulargeschwindigkeit, welche der Nadel dadurch ertheilt wird, ganz allein von der Elektricitätsmenge E abhängen.**)

Mit einem *constanten Strome* können wir der Nadel desselben Galvanometers einen ähnlichen *Stoss* ertheilen, wenn wir den Strom nur eine sehr kurze Zeit wirken lassen, und zwar wird die erste Elongation dieselbe sein, der Strom mag mit der Intensität i während der Zeit t, oder mit der grösseren Intensität ni während der kürzeren Zeit $\frac{1}{n}t$ gewirkt haben: ist nämlich die Stromdauer t gegen die Schwingungsdauer der Nadel sehr klein, so wird die *Angulargeschwindigkeit* stets gleich gefunden.**) Es fliesst aber in der Zeit t bei der Intensität i genau dieselbe *Elektricitätsmenge* durch den Querschnitt des Leiters, wie bei der Intensität ni in der Zeit $\frac{1}{n}t$.

Also auch in diesem Falle, wenn wir der Nadel durch einen *constanten Strom von kurzer Dauer* einen *Stoss* ertheilen, hängt die *Angulargeschwindigkeit* und folglich auch die *Elongation* der Nadel *lediglich und ganz allein von der Elektricitätsmenge ab, welche während der Dauer des Stroms durch den Querschnitt des Multiplicators sich bewegt hat.*

Haben wir nun bei demselben Multiplicator *einmal* durch die Entladung einer bekannten Menge E von positiver Elektricität, *das andere*

---

*) Man findet dies durch alle Versuche bestätigt. Die Elongation ist nicht nur, wie unter andern die Versuche in Anhang II zeigen, proportional der entladenen *Elektricitätsmenge,* sondern ist auch unabhängig von der *Entladungszeit* innerhalb weiter Grenzen; denn es ist einerlei, wie lang oder kurz die Wassersäule ist, welche man einschaltet, sobald nur nicht Windungen des Multiplicators übersprungen werden, oder die Entladungszeit so verlängert wird, dass die Wirkung des Entladungsstroms noch fortdauert, wenn die Nadel schon merklich aus der Ruhelage gewichen ist.

**) Die *Beschleunigung*, welche einer Nadel, deren magnetisches Moment M und deren Trägheitsmoment K ist, durch einen *constanten Strom* von der Intensität i ertheilt wird, ist, so lange die Richtung ihrer magnetischen Axe von der Ebene der Multiplicatorwindungen wenig abweicht, $=\frac{AMi}{K}$, wo A eine von den Dimensionen des Multiplicators und der Vertheilung des Nadelmagnetismus abhängige Constante bedeutet. Hieraus folgt die während der Zeit t ertheilte *Angulargeschwindigkeit* $=\frac{AMit}{K}$, deren Werth unverändert bleibt, wenn ni für i und gleichzeitig $\frac{1}{n}t$ für t gesetzt wird.

Mal durch sehr kurze Dauer eines constanten Stroms *gleiche Elongationen der Magnetnadel* hervorgebracht, so kann man daraus schliessen, *dass die positive Elektricitätsmenge x, welche während der kurzen Dauer des constanten Stroms durch den Querschnitt des Leiters floss,*

$$x = \tfrac{1}{2} E$$

ist, ein Resultat, von dessen Richtigkeit man sich leicht überzeugt, welche Vorstellung man auch von dem Vorgange im Innern der Conductoren während der Entladung haben möge.

Wollte man z. B. von der Entladung annehmen, die *ganze* angesammelte *positive* Elektricitätsmenge E sei allein blos in der Richtung zur Erde, oder eine ihr *gleiche* Menge *negativer* Elektricität sei allein blos in der entgegengesetzten Richtung von der Erde aus durch den *ganzen* Multiplicator geströmt, so würde die magnetische Wirkung eines solchen *Entladungsstromes* genau gleich der Wirkung eines Stromes sein, bei welchem nur die *Hälfte* jener positiven Elektricitätsmenge in der angegebenen Richtung durch jeden Querschnitt des Leiters fliesst, zugleich aber eine gleiche negative Elektricitätsmenge in der entgegengesetzten Richtung, ein Vorgang, wie er bei jenem *constanten Strome* angenommen wird. — Sollte man aber der entgegengesetzten Ansicht sein, dass nämlich gar nichts von der im isolirten Leiter angesammelten Elektricitätsmenge E selbst (und eben so wenig von der in der Erde befindlichen) durch die gesammten Windungen des Multiplicators hindurchfliesse, sondern dass dieselbe blos einen Doppelstrom im Drahte *veranlasse*, in welchem so grosse Massen neutralen Fluidums enthalten seien, dass eine sehr kleine Verschiebung dieser Massen genüge, um dem isolirten Leiter so viel negative Elektricität zuzuführen, dass die darin angesammelte positive Elektricität E neutralisirt wird, so würde man auch hiernach zu demselben Ergebniss gelangen; denn es würde alsdann der ganze Ableitungsdraht in eine sehr grosse Zahl kleiner Abtheilungen zerlegt werden können, so dass aus jeder Abtheilung in die nächst *folgende* die Elektricitätsmenge $+ \tfrac{1}{2} E$, in die nächst *vorhergehende* die Elektricitätsmenge $- \tfrac{1}{2} E$ überginge, folglich aus der letzten Abtheilung die Elektricitätsmenge $+ \tfrac{1}{2} E$ in die Erde abströmte, welche der ersten Abtheilung des Drahts aus dem isolirten Leiter ersetzt würde, während aus der ersten Abtheilung die Elektricitätsmenge $- \tfrac{1}{2} E$ in den isolirten Leiter abströmte und die darin zurückgebliebene Elektricität neutralisirte, welche aber der letzten Abtheilung des Drahts aus der

Erde ersetzt wird. — Wäre man endlich auch anzunehmen genöthigt, dass etwas mehr als die Hälfte der positiven Elektricitätsmenge E vom isolirten Leiter zum Drahte überginge, mithin etwas weniger als $-\frac{1}{2}E$ an negativer Elektricität in der entgegengesetzten Richtung vom Drahte zum isolirten Leiter überginge, so ändert auch dies nichts am Resultate, weil die magnetische Wirkung von der Summe der beiden bewegten Elektricitäten bedingt wird. —

Genug, *den Stoss*, welchen die Nadel erhält, wenn die *angesammelte Elektricitätsmenge E* durch den Multiplicator *entladen* wird, *eben denselben* erhält sie auch, wenn ein *constanter Strom* während eines solchen Zeitraums τ durch den Multiplicator geht, dass genau die *Hälfte* von E *an positiver Elektricität* in der Richtung des Stroms und eben so viel *an negativer Elektricität* in entgegengesetzter Richtung durch jeden Querschnitt geht, vorausgesetzt, dass der Zeitraum τ nur einen sehr kleinen Theil der Schwingungsdauer der Nadel bildet.

Hienach läuft die Lösung der Aufgabe auf folgende *zwei Punkte* hinaus:

1) die Elektricitätsmenge E in dem angegebenen elektrostatischen Maasse zu messen und bei ihrer Entladung die Elongation der Magnetnadel eines Galvanometers zu beobachten;

2) die kleine Zeit τ zu bestimmen, während welcher ein constanter Strom von der Intensität $= 1$ (nach magnetischem Maasse) durch den Multiplicator desselben Galvanometers gehen muss, damit er der Nadel dieselbe Elongation ertheile.

Multiplicirt man dann $\frac{1}{2}E$ mit der Zahl, welche anzeigt, wie oft τ in der Secunde enthalten ist, so erhält man durch $\frac{1}{2\tau}\cdot E$ die *positive Elektricitätsmenge* ausgedrückt, welche bei einem Strome, dessen Intensität nach magnetischem Maasse $= 1$ ist, während der Secunde in der Richtung des Stromes den Querschnitt des Leiters passirt; oder mit andern Worten: es ist

$$\frac{1}{2\tau}\cdot E : 1$$

das Verhältniss, in welchem diese den Querschnitt passirende *positive Elektricitätsmenge* zu derjenigen steht, welche der Messung der im isolirten Leiter angesammelten Elektricitätsmenge E als Maass zum Grunde gelegt worden ist, die nämlich auf jeder von zwei kleinen Kugeln sich

befinden muss, wenn sie sich aus der Entfernung = 1 mit der Kraft = 1 abstossen sollen.

Was zunächst den *zweiten* Punkt betrifft, so bedarf es zur Bestimmung von τ keiner besondern Versuche; denn es lässt sich der Werth von τ durch Rechnung aus der Zahl und den Dimensionen der Windungen des Multiplicators, aus der bei der Entladung beobachteten Elongation der Tangentenboussole und aus der Intensität des Erdmagnetismus weit genauer bestimmen, als es durch directe Versuche möglich sein würde, wie man im Art. 13 sehen wird.

Der *erste* Punkt aber, welcher die Bestimmung der Elektricitätsmenge E betrifft, fordert eine Combination mehrerer Versuche, welche Art. 6—12 beschrieben werden sollen. Es kam dabei nämlich darauf an, *erstens* eine noch unbekannte grössere Elektricitätsmenge in einem *vorher* bestimmten Verhältnisse in zwei Theile zu theilen, *sodann* den *grössern* Theil E durch die Tangentenboussole zu *entladen*, um seine magnetische Wirkung zu beobachten, *endlich* aber den *kleineren* Theil durch die von ihm in der Coulomb'schen Drehwage ausgeübte elektrische Kraft zu messen, um dadurch auch den entladenen Theil E nach demselben Maasse gemessen zu erfahren.

Zum Gefässe für jene Elektricitätsmenge, deren Theil E nicht unbedeutend sein durfte, wenn seine Entladung eine genau messbare Wirkung auf die Nadel der Tangentenboussole hervorbringen sollte, schien eine *Leidener Flasche*, deren äussere Belegung gut leitend mit der Erde verbunden war, am meisten geeignet. Es wurde also (Art. 6) zunächst *das Verhältniss* erforscht, in welchem sich *die positive Ladung dieser Flasche* zwischen ihr und *einer grossen isolirten Kugel* theilte, wenn letztere mit dem Knopfe der Flasche berührt wurde. Mit Hülfe des *Sinuselektrometers* wurde das Verhältniss $n:1$ bestimmt, in welchem die Ladung der Flasche *vor* Berührung der grossen Kugel zu ihrer Ladung *nachher* stand, woraus sich das Verhältniss $1:(n-1)$ ergab, in welchem die in der Flasche zurückgebliebene Elektricitätsmenge E zu der an die Kugel übergegangenen steht.

Nach einer mehrmals wiederholten genauen Bestimmung dieses *Verhältnisses* wurde zur Messung der nach einer solchen Theilung an die grosse Kugel übergegangenen Elektricitätsmenge fortgeschritten, zu welchem Ende die grosse Kugel, sogleich nach erfolgter Ladung durch

Berührung mit der Leidener Flasche selbst wieder mit der 1 Zoll grossen *Standkugel* einer in grossem Maassstabe ausgeführten *Coulomb'schen Drehwage* berührt wurde. Das Verhältniss, in welchem sich die Elektricität zwischen diesen beiden Kugeln theilt, kann aus dem Verhältniss ihrer Halbmesser berechnet werden, wie Poisson und Plana bewiesen haben. Es ist dies in Artikel 8 geschehen, wonach also aus der auf die *Standkugel der Drehwage* übergegangenen Elektricitätsmenge *e* die Ladung gefunden werden kann, welche die *grosse Kugel* von der Leidener Flasche erhalten hat und mithin auch die in der Leidener Flasche zurückgebliebene, welche zum *Entladungsstrome* verwendet wurde, dessen *magnetische Wirkung* beobachtet werden sollte.

Die Elektricitätsmenge *e* wurde aber gemessen, nachdem die *Standkugel* der Coulomb'schen Drehwage, in der sie enthalten war, mit der gleich grossen *beweglichen Kugel* berührt und dadurch *e* zwischen diesen beiden Kugeln gleich getheilt worden war. Es wurde nämlich sodann (Artikel 7) aus Beobachtungen über die allmählige Abnahme der Torsion, welche erforderlich war, um die beiden Kugeln in einer *bestimmten Entfernung* von einander zu erhalten, diejenige Torsion berechnet. welche im ersten Augenblicke erforderlich gewesen sein würde, wenn in demselben die Ladung der grossen Kugel durch die Leidener Flasche, der Standkugel durch die grosse, und der beweglichen durch die Standkugel mit der Beobachtung der Torsion zugleich hätte geschehen können. — Artikel 9 findet man diejenige *Elektricitätsmenge* ε berechnet, welche, zwischen den beiden Kugeln der Drehwage gleich getheilt, bei der nämlichen Entfernung die *Einheit des Drehungsmoments* auf die Wage ausüben würde, wobei auf die ungleichförmige Vertheilung der Elektricität auf den Kugeloberflächen Rücksicht genommen werden musste. — Artikel 10 findet man aus verschiedenen Beobachtungen diejenige *Torsion* der Drehwage bestimmt, die ebenfalls die *Einheit des Drehungsmoments* auf die Wage ausüben würde. — Mit Hülfe der in Art. 9. 10 enthaltenen Bestimmungen liess sich dann leicht aus der in Art. 7 gefundenen Torsion die Elektricitätsmenge *e* selbst bestimmen und mithin auch die, welche in der Leidener Flasche zurückgeblieben war, was Artikel 11 geschehen, wo die letztere mit E' bezeichnet worden ist, um sie von der zum Entladungsstrome, dessen magnetische Wirkung bestimmt werden sollte, verwendeten Elektricitätsmenge E zu unterscheiden. — In der kurzen Zwischenzeit von dem Augenblicke der Theilung

bis zum Augenblicke der Entladung der in der Leidener Flasche zurückgebliebenen Elektricität ändert sich nämlich die Ladung der Flasche ein wenig theils durch den Elektricitätsverlust an die Luft, theils durch eine Änderung des *Rückstands* in der Flasche, und obschon diese Änderung bei einer so kurzen Zwischenzeit von etwa nur 3 Secunden und bei der vortrefflichen Qualität der zu diesen Versuchen ausgewählten Flasche äusserst geringfügig war, so ist sie doch Art. 12 in Rechnung gezogen, woraus man wenigstens ersehen wird, wie bei andern Flaschen und bei längeren Zwischenzeiten die Änderung $E - E'$ zu bestimmen sein würde.

Mit Hülfe der S. 233 erwähnten, in Artikel 13 enthaltenen, Bestimmung von τ ist endlich Artikel 14 die Grösse $\frac{1}{2\tau} . E$ berechnet, und damit die oben gestellte Aufgabe gelöst. Die folgenden Artikel enthalten grossentheils *Anwendungen*, zu denen auch die Bestimmung der mehrmals erwähnten *Constante c* gehört.

Die beiden *Anhänge* enthalten eine genauere Beschreibung der *Drehwage* und der *Tangentenboussole;* die des *Sinuselektrometers* siehe Poggendorffs Annalen 1853. Bd. 88.

Aus der befriedigenden Übereinstimmung aller ohne Auswahl mitgetheilten Versuche (von denen die in Art. 6. 7 am schwierigsten auszuführen waren) lässt sich abnehmen, dass das Resultat auf 1 bis 2 Procent als genau betrachtet werden darf. Die Rechnung ist auf noch kleinere Bruchtheile genau geführt worden, damit die Bestimmung der Unsicherheit des Resultats blos von der Grösse der unvermeidlichen Beobachtungsfehler abhänge.

6.

Bestimmung des Verhältnisses, nach welchem sich die Elektricität zwischen der inneren Belegung einer Leidener Flasche und einer grossen Kugel theilt, während die äussere Belegung der Flasche mit der Erde verbunden ist.

Die folgende Tafel giebt die Resultate zweier mit dem *Sinuselektrometer* ausgeführten Beobachtungsreihen über die Abnahme der Ladung einer Leidener Flasche durch Mittheilung an eine grosse ungeladene Kugel, welche mit dem Knopfe der Flasche berührt wurde, während die äussere Belegung der Flasche mit der Erde gut leitend verbunden war.

Die Leidener Flasche war vorher mit dem Sinuselektrometer durch einen Leitungsdraht verbunden worden, dessen Ende in einer kleinen, am Knopfe der Flasche angebrachten, Vertiefung lag. Dieses Ende des

Leitungsdrahts wurde, nachdem der Stand des Sinuselektrometers beobachtet worden, an einem seidenen Faden in die Höhe gehoben und darauf die grosse Kugel mit dem Knopfe der Flasche berührt, wobei die äussere Belegung der Flasche mit der Erde immer in leitender Verbindung erhalten wurde. Bei 2-, 3-, 4maliger Berührung folgten die einzelnen Berührungen so schnell auf einander, als die jedesmal dazwischen auszuführende vollständige Entladung der grossen Kugel es gestattete. Wurde dann das Sinuselektrometer, welches in der Zwischenzeit nur einen geringen Verlust an die Luft erlitten hatte, durch den am seidenen Faden isolirt gehaltenen Leitungsdraht wieder mit der Flasche verbunden, so wurde die in Ruhe befindliche Elektrometernadel dadurch nur in sehr geringe Schwankung gebracht, weil die Flasche von ihrer Ladung durch Berührung der Kugel verhältnissmässig wenig verliert und weil dieser Verlust näherungsweise durch den verhältnissmässig noch geringeren Verlust an die Luft, welchen die Flasche im Vergleich mit dem Sinuselektrometer erleidet, ausgeglichen wird, woraus sich die Kürze der Zeit erklärt, in welcher, namentlich gegen das Ende jeder Versuchsreihe, die einzelnen Messungen bewerkstelligt werden konnten.

Genaue Zeitbestimmungen für die Augenblicke aller einzelnen Berührungen liessen sich nicht machen, und es beruhen daher die Angaben, welche die folgende Tafel darüber enthält, auf blosser Schätzung, die jedoch auf 1—2 Secunden als zuverlässig betrachtet werden darf, eine Genauigkeit, die hiebei vollkommen genügte. Beide Reihen wurden am 2. April 1854 im physikalischen Institut in Göttingen gemacht.

Nr.	Erste Reihe.		
	Zeit	Sinuselektrometer Ablenkung der Nadel	n
1.	8ʰ 49′ 54″	32° 36′,2	
2.	50′ 0″	(4malige Berührung)	1,0324
3.	51′ 25″	24° 13′,7	
4.	53′ 46″	23° 31′,3	
5.	53′ 52″	(4malige Berührung)	1,0299
6.	54′ 42″	17° 45′,6	
7.	58′ 56″	14° 49′,3	
8.	59′ 2″	(4malige Berührung)	1,0167
9.	59′ 55″	12° 47′,6	
10.	9ʰ 2′ 7″	12° 34′,3	
11.	2′ 13″	(4malige Berührung)	1,0325
12.	2′ 50″	9° 41′,7	
13.	4′ 12″	9° 41′,7	

14.	4′ 18″	(4malige Berührung)	1,0355
15.	4′ 53″	7° 21′3	
16.	7′ 22″	7° 30′2	
17	7′ 28″	(4malige Berührung)	1,0311
18.	8′ 9″	5° 51′2	
19.	10′ 7″	4° 48′3	
20.	10′ 13″	(4malige Berührung)	1,0305
21.	10′ 51″	4° 32′9	

Nr.	Zweite Reihe.		
	Zeit	Sinuselektrometer Ablenkung der Nadel	n
1.	9^h 40′ 7″	46° 30′5	
2.	41′ 57″	44° 9′0	
3.	42′ 0″	(1malige Berührung)	1,0330
4.	42′ 23″	40° 23′9	
5.	44′ 0″	39° 10′5	
6.	44′ 3″	(1malige Berührung)	1,0308
7.	44′ 23″	36° 15′7	
8.	46′ 24″	35° 11′7	
9.	46′ 27″	(1malige Berührung)	1,0379
10.	46′ 51″	32° 24′6	
11.	48′ 24″	32° 46′6	
12.	48′ 27″	(1malige Berührung)	1,0490
13.	48′ 51″	29° 21′1	
14.	51′ 41″	28° 31′0	
15.	51′ 44″	(1malige Berührung)	1,0390
16.	52′ 9″	26° 14′2	
17.	52′ 52″	26° 14′2	
18.	52′ 55″	(1malige Berührung)	1,0375
19.	53′ 25″	24° 14′7	
20.	58′ 30″	19° 41′9	
21.	58′ 33″	(1malige Berührung)	1,0303
22.	59′ 1″	18° 27′6	
23.	10^h 5′ 52″	17° 42′6	
24.	5′ 56″	(2malige Berührung)	1,0328
25.	6′ 28″	15° 30′1	
26.	7′ 14″	15° 30′1	
27.	7′ 19″	(3malige Berührung)	1,0338
28.	7′ 45″	12° 38′7	
29.	10′ 13″	12° 38′7	
30.	10′ 19″	(4malige Berührung)	1,0315
31.	11′ 27″	9° 50′0	
32.	12′ 44″	9° 50′0	
33.	12′ 50″	(4malige Berührung)	1,0292
34.	13′ 27″	7° 47′8	

In dieser Tafel ist in der *letzten* Columne unter n das *Verhältniss* angegeben, in welchem die Ladung der Flasche vor der Berührung mit der Kugel zu der Ladung nach der Berührung stand, allemal für den Augenblick der Berührung aus den beiden unmittelbar vorher und nachher gemachten, in der *zweiten* und *dritten* Columne enthaltenen, Beobachtungen nach folgender Regel berechnet:

$q_{\prime\prime}q_{\prime\prime}$ und $q_{\prime}q_{\prime}$ bezeichne den Sinus der beobachteten Ablenkung für die beiden vorhergegangenen Beobachtungszeiten,

$q'q'$ und $q''q''$ den Sinus der beobachteten Ablenkung für die beiden nachfolgenden Beobachtungszeiten,

$-t_{\prime\prime}$, $-t_{\prime}$, t', t'' die zugehörigen Beobachtungszeiten vom Augenblick der Berührung an gerechnet,

m die Zahl, wie oft die Berührung wiederholt wird;

so ist

$$n = \sqrt[m]{\frac{t''-t'}{t_{\prime\prime}-t_{\prime}} \cdot \frac{t_{\prime\prime}q_{\prime}-t_{\prime}q_{\prime\prime}}{t''q'-t'q''}} \text{ *)}$$

---

*) Aus den Beobachtungen der Ablenkung der Nadel in der dritten Columne und der Zeit in der zweiten Columne ergeben sich unmittelbar die Werthe von $q_{\prime\prime}$, $q_{\prime}$, q', q'' und die zugehörigen Werthe von $-t_{\prime\prime}$, $-t_{\prime}$, t', t'', aus denen die Werthe von q_0 und q^0 berechnet werden sollen, welche für den Augenblick unmittelbar vor und nach der Berührung gelten. Die angeführte Regel ergiebt sich auf folgende Weise:

1) Für die kurze Zeit der Versuche genügt es, den Verlust an die Luft der Zeit und der Ladung im Augenblicke der Beobachtung proportional anzunehmen, wonach man also für die vier auf den Augenblick der Berührung reducirten Beobachtungen folgende Werthe erhält:

$$(1-\alpha t_{\prime\prime})\, q_{\prime\prime}\,,\quad (1-\alpha t_{\prime})\, q_{\prime}\,,\quad (1+\alpha t')\, q'\,,\quad (1+\alpha t'')\, q''\,.$$

2) Fügt man jedem dieser Werthe den jedesmaligen Rückstand der Flasche hinzu, so müssen die beiden ersten, welche die *ganze Ladung vor der Berührung* darstellen, gleich sein, und eben so die beiden letzten, welche die *ganze Ladung nach der Berührung* darstellen; man erhält also, wenn man den Rückstand zur Zeit t mit r_t bezeichnet, die Gleichungen

$$(1-\alpha t_{\prime\prime})\, q_{\prime\prime} + r_{-t_{\prime\prime}} = (1-\alpha t_{\prime})\, q_{\prime} + r_{-t_{\prime}} = q_0 + r_0$$
$$(1+\alpha t')\, q' + r_{t'} = (1+\alpha t'')\, q'' + r_{t''} = q^0 + r^0$$

Es kann aber der Rückstand *vor* und *nach* der Berührung (siehe Art. 12) dargestellt werden durch

$$r_t = \sigma\left(1-e^{-\gamma(\theta_0+t)^\delta}\right).(q_0+r_0)\,,\quad r_t = \sigma\left(1-e^{-\gamma(\theta^0+t)^\delta}\right).(q^0+r^0)$$

Im Augenblicke der Berührung bleibt der Rückstand unverändert, also $r_0 = r^0$. Hieraus ergiebt sich leicht, dass *für kleine Werthe von t vor* und *nach* der Berührung

$$r_t = r_0 + at\,,\quad r_t = r_0 + a't$$

gesetzt werden kann, wo a und a' zwei aus den Beobachtungen zu bestimmende Coefficienten bezeichnen. — Durch Substitution dieser Werthe in obige Gleichungen, worin man zugleich αq_0 für $\alpha q_{\prime\prime}$ und $\alpha q_{\prime}$ setzen darf; und ebenso αq^0 für $\alpha q'$ und $\alpha q''$, er-

Es sind nun zwar in diesen beiden Beobachtungsreihen einige Beobachtungen weniger gelungen, was bei dem Zusammenwirken dreier Beobachter fast unvermeidlich ist, und man könnte sich dadurch veranlasst finden, einige Werthe von n ganz zu verwerfen, z. B. die unter Nr. 8 in der ersten Reihe und unter Nr. 12, 15, 33 in der zweiten Reihe angeführten; es ergiebt sich aber, dass die Ausscheidung dieser Werthe auf die Bestimmung des Mittelwerths von n keinen erheblichen Einfluss hat; denn man findet *mit* und *ohne* Ausscheidung den Mittelwerth

$$n = 1{,}03282\,,\quad n = 1{,}03297\,.$$

Eine ähnliche mit derselben Flasche und Kugel früher in Marburg ausgeführte Beobachtungsreihe hatte folgenden Mittelwerth für das Verhältniss n ergeben:

$$n = 1{,}03263.$$

Hienach soll nun künftig das gesuchte Verhältniss

$$n = 1{,}03276$$

angenommen werden. — Aus diesem Verhältnisse der Ladung der Flasche *vor* und *nach* Berührung der grossen Kugel ergiebt sich endlich auch *das Verhältniss der Theilung der Elektricität zwischen der Flasche und der grossen Kugel im Augenblicke ihrer Berührung,*

$$= 1 : 0{,}03276.$$

7.

Correspondirende Beobachtungen der Ablenkung der Tangentenboussole, welche von der durch den Multiplicator fliessenden Elektricitätsmenge E hervorgebracht wird, und der Torsion der Coulomb'schen Drehwage, durch welche die beiden mit der Elektricitätsmenge e geladenen Kugeln in gleicher Entfernung wie die ungeladenen erhalten werden.

Zur besseren Veranschaulichung der schon Art. 5 erwähnten Versuche diene die Fig. 1 dargestellte Anordnung der dabei gebrauchten Instrumente.

---

hält man:

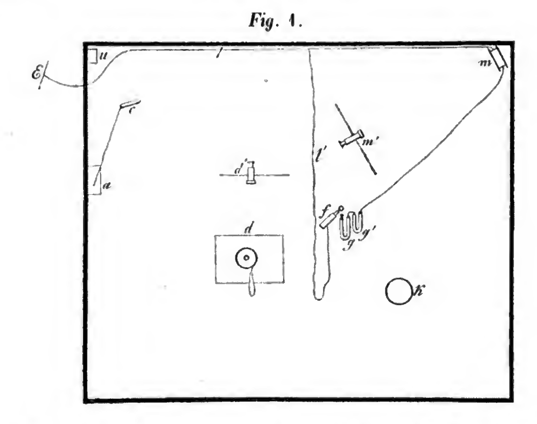
$$q_0 = q_{,} - (a + \alpha q_0)\, t_{,} = q_{,,} - (a + \alpha q_0)\, t_{,,}$$
$$q^0 = q' + (a' + \alpha q^0)\, t' = q'' + (a' + \alpha q^0)\, t''$$

folglich

$$q_0 = \frac{t_{,,} q_{,} - t_{,} q_{,,}}{t_{,,} - t_{,}} \qquad\qquad q^0 = \frac{t'' q' - t' q''}{t'' - t'}$$

$$n = \sqrt[m]{\frac{q_0}{q^0}} = \sqrt[m]{\frac{t'' - t'}{t_{,,} - t_{,}} \cdot \frac{t_{,,} q_{,} - t_{,} q_{,,}}{t'' q' - t' q''}}\,.$$

Fig. 1.



Bei *m* ist die *Tangentenboussole* aufgestellt, deren Multiplicatordraht mit seinem einen Ende durch den Leitungsdraht *l* und eine daran gelöthete in nasser Erde vergrabene Platte *E* mit der Erde verbunden war, während er mit seinem andern Ende durch die Luft zu den langen mit Wasser gefüllten *U*förmigen Glasröhren *g* und *g'* geführt war; *m'* stellt Skala und Fernrohr zur Beobachtung der mit Spiegel versehenen Nadel der Tangentenboussole dar.

Bei *d* ist die *Coulomb'sche Drehwage* aufgestellt, welche am Ende der Abhandlung, Anhang I, genauer beschrieben werden wird; *d'* stellt Skala und Fernrohr zur Beobachtung des Standes der Drehwage dar. Es war nämlich am Torsionsdrahte unter dem Arme, welcher die bewegliche Kugel trug, ein lang herabhängendes Schellackstäbchen befestigt, das an seinem Ende einen Spiegel trug, auf welchen das Fernrohr gerichtet war. — Bei *k* hängt die grosse Kugel an einem seidenen Faden von der Decke des Zimmers herab. *l'* ist eine Abzweigung des Leitungsdrahts *l*, um die äussere Belegung der Flasche *f* mit der Erde zu verbinden. — Bei *u* ist die Uhr, bei *a* eine Klappe in der Decke des Zimmers, durch welche von dem Conductor einer in dem oberen Zimmer befindlichen Elektrisirmaschine ein Draht zu dem kleinen Conductor *c* herabgeleitet war, um daran die Flasche *f* zu laden.

Nachdem die Flasche *f* geladen und an dem Drahte *l'* durch eine

Klemmschraube befestigt war, wurde mit ihrem Knopfe die grosse Kugel *k* berührt. Die bei dieser Berührung in der Flasche zurückbleibende freie Elektricitätsmenge werde mit E' bezeichnet. Nach 3 Secunden, wo E' durch Elektricitätsverlust an die Luft und Rückstandsbildung in E übergegangen ist, wird der Knopf der Flasche *f*, wie Fig. 1 angedeutet ist, mit einem aus der *U*förmigen Röhre *g* hervorragenden metallenen Knopfe berührt, und der Beobachter am Fernrohr m' der Tangentenboussole *m* beobachtet die erste Elongation der Magnetnadel, welche von dem durch den Multiplicator gehenden Entladungsstrom der Elektricitätsmenge E hervorgebracht wird.

Unmittelbar nach Entladung der Flasche *f* wurde die in Bereitschaft gehaltene Standkugel der Coulomb'schen Drehwage an der Kugel *k* geladen und schnell in die Drehwage eingesetzt; die Kugel *k* selbst aber wurde darauf sogleich entladen.

Hierauf wurde in kurzen Zwischenzeiten mehrmals die Torsion gemessen, welche nöthig war, um die beiden Kugeln in ihrer Stellung zu erhalten, bei welcher die beiden von der Drehungsaxe zu den Kugelmittelpunkten gezogenen Radien einen rechten Winkel bildeten. Aus der allmähligen Abnahme dieser Torsion liess sich dann nach dem Coulomb'schen Gesetze, dass bei arithmetisch wachsender Zeit die Ladung geometrisch abnimmt,*) diejenige Torsion *berechnen*, welche statt gefunden haben würde, wenn in dem Augenblicke, wo die grosse Kugel *k* durch die Flasche *f* geladen wurde, auch schon die beiden Kugeln der Drehwage hätten geladen und eingestellt werden können. In der folgenden Tafel ist die bei jeder Nummer zuerst bemerkte Torsion die auf diese Art *berechnete;* aus ihr wird in Artikel 11 die Elektricitätsmenge *e* bestimmt werden, welche von der grossen Kugel *k* auf die Standkugel der Drehwage in dem Augenblicke ihrer Berührung übergegangen war.

---

*) Durch eine Versuchsreihe, bei welcher die Standkugel zwischen den einzelnen Torsionsbestimmungen bald ausserhalb, bald innerhalb des Gehäuses der Drehwage sich befunden hatte, war constatirt worden, dass der Elektricitätsverlust an die Luft innerhalb des Gehäuses und ausserhalb gleich war, wie es bei der Grösse des Gehäuses wohl erwartet werden konnte. Wäre dies nicht der Fall gewesen, so würde die oben erwähnte Anwendung des Coulomb'schen Gesetzes nicht unmittelbar zulässig gewesen sein, weil sich die Standkugel einige Augenblicke ausserhalb des Gehäuses befunden hatte, ehe sie in die Drehwage eingesetzt werden konnte.

In der letzten Columne der folgenden Tafel, welche mit $\frac{A}{\sqrt{T}}$ überschrieben ist, sind die Quotienten der in Skalentheilen ausgedrückten Ablenkung der Magnetnadel in der Tangentenboussole dividirt durch die Quadratwurzel der in Minuten ausgedrückten Torsion der Drehwage beigefügt. — Der Abstand des Spiegels von der Skala der Tangentenboussole war

$$= 6437\tfrac{1}{2} \text{ Skalentheile.}$$

Nr.	Zeit	Tangentenboussole Ablenkung in Skalenth. $= A$	Drehwage Torsion in Min. $= T$	$\frac{A}{\sqrt{T}}$
1.	8^h 11′ 8″	73,5	175,3	5,55
	16′ 13″		152,4	
	21′ 16″		136,1	
	26′ 35″		118,3	
	32′ 32″		99,9	
2.	8^h 37′ 8″	80,0	237,1	5,20
	42′ 4″		208,7	
	45′ 14″		189,1	
	50′ 10″		165,3	
	54′ 40″		148,1	
3.	9^h 0′ 37″	96,5	332,9	5,29
	5′ 14″		297,5	
	9′ 19″		270,6	
	14′ 11″		238,5	
	18′ 10″		218,3	
4.	9^h 31′ 14″	91,1	265,1	5,59
	35′ 17″		249,2	
	41′ 1″		226,2	
	47′ 43″		201,1	
	55′ 0″		178,0	
5.	10^h 1′ 46″	97,8	332,4	5,36
	6′ 24″		306,0	
	10′ 54″		280,4	
	16′ 31″		251,1	
	22′ 4″		228,6	

8.

Berechnung des Verhältnisses der beiden Elektricitätsmengen E' : e.

Der Halbmesser der grossen Kugel war

$$a = 159,46 \text{ Millimeter,}$$

der Halbmesser der Standkugel in der Coulomb'schen Drehwage war

$$ba = 11{,}537 \text{ Millimeter.}$$

Setzt man nun das Verhältniss, nach welchem sich die nach Art. 6 von der Flasche der ersten Kugel mitgetheilte Elektricität $= 0{,}03276\,E'$ bei der Berührung der letztern theilt,

$$(0{,}03276\,E' - e) : e = A : bbB;$$

so ist nach Plana (*Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface de deux sphères conductrices. Turin*, 1845. *page* 64. 66)

$$\frac{B}{h} = \frac{1}{1+b} + \frac{1}{(1+b)^2}\left\{k_2 + \frac{b}{1+b}k_3 + \frac{bb}{(1+b)^2}k_4 + \frac{b^3}{(1+b)^3}k_5 \ldots\right\},$$

und, wenn $\frac{b}{1+b} = \mathrm{a}$ gesetzt wird,

$$\frac{A}{h} = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{a}^2}{1-\mathrm{aa}} + \frac{\pi\mathrm{a}}{2}\cot\pi\mathrm{a} + \mathrm{a}^3 k_3 + \mathrm{a}^5 k_5 + \mathrm{a}^7 k_7 \ldots$$

wo $k_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \ldots$

Hieraus ergiebt sich für die angeführten Werthe das gesuchte Verhältniss

$$(0{,}03276\,E' - e) : e = A : bbB = 1 : 0{,}0079377;$$

folglich

$$E' : e = 3876 : 1.$$

9.

Berechnung derjenigen Elektricitätsmenge ε, mit welcher die beiden Kugeln der Coulomb'schen Drehwage geladen sein müssen, um durch ihre Abstossung die Einheit des Drehungsmoments auf die Drehwage auszuüben.

Der Halbmesser der Standkugel der Coulomb'schen Drehwage war = 11,537 Millimeter, der Halbmesser der beweglichen Kugel war = 11,597 Millimeter, und es kann daher der mittlere Halbmesser von diesen beiden fast gleichen Kugeln

$$a = 11{,}567 \text{ Millimeter}$$

in folgender Rechnung für beide ohne Nachtheil angenommen werden.

Der Abstand des Mittelpunkts der Standkugel von der Drehungsaxe war ferner = 93,53 Millimeter, der Abstand des Mittelpunkts der beweglichen Kugel von der Drehungsaxe war = 61,7 Millimeter, und beide Mittelpunkte bildeten mit der Drehungsaxe einen rechten Winkel. Hieraus ergiebt sich der Abstand der Mittelpunkte von einander

$$= 112{,}05 \text{ Millimeter,}$$

was auch durch directe Messung dieses Abstands bestätigt worden war.

Enthält nun jede der beiden Kugeln die Hälfte der zu bestimmenden Elektricitätsmenge ε, so würde sich, wenn man voraussetzt, *dass*

diese Elektricität auf der Oberfläche jeder Kugel gleichförmig vertheilt sei, aus den bekannten Gesetzen: 1) dass eine auf der Kugeloberfläche gleichförmig vertheilte Elektricitätsmenge auf alle Punkte des äussern Raumes ebenso wirkt, wie wenn sie im Mittelpunkt der Kugel concentrirt wäre, — 2) dass die Abstossungskraft, welche die in einem Punkte concentrirte Elektricitätsmenge auf die in einem andern Punkte concentrirte ausübt, dem Quotienten aus dem Producte beider Elektricitätsmengen dividirt durch das Quadrat ihrer Entfernung gleich ist, — unmittelbar *die Abstossungskraft beider Kugeln* ergeben, nämlich

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\varepsilon\varepsilon}{112,05^2} = \frac{\varepsilon\varepsilon}{50221}.$$

Soll aber diese Abstossungskraft *genau* gefunden werden, so ist obige Voraussetzung nicht zulässig, sondern es muss *die Ungleichförmigkeit der Vertheilung der Elektricität auf der Oberfläche jeder Kugel* bei der gegebenen Grösse und Entfernung derselben genau bestimmt und in Rechnung gebracht werden.

In Poisson's *Mémoire sur la distribution de l'éléctricité à la surface des corps conducteurs (Mémoires de l'Institut. Année 1811. Première partie page* 88) findet man für die *Dichtigkeit* z der Elektricität auf der Oberfläche einer kleinen Kugel bei grosser Entfernung von einer andern Kugel, wenn die *mittlere* Dichtigkeit auf der erstern Kugel $= B$, auf der letztern $= A$ gegeben ist, folgenden Ausdruck

$$z = B - \frac{3\,aaA}{cc} \cdot \mu_, + \frac{5\,aabA}{2c^3}(1 - 3\mu_,\mu_,),$$

worin b und a die Halbmesser der beiden Kugeln, c den Abstand ihrer Mittelpunkte und $\mu_,$ den Cosinus des Winkels φ bezeichnet, welchen der Halbmesser der erstern Kugel an der betrachteten Stelle mit der Richtung c bildet. — Wendet man diese allgemeine Regel auf den vorliegenden Fall an, so ist

$$A = B$$
$$a = b$$

zu setzen, folglich, wenn für $\mu_,$ sein Werth $\cos\varphi$ geschrieben wird, ist die *Dichtigkeit*

$$z = A\left(1 - \frac{3aa}{cc}\cos\varphi + \frac{5}{2}\frac{a^3}{c^3}(1 - 3\cos\varphi^2)\right).$$

Aus dieser *Dichtigkeit* ergiebt sich nun ferner *der gegen die Kugeloberfläche senkrechte von innen nach aussen gerichtete Druck der Elektricität* an der betrachteten Stelle, nach dem bekannten von Poisson in der an-

geführten Abhandlung bewiesenen Gesetze, wonach der Druck dem Quadrate der Dichtigkeit proportional, oder, bestimmter ausgedrückt, dem Quadrate der Dichtigkeit zz multiplicirt mit der Zahl 2π gleich ist. Jener *Druck* ist also

$$= 2\pi . zz.$$

Zerlegt man sodann diesen *Druck* nach der Richtung der verlängerten Linie c und nach einer darauf senkrechten Richtung, so erhält man *die der verlängerten Linie c parallele Componente*

$$= - 2\pi zz . \cos\varphi.$$

Substituirt man hierin endlich obigen Werth von z, so erhält man *für zwei gleiche Elemente der Kugeloberfläche, deren Verbindungslinie mit der Linie c parallel ist,* für welche also die Werthe von φ einander zu π ergänzen, *zusammengenommen den nach der Richtung* der verlängerten Linie c zerlegten *Druck*

$$= 24 \frac{\pi aa}{cc} AA \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^3}{c^3} (1 - 3\cos\varphi^2)\right) \cos\varphi^2,$$

woraus die der verlängerten Linie c parallele *Druckkraft erstens,* für die beiden Zonen von der Breite $ad\varphi$, welche alle, den beiden sich zu π ergänzenden Werthen von φ angehörige, Elemente der Kugeloberfläche enthalten, durch Multiplication mit der Fläche $2\pi aa \sin\varphi\, d\varphi$,

$$= 48 \frac{\pi\pi a^4}{cc} AA \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^3}{c^3} (1 - 3\cos\varphi^2)\right) \cos\varphi^2 \sin\varphi\, d\varphi$$

zweitens, für die ganze Kugeloberfläche, durch Integration,

$$48 \frac{\pi\pi a^4}{cc} AA \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{a^3}{c^3} (1 - 3\cos\varphi^2)\right) \cos\varphi^2 \sin\varphi\, d\varphi = 16 \frac{\pi\pi a^4}{cc} \left(1 - 2\frac{a^3}{c^3}\right) AA$$

gefunden wird, worin A die *mittlere* Dichtigkeit der Elektricität auf der Oberfläche jeder der beiden Kugeln vom Halbmesser a, folglich

$$4\pi aa . A$$

die auf der Oberfläche jeder Kugel vertheilte *Elektricitätsmenge* bezeichnet.

Nun ist aber die *gesuchte,* auf beide Kugeloberflächen zusammen vertheilte *Elektricitätsmenge* (deren Abstossungskraft die Einheit des Drehungsmoments auf die Drehwage ausüben soll) oben mit ε bezeichnet worden; folglich ist

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon = 4\pi aa . A,$$

woraus

$$A = \frac{\varepsilon}{8\pi aa}.$$

Substituirt man diesen Werth von A, so erhält man die mit der verlängerten Linie c parallel gerichtete *Druckkraft*, d. i. *die Abstossungskraft der beiden Kugeln*,

$$=\frac{1}{4}\left(1-2\frac{a^3}{c^3}\right)\frac{\varepsilon\varepsilon}{cc},$$

oder, wenn man darin für a und c die oben angeführten Werthe

$$a = 11{,}567$$
$$c = 112{,}05$$

setzt,

$$=\frac{\varepsilon\varepsilon}{50331}.\text{*)}$$

Das Product der gefundenen Abstossungskraft beider Kugeln in das von der Drehungsaxe auf die Richtung dieser Kraft, d. i. auf die Linie c, gefällte Perpendikel giebt endlich den Werth des von dieser Abstossungskraft auf die Drehwage ausgeübten *Drehungsmoments*, welches $=1$ sein soll.

Da aber die die Mittelpunkte beider Kugeln verbindende Linie c mit den von beiden Mittelpunkten zur Drehungsaxe gezogenen Horizontallinien ein an der Drehungsaxe rechtwinkeliges Dreieck bilden, so ist das von der Drehungsaxe auf die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks c gefällte Perpendikel gleich dem Producte der beiden Katheten dividirt durch die Hypotenuse, oder, da die beiden Katheten 93,53 und 61,7 Millimeter, $c = 112{,}05$ Millimeter lang sind,

$$=\frac{61{,}7\,.\,93{,}53}{112{,}05} = 51{,}5025 \text{ Millimeter.}$$

Hieraus folgt nun das von der elektrischen Abstossungskraft der beiden Kugeln auf die Drehwage ausgeübte *Drehungsmoment*

$$= 51{,}5025\,.\,\frac{\varepsilon\varepsilon}{50331} = \frac{\varepsilon\varepsilon}{977}.$$

---

*) Es ergiebt sich hieraus, dass die in jeder Kugel enthaltene Elektricität, wegen ihrer ungleichförmigen Vertheilung auf der Oberfläche, nicht im *Mittelpunkte* der Kugel concentrirt gedacht werden darf. — Es ist aber

$$\frac{\varepsilon\varepsilon}{50331} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\varepsilon\varepsilon}{112{,}1743^2},$$

woraus sich also ergiebt, dass die Abstossungskraft der beiden Kugeln dieselbe ist, wie wenn die beiden Hälften der ganzen in ihnen enthaltenen Elektricitätsmenge in zwei Punkten, die 112,1734 Millimeter von einander entfernt sind, concentrirt wären, das heisst, da diese Entfernung um 0,1234 Millimeter grösser ist als der Abstand der Mittelpunkte, in zwei Punkten, die um 0,0617 Millimeter von den beiden Mittelpunkten entfernt liegen.

Es wird also der Forderung, dass das von der elektrischen Abstossungskraft beider Kugeln herrührende *Drehungsmoment*

$$= 1$$

sei, dadurch genügt, dass die in beiden Kugeln zusammengenommen enthaltene *Elektricitätsmenge*

$$\varepsilon = \sqrt{977} = 31{,}25$$

ist. Dieser Bestimmung von ε liegt diejenige Elektricitätsmenge als Einheit zum Grunde, welche auf eine gleiche Elektricitätsmenge in der Einheit der Entfernung, bei relativer Ruhe, die Einheit der Abstossungskraft ausübt.

10.

Berechnung derjenigen Torsion θ, welche der Draht, an dem die Coulomb'sche Drehwage hängt, erhalten muss, um durch seine Torsionskraft die Einheit des Drehungsmoments auf die Drehwage auszuüben.

Das *Drehungsmoment*, welches auf die Drehwage durch eine Torsion des Drahts, an welchem sie hängt, ausgeübt wird, ist bekanntlich der *Torsion* und dem *Torsionscoefficienten* des Drahts proportional, oder, bestimmter ausgedrückt, ist *dem Producte des in Theilen des Halbmessers ausgedrückten Torsionswinkels in die vom Drahte auf die Drehwage ausgeübte Directionskraft gleich.* Es braucht daher nur diese *Directionskraft* bestimmt zu werden, um daraus denjenigen Torsionswinkel θ kennen zu lernen, bei welchem das auf die Drehwage ausgeübte Drehungsmoment der *Einheit* gleich ist.

Die Grösse der vom Drahte ausgeübten Directionskraft ist, nach den bekannten Gesetzen der Elasticität fester Körper, unabhängig von der Grösse und dem Gewicht des am Drahte hängenden Körpers, und es können daher zur Bestimmung der *Directionskraft* des Drahtes andere Körper, statt der Drehwage, am Drahte aufgehangen und beobachtet werden.

Es wurde *erstens* an dem Drahte, statt der Drehwage, eine kreisrunde Messingplatte in ihrem Mittelpunkte horizontal aufgehangen. Diese Messingplatte hatte

191112,4 Milligramm *Masse*

63,95 Millimeter *Halbmesser*.

Zur Verbindung des Drahts mit der Scheibe diente ein kleiner verticaler Cylinder von

2626,0 Milligramm *Masse*
3,25 Millimeter *Halbmesser.*

Es wurde darauf die *Dauer* der Torsionsschwingungen der Platte t beobachtet und

$$t = 47{,}139 \text{ Secunden}$$

gefunden. — Nach den vorhergehenden Angaben war aber *das Trägheitsmoment der schwingenden Platte*

$$K_1 = \tfrac{1}{2} \,.\, 63{,}95^2 \,.\, 191112{,}4 = 390790000,$$

das Trägheitsmoment des kleinen Cylinders

$$K_2 = \tfrac{1}{2} \,.\, 3{,}25^2 \,.\, 2626 = 13868,$$

beide zusammen also

$$K = K_1 + K_2 = 390803868.$$

Aus diesem *Trägheitsmomente* K und aus der beobachteten *Schwingungsdauer* t ergiebt sich nun nach den bekannten Gesetzen solcher Schwingungen der Werth der *Directionskraft* D,

$$D = \frac{\pi\pi K}{tt} = 1735800.$$

Zweitens wurde an dem nämlichen Drahte ein Messingcylinder in seiner Mitte horizontal aufgehangen. Dieser Cylinder hatte

58897,1 Milligramm *Masse*
269,7 Millimeter *Länge*
2,865 Millimeter *Halbmesser.*

Zur Verbindung mit dem Drahte diente derselbe kleine verticale Cylinder, wie bei den vorhergehenden Versuchen. Es wurde darauf die *Dauer* der Torsionsschwingungen dieses Stabs t' beobachtet und

$$t' = 44{,}9537 \text{ Secunden}$$

gefunden. — Nach den vorhergehenden Angaben war *das Trägheitsmoment des schwingenden Stabs*

$$K'_1 = \tfrac{1}{12}(269{,}7^2 + 3 \,.\, 2{,}865^2)\, 58897{,}1 = 357130000,$$

und also *das ganze Trägheitsmoment* mit Einschluss des kleinen verticalen Cylinders

$$K' = 357143868.$$

Es ergiebt sich daher aus diesen Beobachtungen der Werth der *Directionskraft* D,

$$D = \frac{\pi\pi K'}{t't'} = 1744200;$$

folglich im Mittel aus beiden Beobachtungsreihen

$$D = 1740000.$$

Soll nun das Product dieses Werths von D in den nach Theilen des Halbmessers ausgedrückten Torsionswinkel, d. i. das von dem Drahte auf die Drehwage ausgeübte *Drehungsmoment* = 1 sein; so ergiebt sich der Werth des Drehungswinkels oder die gesuchte *Torsion des Drahts* θ gleich dem Winkel, dessen Bogen dem 1740000ten Theile des Halbmessers gleich ist, oder es ist

$$\theta = 0{,}0019757 \text{ Bogenminuten.}$$

11.

Berechnung der Elektricitätsmengen E' und e in den Artikel 7 beschriebenen Beobachtungen.

Bei den in Artikel 7 beschriebenen Versuchen befand sich die Coulomb'sche Drehwage in den nach Nummern unterschiedenen Versuchen für folgende Werthe des Torsionswinkels im Gleichgewichte:

Nr.	Torsionswinkel in Minuten.
1.	175,3
2.	237,1
3.	332,9
4.	265,1
5.	332,4

Das Gleichgewicht der Drehwage beweist aber, dass das vom Drahte auf die Drehwage ausgeübte Drehungsmoment dem von der elektrischen Abstossungskraft der beiden Kugeln herrührenden Drehungsmomente entgegengesetzt gleich war. — Das *erstere* Drehungsmoment wird aber gefunden, wenn man den beobachteten Torsionswinkel mit dem im vorigen Artikel bestimmten Winkel $\theta = 0{,}0019757$ Bogenminuten dividirt, um welchen der Draht gedreht werden musste, um die *Einheit des Drehungsmoments* auf die Drehwage auszuüben. Hienach erhält man die bei den beschriebenen Versuchen von dem Drahte auf die Drehwage ausgeübten *Drehungsmomente*.

Nr.	Drehungsmoment des Drahtes.
1.	88728
2.	120010
3.	168500
4.	134180
5.	168240

Das *letztere* von der elektrischen Abstossungskraft der beiden Kugeln herrührende Drehungsmoment ergiebt sich aus Artikel 9

$$= \frac{ee}{\varepsilon\varepsilon} = \frac{ee}{977},$$

wo *e* die *Elektricitätsmenge* bezeichnet, mit welcher die beiden Kugeln der Drehwage zusammen genommen geladen sind, die man hienach für die angeführten fünf Versuche aus der *Gleichheit* beider Drehungsmomente berechnen kann, wie in folgender Tafel geschehen ist. In der letzten Columne dieser Tafel sind ausserdem noch die aus der Artikel 8 gefundenen Proportion

$$E' : e = 3876 : 1$$

berechneten Werthe von E' beigefügt worden.

Nr.	e	E'
1.	9310	36086000
2.	10828	41970000
3.	12830	49730000
4.	11450	44379000
5.	12821	49693000

12.

Berechnung der Correction, welche durch den Elektricitätsverlust und die Rückstandsbildung in der Leidener Flasche in der von der Theilung der Elektricität bis zur Entladung der Flasche verflossenen Zeit bedingt wird,
$$= E' - E.$$

Die Elektricitätsmenge E', welche nach der Ladung der grossen Kugel in der Leidener Flasche zurückgeblieben war, erfährt während der Zeit von *drei Secunden,* bis zu ihrer Entladung, eine kleine Änderung, theils durch Verlust an die Luft, theils durch Rückstandsbildung. Die dann in der Flasche noch vorhandene Menge E kann aus E' folgendermassen bestimmt werden.

In Poggendorff's Annalen 1854, Bd. 91, findet man eine Methode angegeben, die Bildung des Rückstands in einer Leidener Flasche zu bestimmen. Ist danach Q eine der Flasche plötzlich mitgetheilte Elektricitätsmenge, welche nach t Secunden durch Verlust an die Luft in Q_t übergegangen ist, so hat sich zur Zeit t ein Rückstand r_t gebildet, welcher der Gleichung

$$r_t = p\left(Q_t - Qe^{-\frac{b}{m+1}\cdot t^{m+1}}\right) \tag{I}$$

entspricht. Für die Constanten bei der angewendeten Flasche hatten sich aus früherer Untersuchung die Werthe

$$p = 0{,}04494 \quad b = 0{,}1834$$

ergeben, während $m+1$ die für alle Flaschen gleiche Grösse $= 0{,}4255$ besitzt.

Sind für eine Flasche diese Constanten bestimmt, so kann auch die auf den Elektricitätsverlust an die Luft sich beziehende Constante α leicht gefunden werden. Man theilt der Flasche zu dem Ende durch eine andere Flasche plötzlich eine unbekannte Ladung Q mit und beobachtet mit dem *Sinuselektrometer* zu den Zeiten

$$t_1,\ t_2,\ \ldots\ t_n$$

die disponibele Ladung

$$L_{t_1},\ L_{t_2},\ \ldots\ L_{tn}.$$

Nun ist, wenn ν_t die bis zur Zeit t an die Luft entwichene Elektricitätsmenge bezeichnet,

$$L_t = Q - r_t - \nu_t. \tag{II}$$

Für kleinere Werthe von t kann aber

$$\nu_t = \alpha\,.\,t\,\frac{Q+L_t}{2}$$

gesetzt werden, und wird ausserdem in Gleichung (I) $Q - \nu_t$ für Q_t geschrieben, so erhält man

$$L_t = Q\,(1-\varrho_t) - \alpha\,(1-p)\,t\,\frac{Q+L_t}{2}, \tag{III}$$

worin ϱ_t statt $p\left(1 - e^{-\frac{b}{m+1}t^{m+1}}\right)$ gesetzt ist.

Diese Gleichung soll nun allen Beobachtungen Genüge leisten. Berechnet man ϱ_t für die Zeit der ersten und letzten Beobachtung und setzt diese Werthe nebst den beobachteten Werthen von L_t und t in die Gleichung ein, so erhält man zwei Gleichungen mit den beiden unbekannten Grössen Q und α.

Nachdem nun zur Bestimmung von α der Leidener Flasche in dem Local, wo die früheren Versuche gemacht wurden, plötzlich eine Ladung mitgetheilt worden war, wurden aus den Beobachtungen folgende Resultate erhalten:

t	L_t	ϱ_t
23	0,6676	0,03619
65	0,6576	0,04142
128	0,6483	0,04344
226	0,6389	0.04435

Es ist hierin $L_t = \sqrt{\sin\varphi}$, und φ ist die am *Sinuselektrometer* beobachtete Ablenkung; ϱ_t ist aber aus t und den Constanten der Flasche berechnet. — Durch Combination der ersten und letzten Beobachtung findet man

$$Q = 0{,}6956 \qquad \alpha = 0{,}00017935.$$

Mit diesen Werthen ergeben sich nun aus Gleichung (III) folgende zusammengehörige Werthe von t und L_t:

t	L_t
23	0,6676
65	0,6592
128	0,6506
226	0,6389

welche von den beobachteten Werthen so wenig abweichen, dass der gefundene Werth von α für hinreichend genau gelten kann, um ihn zur Correction von E' zu benutzen. In *drei Secunden* betrug also *der Elektricitätsverlust an die Luft*

0,000538

von der ganzen Ladung E'.

Der in derselben Zeit entstandene *Rückstand* wird auf folgende Weise gefunden.

Unmittelbar vor der Berührung der grossen Kugel, welche t Secunden nach der Ladung der Flasche erfolgte, hatte letztere die disponibele Ladung L_t und einen nicht entladbaren Rückstand r_t. Schreibt man in der Gleichung (I) $Q - \nu_t$ statt Q_t, setzt für ν_t seinen Werth $\alpha \,.\, t \frac{Q+L_t}{2}$ und für Q den aus der Gleichung (III) sich ergebenden Werth, so erhält man den Rückstand zur Zeit t durch die zu dieser Zeit vorhandene disponibele Ladung ausgedrückt,

$$\text{(IV)} \qquad r_t = \frac{\varrho_t - \alpha t\,(p - \frac{1}{2}\varrho_t)}{1 - \varrho_t - \frac{1}{2}\alpha t\,(1 - p)} \,.\, L_t = 6 L_t.$$

Nach der Ladung der Kugel ist in der Flasche (Artikel 6) nur die disponibele Ladung $\frac{1}{n} L_t$, überhaupt also die Elektricitätsmenge $(\frac{1}{n} + 6) L_t$

geblieben. Wie nun die Rückstandsverhältnisse nach dieser partiellen Entladung sich gestalten hängt davon ab, ob der gebildete Rückstand σL_t kleiner, oder eben so gross, oder grösser ist als der Grenzwerth

$$p\left(\frac{1}{n}+\sigma\right)L_t$$

des Rückstands für die noch vorhandene Ladung der Flasche, was wiederum davon abhängt, ob n kleiner, oder eben so gross, oder grösser ist als $\frac{p}{\sigma(1-p)}$.

Bei den vorliegenden Versuchen war t im Mittel nahe 60 Secunden. Setzt man diesen Werth in die Gleichung (IV), so ergiebt sich

$$\sigma = 0{,}04286 \qquad \frac{p}{\sigma(1-p)} = 1{,}0978.$$

Da in Artikel 6 $n = 1{,}03276$, mithin kleiner als $\frac{p}{\sigma(1-p)}$, gefunden worden ist, so geht daraus hervor, dass der Rückstand zu wachsen fortfährt; sein Wachsthum ist aber langsamer als vor der partiellen Entladung, weil der jetzige Grenzwerth dem bereits gebildeten Rückstande näher liegt als der vorherige, und zwar wird die Weiterbildung so vor sich gehen, als ob der vorhandene Rückstand σL_t von der jetzigen Ladung $\left(\frac{1}{n}+\sigma\right)L_t$ erzeugt wäre. Dazu würde es aber einer Zeit bedurft haben, welche sich aus der Gleichung

$$r_t = \sigma L_t = \left(\frac{1}{n}+\sigma\right)L_t \,.\, p\left(1-e^{-\frac{b}{m+1}t^{m+1}}\right), \text{*)}$$

aus welcher

$$\log t = \frac{1}{m+1}\log\left[-\frac{m+1}{b}\log\text{nat}\left(1-\frac{\sigma}{\left(\frac{1}{n}+\sigma\right)p}\right)\right]$$

folgt, $=85{,}9$ Secunden ergiebt.

Von der im Augenblicke nach der Berührung der grossen Kugel vorhandenen Ladung $E' = \frac{1}{n}L_t$ geht also das in *drei Secunden*, bis zur Entladung der Flasche, erfolgende Wachsthum des Rückstands noch verloren, welches durch

$$\left[\left(\frac{1}{n}+\sigma\right)p\left(1-e^{-\frac{b}{m+1}\cdot 88{,}9^{m+1}}\right)-\sigma\right]L_t = 0{,}00010\,.\,L_t,$$

oder, da $L_t = nE'$ ist, durch

*) Diese Gleichung ist der Rückstandsgleichung (I) gemäss gebildet, in welcher statt Q_t jetzt $Q = \left(\frac{1}{n}+\sigma\right)L_t$ gesetzt werden musste.

$$0{,}000103 \,.\, E'$$

bestimmt ist.

Darnach ergiebt sich endlich die gesuchte Correction

$$E' - E = (0{,}000538 + 0{,}000103)\, E' = 0{,}000641 E'$$

und man erhält daher für die im vorigen Artikel angegebenen Werthe E' die corrigirten Werthe E, welche die durch den Multiplicator wirklich entladenen Elektricitätsmengen angeben, wie folgt:

Nr.	E
1.	36060000
2.	41940000
3.	49700000
4.	44350000
5.	49660000

13.

Berechnung der Dauer, welche ein Strom von der Artikel 4 beschriebenen Normalstärke haben muss, um die Artikel 7 beobachteten Ablenkungen der Tangentenboussole hervorzubringen.

Die Artikel 7 angeführten *Ablenkungen der Tangentenboussole* waren *in Skalentheilen* beobachtet worden; durch Division derselben mit dem in Skalentheilen ausgedrückten Halbmesser (oder mit dem doppelten Abstande des Spiegels von der Skale) = 12875, erhält man diese Ablenkungen *in Bogenwerth für den Halbmesser* = 1.

Nr.	Ablenkung in Skalenth.	Ablenkung in Bogenwerth für den Halbm. = 1 φ
1.	73,5	0,0057087
2.	80,0	0,0062136
3.	96,5	0,0074952
4.	91,1	0,0070757
5.	97,8	0,0075962

In den »Elektrodynamischen Maassbestimmungen« II. S. 363 ist bewiesen worden, dass ein Strom von der Stärke = 1, welcher durch eine Multiplicatorwindung geht, deren Halbmesser $= a$ ist, auf ein Theilchen des *nordmagnetischen* Fluidums $+\mu$, oder auf ein Theilchen des *südmagnetischen* Fluidums $-\mu$, welches sich in der Entfernung $= b$ von der Ebene der Multiplicatorwindung befindet, und dessen Projection

auf diese Ebene in der Entfernung $= x$ vom Mittelpunkte liegt, senkrecht gegen die Ebene der Multiplicatorwindung eine *Kraft F* ausübt,

$$F = \pm \frac{2\pi aa\mu}{(aa+bb+xx)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{1 + \frac{3}{4}(3aa - 2bb - 2xx)\frac{xx}{(aa+bb+xx)^2} + \ldots\right\},$$

woraus folgt, dass derselbe Strom auf eine *Nadel,* welche die Theilchen $+\mu$ und $-\mu$ in einer sehr kleinen, der Multiplicatorebene parallelen, Entfernung $= 2\varepsilon$ geschieden enthält, ein *Drehungsmoment D* ausübt,

$$D = \frac{4\pi aa\mu\varepsilon}{(aa+bb+xx)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{1 + \frac{3}{4}(3aa - 2bb - 2xx)\frac{xx}{(aa+bb+xx)^2} + \ldots\right\},$$

wo $2\mu\varepsilon$ das *magnetische Moment* der Nadel oder den *Nadelmagnetismus* bezeichnet.

Von dieser Gleichung lassen sich nun drei verschiedene Anwendungen machen, *erstlich* auf die Artikel 1 für die magnetischen Wirkungen angenommenen *Normalverhältnisse, ferner* auf die *Tangentenboussole mit einfachem Multiplicatorkreise,* und *endlich* auf die zu den vorliegenden Versuchen gebrauchte *Tangentenboussole mit vielfachem Multiplicatorkreise.* Die beiden ersten Anwendungen beweisen nur, dass dieser Gleichung, wie schon a. a. O. bemerkt worden, in Beziehung auf die Stromstärke das in Artikel 1 aus den magnetischen Wirkungen abgeleitete Stromintensitätsmaass wirklich zum Grunde liegt; die letzte Anwendung führt zur Berechnung des *gesuchten Zeitraums* τ.

Wendet man diese Gleichung *erstens* auf die Artikel 1 für die magnetischen Wirkungen eines Stromes angenommenen *Normalverhältnisse* an; so ist $\pi aa = 1$, $b = 0$, $2\mu\varepsilon = 1$, $x = R$ und $\frac{a}{R}$ ein verschwindend kleiner Bruch; es ergiebt sich dann *aus obiger Gleichung* das Drehungsmoment D (ohne dem von der Stromrichtung abhängenden Vorzeichen),

$$D = \frac{1}{R^3} \text{ oder } R^3 D = 1,$$

was also mit der in Artikel 1 für die Stromintensität $= 1$ festgesetzten magnetischen Stromwirkung übereinstimmt. Hieraus folgt, dass obiger Gleichung das in Artikel 1 aus magnetischer Wirkung abgeleitete Stromintensitätsmaass zum Grunde liegt.

Wendet man *zweitens* dieselbe Gleichung auf eine *Tangentenboussole mit einfachem Multiplicatorkreise* vom Halbmesser R an, wo eine kleine Magnetnadel im Mittelpunkte des Kreises, der Kreisebene parallel, nach dem magnetischen Meridian gerichtet ist; so ist $a = R$, $b = 0$, $x = 0$; es ergiebt sich dann *aus obiger Gleichung* das Drehungsmoment, welches vom Strome auf die *im magnetischen Meridiane* befindliche Nadel aus-

geübt wird,

$$D = \frac{4\pi\mu\varepsilon}{R}.$$

Bei einer *Ablenkung* der Nadel vom magnetischen Meridiane $= \varphi$ geht dasselbe in

$$D \cos\varphi = \frac{4\pi\mu\varepsilon}{R} \cdot \cos\varphi$$

über. Bezeichnet T den horizontalen Erdmagnetismus, so ist $-2\mu\varepsilon T \sin\varphi$ das *von der Erde* auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment. Die Summe dieser beiden Momente ist $= 0$, wenn die Nadel bei der *Ablenkung* φ in Ruhe beharrt; folglich ist

$$\frac{2\pi}{R} = T \text{ tang } \varphi \text{ oder } \varphi = \text{arc tang} \frac{2\pi}{RT}.$$

Diese Ablenkung ist aber dieselbe, welche der Artikel 4 beschriebene *Normalstrom* bei einer Tangentenboussole mit einfachem Kreise hervorbringen sollte.

Drittens endlich soll die nämliche Gleichung auf die zu den vorliegenden Versuchen gebrauchte *Tangentenboussole mit vielfachen Multiplicatorkreisen* angewendet und daraus das Drehungsmoment bestimmt werden, welches der eben erwähnte, Artikel 4 beschriebene *Normalstrom*, wenn er durch alle Windungen des Multiplicators hindurchgeht, auf die Nadel ausübt.

Wir betrachten zunächst *eine* Windung des Multiplicators, vom Halbmesser a, deren Ebene von der Meridianebene der Nadel um b absteht. Das von dieser Windung auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment D' wird durch obige Gleichung bestimmt,

$$D' = \frac{4\pi aa\mu\varepsilon}{(aa+bb+xx)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left\{1 + \frac{3}{4}(3aa - 2bb - 2xx)\frac{xx}{(aa+bb+xx)^2} + \ldots\right\},$$

worin, wie bei der vorigen Anwendung, $x = 0$ gesetzt werden könnte, wenn die Länge der Nadel ein sehr kleiner Bruch von dem Durchmesser der Multiplicatorwindung wäre. Nun war zwar bei unsrer *Tangentenboussole* die Länge der Nadel blos 60 Millimeter, während der mittlere Durchmesser der Multiplicatorwindungen 267 Millimeter betrug, was aber noch nicht genügt, um x ganz zu vernachlässigen. Doch genügt es, für x einen Näherungswerth zu setzen, welcher sich darbietet, wenn man im Nadelmagnetismus $= 2\mu\varepsilon$ unter $+\mu$ und $-\mu$ die Menge des nach der *idealen Vertheilung* auf der Oberfläche der Nadel vertheilten nordmagnetischen und südmagnetischen Fluidums versteht, und demgemäss 2ε bestimmt, was dann den Abstand des Schwerpunkts des

nordmagnetischen von dem des südmagnetischen Fluidums bedeutet, so dass $x = \varepsilon$ zu setzen ist. Nach Länge und Beschaffenheit der gebrauchten Nadel kann 2ε nicht sehr von 40 Millimetern verschieden sein, und es kann daher mit hinreichender Genauigkeit

$$x = \varepsilon = 20 \text{ Millimeter}$$

gesetzt werden.

Bezeichnet man sodann mit a' und a'' den inneren und äusseren Halbmesser des Multiplicatorrings und mit $2b'$ die Breite desselben, so ist der Querschnitt des ganzen Rings

$$= 2\,(a'' - a')\,b'.$$

Bezeichnet man ferner denjenigen Theil des Querschnitts, welcher auf die betrachtete Multiplicatorwindung kommt (deren Halbmesser $= a$ war und deren Ebene vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte der Nadel und des Multiplicatorrings um b abstand), mit $da\,.\,db$; so ist das Product dieses Elements des Querschnitts in das von der betrachteten Multiplicatorwindung auf die Boussole ausgeübte Drehungsmoment

$$= \frac{4\pi aa\mu\varepsilon}{(aa+bb+\varepsilon\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}\,.\,da\,db\left\{1 + \frac{3}{4}(3aa - 2bb - 2\varepsilon\varepsilon)\frac{\varepsilon\varepsilon}{(aa+bb+\varepsilon\varepsilon)^2} + \ldots\right\},$$

oder, weil die Glieder, welche die vierte und höhere Potenzen des Bruchs $\frac{\varepsilon}{a}$ enthalten, wegen der Kleinheit dieses Bruchs vernachlässigt werden können,

$$= \frac{4\pi aa\mu\varepsilon}{(aa+bb)^{\frac{3}{2}}}\,.\,da\,db\left\{1 + \frac{3}{4}\,\frac{aa-4bb}{(aa+bb)^2}\,.\,\varepsilon\varepsilon\right\}.$$

Hieraus folgt nun die Summe der Producte des Querschnitts jeder Umwindung in das von derselben ausgeübte Drehungsmoment,

$$4\pi\mu\varepsilon\int_{a'}^{a''} aa\,da\int_{-b'}^{+b'}\frac{db}{(aa+bb)^{\frac{3}{2}}}\,.\left\{1 + \frac{3}{4}\,\frac{aa-4bb}{(aa+bb)^2}\,.\,\varepsilon\varepsilon\right\}$$

$$= 8\pi\mu\varepsilon b'\left\{\log\frac{a''+\sqrt{(a''a''+b'b')}}{a'+\sqrt{(a'a'+b'b')}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''a''+b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a'+b'b')^{\frac{3}{2}}}\right)\,.\,\frac{\varepsilon\varepsilon}{b'b'}\right\}.$$

Durch Division dieses Werthes mit dem Querschnitt des ganzen Rings $= 2\,(a'' - a')\,b'$ erhält man dasjenige Drehungsmoment, welches im Mittel *eine* Multiplicatorwindung auf die Nadel ausübt, woraus durch Multiplication mit der Zahl der Umwindungen n das von dem ganzen, vom *Normalstrome* durchflossenen, Multiplicator auf die Nadel ausgeübte *Drehungsmoment* erhalten wird, nämlich

$$D = \frac{4\pi n\mu\varepsilon}{a''-a'}\left\{\log\frac{a''+\sqrt{(a''a''+b'b')}}{a'+\sqrt{(a'a'+b'b')}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''a''+b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^3}{(a'a'+b'b')^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{\varepsilon\varepsilon}{b'b'}\right\}.$$

Dieses *Drehungsmoment D* mit dem *Trägheitsmomente der Nadel K* dividirt, giebt die angulare Beschleunigung der Nadel durch den gegebenen *Normalstrom*

$$=\frac{D}{K},$$

und diese Beschleunigung multiplicirt mit der im Vergleich mit der Schwingungsdauer der Nadel $= t$ sehr kurzen *Stromdauer* τ giebt die vom *Normalstrome* während seiner kurzen Dauer der Nadel ertheilte *Angulargeschwindigkeit*

$$=\frac{D\tau}{K}.$$

Aus dieser der ruhenden Nadel plötzlich ertheilten Angulargeschwindigkeit wird endlich die *Ablenkung* d. i. *die erste Elongationsweite* φ der dadurch in Schwingung gesetzten Nadel nach bekannten Regeln (siehe »Elektrodynamische Maassbestimmungen« II. S. 348) berechnet, nämlich, wenn die Abnahme der Schwingungsbögen der Nadel durch das Verhältniss zweier auf einander folgender Schwingungsbögen $e^{\lambda} : 1$ gegeben ist,

$$\varphi = \frac{D\tau}{K} \cdot \frac{t}{\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{\left(1+\frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}.$$

Um in dieser Gleichung den Werth des Trägheitsmoments der Nadel K und ihres magnetischen Moments $2\mu\varepsilon$ nicht durch besondere Beobachtungen bestimmen zu müssen, kann man durch Zuziehung der bekannten Gleichung für die Schwingungsdauer beide eliminiren, wobei aber auf die Torsionskraft des Fadens Rücksicht zu nehmen ist. Bezeichnet $1 : \theta$ das Verhältniss der auf die Nadel wirkenden erdmagnetischen Directionskraft, $= 2\mu\varepsilon T$, zu der vom Faden ausgeübten, so ist die Gleichung für die Schwingungsdauer t,

$$\frac{2\mu\varepsilon \, . \, T}{K} = \frac{\pi\pi}{tt} \cdot \frac{1+\frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}}{1+\theta},$$

folglich wenn

$$d = \frac{D}{2\mu\varepsilon} = \frac{2\pi n}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a''+\sqrt{(a''a''+b'b')}}{a'+\sqrt{(a'a'+b'b')}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^{2}}{(a''a''+b'b')^{\frac{3}{2}}} - \frac{a'^{2}}{(a'a'+b'b')^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{\varepsilon\varepsilon}{b'b'} \right\}$$

gesetzt und die vorhergehende Gleichung mit $\frac{D}{2\mu\varepsilon \, . \, T} = \frac{d}{T}$ multiplicirt wird,

$$\frac{D}{K} = \frac{d}{T} \cdot \frac{\pi\pi}{tt} \cdot \frac{1+\frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}}{1+\theta}.$$

Substituirt man diesen Werth in der Gleichung für φ, so erhält man

$$\varphi = \pi \frac{d}{T} \cdot \frac{\tau}{t} \cdot \frac{\sqrt{\left(1+\frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}}{1+\theta} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}$$

und hieraus die gesuchte *Dauer des Normalstromes,*

$$\tau = t \,.\, \frac{\varphi}{\pi} \cdot \frac{T}{d} \cdot \frac{1+\theta}{\sqrt{\left(1+\frac{\lambda\lambda}{\pi\pi}\right)}} \,.\, e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}.$$

Am Multiplicator der hier gebrauchten Tangentenboussole war nun aber durch Messung bestimmt worden

$2\pi a' = 709{,}0$ Millimeter
$2\pi a'' = 965{,}35$ „
$2b' = 72{,}04$ „
$n = 5635$

woraus, mit dem oben erwähnten Werthe von $\varepsilon = 20$ Millimeter, sich der Werth von d ergiebt,

$$d = 262{,}1.$$

Dabei ergiebt sich, dass wenn auch der Werth von ε auf 1 Millimeter unsicher wäre, die Unsicherheit von d doch nur 0,4 auf 262, d. i. nur $\frac{1}{657}$ betragen würde, was nicht in Betracht kommt.

Ausserdem war die Schwingungsdauer der Nadel t, der horizontale Erdmagnetismus am Orte der Tangentenboussole T, das logarithmische Decrement für die Abnahme der Schwingungsbögen λ und das Verhältniss θ der Directionskraft des Fadens zu der vom Erdmagnetismus T herrührenden auf gewöhnliche Weise gefunden worden,

$t = 9{,}244$ Secunden
$T = 1{,}7983$
$\lambda = 0{,}070$
$\theta = \frac{1}{661}$.

Setzt man diese Werthe in die Gleichung für τ ein, so erhält man

$$\tau = 0{,}020921 \,.\, \varphi.$$

Die Werthe, welche sich für φ in den fünf in Artikel 7 beschriebenen Versuchen ergeben, sind im Anfange dieses Artikels zusammen gestellt worden; setzt man sie in die Gleichung für τ ein, so erhält man folgende fünf Resultate für die genannten Versuche.

Nr.	τ
1.	0,0001194
2.	0,0001300
3.	0.0001568
4.	0,0001480
5.	0,0001589

14.

Berechnung der Grösse $\frac{1}{2\tau}.E$.

Es bleibt endlich noch übrig, aus den gefundenen Werthen von E und τ die Werthe von $\frac{1}{2\tau}.E$ zu berechnen. Stellen wir nämlich die correspondirenden Werthe von E und τ aus den beiden vorhergehenden Artikeln in folgender Tafel zusammen,

Nr.	E	τ
1.	36060000	0,0001194
2.	41940000	0,0001300
3.	49700000	0,0001568
4.	44350000	0,0001480
5.	49660000	0,0001589

so ergeben sich daraus folgende fünf Werthe von $\frac{1}{2\tau}.E$, als Resultate der in Artikel 7 beschriebenen fünf Messungen:

Nr.	$\frac{1}{2\tau}.E$.
1.	151000.10^6
2.	161300.10^6
3.	158500.10^6
4.	149800.10^6
5.	156250.10^6

Aus allen Messungen zusammen genommen ergiebt sich also der Mittelwerth:

$$\frac{1}{2\tau}.E = 155370.10^6.$$

Nun bezeichnet aber nach Artikel 5

$$\frac{1}{2\tau}.E:1$$

das Verhältniss, in welchem bei einem constanten Strome, der von gleich grossen in entgegengesetzten Richtungen strömenden Massen positiver und negativer Elektricität gebildet wird, und dessen Intensität dem *magnetischen* Stromintensitätsmaasse gleich ist, die den Querschnitt des Leiters in 1 Secunde passirende *positive Elektricitätsmenge* zu derjenigen steht, welche in einem Punkte concentrirt auf eine gleiche Elektricitätsmenge in 1 Millimeter Abstand eine Kraft ausübt, die der Masse eines Milligramms während einer Secunde die Geschwindigkeit von 1 Milli-

meter in der Secunde ertheilt. Dieses Verhältniss zu bestimmen war die *Aufgabe*, welche, nach Artikel 4, gelöst werden sollte, was hiemit geschehen ist.

15.

Zurückführung des magnetischen, elektrodynamischen und elektrolytischen Maasses der Stromintensität auf mechanisches Maass.

Die Lösung der in Artikel 4 gestellten Aufgabe soll nun aber, nach Artikel 3, benutzt werden, *das magnetische, elektrodynamische und elektrolytische Maass der Stromintensität auf mechanisches Maass zurückzuführen.*

Bei einem constanten Strome, der von gleich grossen in entgegengesetzten Richtungen strömenden Massen positiver und negativer Elektricität gebildet wird, und dessen Intensität dem *mechanischen* Stromintensitätsmaasse gleich ist, soll nach Artikel 2 die den Querschnitt des Leiters in 1 Secunde passirende *positive Elektricitätsmenge* = 1 sein, d. i. gleich derjenigen, welche in einem Punkte concentrirt auf eine gleiche Elektricitätsmenge in 1 Millimeter Abstand eine Kraft ausübt, die der Masse eines Milligramms während einer Secunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Secunde ertheilt.

Zu dieser *Einheit* der positiven Elektricitätsmenge verhält sich aber, nach dem vorhergehenden Artikel, die bei einem Strome von der Intensität des *magnetischen* Strommaasses den Querschnitt in 1 Secunde passirende *positive Elektricitätsmenge* wie

$$155370 \,.\, 10^6 : 1.$$

Da nun die Stromintensitäten den in gleicher Zeit den Querschnitt passirenden Elektricitätsmengen proportional sind, so ergiebt sich hieraus unmittelbar *die Zurückführung des magnetischen Maasses der Stromintensität auf mechanisches Maass;* denn es ist hienach die in gleicher Zeit den Querschnitt passirende Elektricitätsmenge im *magnetischen* Strommaasse

$$155370 \,.\, 10^6 \text{ Mal}$$

grösser als im *mechanischen* Strommaasse, folglich ist nach der angeführten Proportion auch *das magnetische Maass der Stromintensität selbst* $155370 \,.\, 10^6$ *Mal grösser als das mechanische Maass.*

Ferner, da nach Artikel 1 S. 223 das *magnetische* Maass der Stromintensität zum *elektrodynamischen* sich verhält wie $\sqrt{2} : 1$, so ist *das elek-*

trodynamische Maass der Stromintensität 109860 . 10^6 (= 155370 . 10^6 . $\sqrt{\frac{1}{2}}$) *Mal grösser als das mechanische Maass.*

Endlich, da nach Artikel 1 S. 224 das *magnetische* Maass der Stromintensität sich zum *elektrolytischen* verhält wie 1 : 106$\frac{2}{3}$, so ist *das elektrolytische Maass der Stromintensität* 16573 . 10^9 (= 106$\frac{2}{3}$. 155370 . 10^6) *Mal grösser als das mechanische Maass.*

Durch die Zurückführung dieser drei Maasse der Stromintensität auf das mechanische Maass ist die Aufgabe dieser Abhandlung, wie sie Artikel 2 ausgesprochen worden ist, gelöst, und es bleiben nur *die Anwendungen* zu erörtern übrig, welche sich von den gefundenen Resultaten machen lassen.

Anwendungen.

16.

Bestimmung der zur Ausscheidung von 1 Milligramm Wasserstoff aus 9 Milligramm Wasser erforderlichen Elektricitätsmenge.

Die erste Anwendung, welche wir von den gefundenen Resultaten machen können, ist die genaue Bestimmung der zur Ausscheidung von 1 Milligramm Wasserstoff aus 9 Milligramm Wasser erforderlichen Elektricitätsmenge, worüber die von Buff mit Hülfe seiner Tangentenboussole mit langem Leitungsdrahte gefundene und in den »Annalen der Chemie und Physik« Bd. 86 S. 33 mitgetheilte Bestimmung schon in der Note zu Artikel 3 S. 226 angeführt worden ist.

Diese Elektricitätsmenge würde nach Buff hinreichen, eine Batterie von 45480 Leidener Flaschen, jede von 480 Millimeter Höhe und 160 Millimeter Durchmesser, bis zu einer Schlagweite von 100 Millimeter zu laden. Dieser von Buff gegebenen Bestimmung fehlt nur die genauere Angabe derjenigen Elektricitätsmenge, welche eine Leidener Flasche von der beschriebenen Ladung enthält.

Aus den in dieser Abhandlung gefundenen Resultaten ergiebt sich nun, dass die zur Ausscheidung von $\frac{1}{9}$ Milligramm Wasserstoff aus 1 Milligramm Wasser erforderliche Elektricitätsmenge der bei einem constanten Strome von der Intensität des *elektrolytischen* Strommaasses den Querschnitt des Leiters in 1 Secunde passirenden *positiven Elektricitätsmenge* gleich ist. Letztere ist aber, nach Proportion der dem *elektrolytischen* und *magnetischen* Strommaasse entsprechenden Strominten-

sitäten (siehe Art. 1 S. 224), $106\frac{2}{3}$ Mal grösser als die bei einem constanten Strome von der Intensität des *magnetischen* Strommaasses den Querschnitt in 1 Secunde passirende *positive Elektricitätsmenge*, welche nach Artikel 14

$$155370 \,.\, 10^6 \text{ Mal}$$

grösser ist, als die *Einheit* der Elektricitätsmenge, welche in einem Punkte concentrirt auf eine gleiche Menge in 1 Millimeter Abstand eine Kraft ausübt, die der Masse eines Milligramms während einer Secunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Secunde ertheilt.

Hieraus folgt, dass

$9 \,.\, 106\frac{2}{3} \,.\, 155370 \,.\, 10^6 = 149157 \,.\, 10^9$ *Einheiten, wie sie soeben bestimmt worden sind, zur Ausscheidung von 1 Milligramm Wasserstoff aus 9 Milligramm Wasser erforderlich sind.*

Wäre eine solche positive Elektricitätsmenge in einer Wolke, und eine gleiche negative an der senkrecht darunter liegenden Stelle der Erdoberfläche concentrirt, so würde daraus eine Anziehung der Wolke von der Erde sich ergeben, welche, bei 1000 Meter Abstand beider von einander, einem Gewichte von 45000 Centnern (= 2268000 Kilogramm) gleich wäre.

Dividirt man jene Zahl von Einheiten mit der Zahl der Leidener Flaschen der von Buff beschriebenen Batterie = 45480, so erhält man die genaue Angabe derjenigen Elektricitätsmenge, welche 1 Leidener Flasche von der von Buff beschriebenen Ladung enthält, nämlich

$$= 3280 \,.\, 10^6 \text{ Einheiten.}$$

Die geladene Oberfläche einer solchen Flasche enthält aber nach Buff's Beschreibung

$$480 \,.\, 160 \,.\, \pi = 241300 \text{ Quadratmillimeter}$$

folglich war jedes Quadratmillimeter mit

$$13600 \text{ Einheiten}$$

geladen, wodurch die zu einer Schlagweite von 100 Millimeter nach Buff erforderliche Verdichtung oder Condensation der Elektricität in der Flasche bestimmt ist.

17.

Bestimmung der Constanten c.

Nach dem in der ersten Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen aufgestellten Grundgesetze der elektrischen Wirkung,

welches die ***Elektrostatik***, ***Elektrodynamik*** und ***Induction*** zusammen umfasst, wird die Kraft, welche die Elektricitätsmenge e auf die Elektricitätsmenge e' aus der Entfernung r bei der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ und Beschleunigung $\frac{ddr}{dt^2}$ ausübt, durch

$$\frac{ee'}{rr}\left[1-\frac{1}{cc}\left(\frac{dr^2}{dt^2}-2r\frac{ddr}{dt^2}\right)\right]$$

ausgedrückt. Es zerfällt diese Kraft in zwei Theile, wovon man den ersten $=\frac{ee'}{rr}$ die *elektrostatische*, den zweiten $=-\frac{1}{cc}\frac{ee'}{rr}\left(\frac{dr^2}{dt^2}-2r\frac{ddr}{dt^2}\right)$ die *elektrodynamische* Kraft nennen kann. Durch die *Constante* c wird das Verhältniss dieser beiden Kräfte bestimmt; c bedeutet denjenigen Werth der, als gleichförmig vorausgesetzten, relativen Geschwindigkeit, bei welcher die *elektrostatische* Kraft von der *elektrodynamischen* aufgehoben wird. Diese *Constante* c wird nun auf folgende Weise bestimmt.

Artikel 14 ist das Verhältniss $\frac{1}{2r}.E:1$, das heisst *das Verhältniss des magnetischen Maasses der Stromintensität zum mechanischen*, gefunden worden

$$=155370\,.\,10^6:1.$$

In der zweiten Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen Art. 26 S. 261 ist das Verhältniss des *magnetischen* Maasses der Stromintensität zum *elektrodynamischen*

$$=\sqrt{2}:1,$$

und Art. 27 S. 269 das Verhältniss des *elektrodynamischen* Maasses der Stromintensität zum *mechanischen*

$$=c:4$$

angegeben worden, woraus *das Verhältniss des magnetischen Maasses der Stromintensität zum mechanischen* folgt

$$=c\sqrt{2}:4.$$

Die Gleichsetzung dieses Verhältnisses mit dem Artikel 14 gefundenen giebt also

$$c=4\,.\,155378\,.\,10^6\,.\,\sqrt{\tfrac{1}{2}}=439450\,.\,10^6.$$

Aus dieser Bestimmung der *Constanten* c ersieht man also, dass zwei elektrische Massen mit sehr grosser Geschwindigkeit gegen einander bewegt werden müssen, wenn die *elektrodynamische* Kraft die *elektrostatische* aufheben soll, nämlich mit einer Geschwindigkeit von 439 Millionen Meter oder 59320 Meilen[1] in der Secunde, welche die Geschwindigkeit des Lichts bedeutend übertrifft.

1) [illegible] geogr. Meilen. [illegible] 1 geogr. Meile = 7420,439 Meter [illegible] 59222 geogr. Meilen

Die Geschwindigkeit des Lichts ist selbst aber nicht die einer Körperbewegung, sondern die einer Wellenbewegung, während alle uns bekannten Geschwindigkeiten von wirklicher Körperbewegung, auch der Weltkörper, nur sehr kleine Bruchtheile davon bilden. Beachtet man nun dabei, dass das Verhältniss der *elektrodynamischen* Kraft zur *elektrostatischen* dem Quadrate dieses Bruchtheils entspricht, so ergiebt sich, dass die elektrodynamische Kraft gegen die elektrostatische in der Wirklichkeit stets als verschwindend betrachtet werden darf. — Von den Geschwindigkeiten, womit elektrische Fluida in metallenen Leitern sich bewegen, besitzen wir zwar noch keine Kenntniss; doch lässt sich aus verschiedenen Umständen abnehmen, dass die Menge der in diesen Leitern enthaltenen neutralen Elektricität ausserordentlich gross sei; je grösser aber letztere ist, desto kleiner ist die Geschwindigkeit der wirklichen Bewegung, die sich alsdann aus den vorhandenen *Stromintensitätsmessungen* ergiebt. Auch die Geschwindigkeit dieser Bewegungen bildet daher wahrscheinlich nur einen kleinen Bruchtheil von der Geschwindigkeit c.

Es ergiebt sich ferner aus dem gefundenen grossen Werthe der *Constanten c* die interessante Folgerung, dass auch der *Gravitationskraft ponderabeler Körper* ein solcher dynamischer Theil beigefügt werden könnte (wodurch eine grössere Analogie zwischen den Wechselwirkungen *ponderabeler* und *imponderabeler* Körper hergestellt würde), ohne dass dieser dynamische Theil der Kraft den geringsten merklichen Einfluss auf die Bewegungen der Weltkörper äussern würde.

Dass bei der Elektricität die Wirkung der *elektrodynamischen* Kraft nicht immer verschwindet, sondern bei galvanischen Strömen oft sehr augenscheinlich hervortritt, hat seinen Grund blos in der bei der *Neutralisation* positiver und negativer Elektricität statt findenden *vollkommenen Aufhebung aller elektrostatischen Kräfte*, gegen welche jene verschwinden würden. Wo keine solche Neutralisation statt findet, sondern freie Elektricität vorhanden ist, wird immer in der Wirkung dieser freien Elektricität die *elektrostatische* Kraft allein in Betracht kommen. Hieraus erklärt sich, warum nicht alle Versuche zur Begründung des Grundgesetzes der elektrischen Wirkung blos mit *zwei* Massen freier Elektricität ausgeführt werden können, sondern warum einige Versuche mit *zwei Paaren* von elektrischen Massen (Stromelementen), die sich *elektrostatisch neutralisiren*, gemacht werden müssen.

Bei *ponderabelen* Massen, für welche das Gesetz indifferenter Anziehung gilt, kann von *keiner Neutralisation der Massen* die Rede sein.

Anmerkung. Es ist im Anfang dieses Artikels zur Bestimmung der *Constanten c* die Gleichung aufgestellt worden:

$$c = \frac{E}{\pi} \cdot \sqrt{2},$$

worin $\frac{1}{2\pi} \cdot E : 1$ das Artikel 14 gefundene Verhältniss bezeichnet, in welchem bei einem constanten Strome von der Intensität des *magnetischen* Strommaasses die den Querschnitt des Leiters in 1 Secunde passirende *positive Elektricitätsmenge* zu derjenigen steht, welche in einem Punkte concentrirt auf eine gleiche Elektricitätsmenge in 1 Millimeter Abstand eine Kraft ausübt, die der Masse eines Milligramms während einer Secunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Secunde ertheilt. — Zum Beweis dieser Gleichung wurde auf die zweite Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen verwiesen. Die Richtigkeit dieser Gleichung lässt sich aber auch unmittelbar aus dem *Grundgesetz der elektrischen Wirkung* und aus der *Definition des magnetischen Strommaasses* entnehmen. Zu diesem Zwecke braucht man blos die Wechselwirkung zweier gleicher Stromelemente α, α eines geradlinigen Stroms in der Entfernung r zu betrachten, von denen schon in der Note zu S. 224 angeführt ist, dass sie einander mit der Kraft

$$= \frac{\alpha\alpha}{rr} ii$$

abstossen, wenn i nach dem *magnetischen* Strommaasse ausgedrückt wird. Es folgt dies bekanntlich aus dem *Ampère'schen Fundamentalgesetz* und der sich daraus ergebenden Beziehung zwischen *Elektromagnetismus* und *Elektrodynamik.*

Dies vorausgesetzt stelle man sich vor, dass der geradlinige Leiter unseres Stroms in jedem Millimeter langen Stücke die Einheit positiver und negativer Elektricität enthalte. $\frac{1}{2\pi}E$ bezeichnet dann (nach Art. 14) die Zahl der Millimeter, welche beide Elektricitäten nach entgegengesetzter Richtung in der Secunde durchlaufen müssen, wenn

$$i = 1$$

sein soll. Unter diesen einfachen Verhältnissen sind also nicht allein die Elektricitätsmengen in den beiden Stromelementen α, α, deren Entfernung und übrigen Verhältnisse, von denen ihre Abstossungskraft (nach dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung) abhängt, sondern auch die *Grösse dieser Abstossungskraft* selbst gegeben, nämlich, weil $i = 1$ ist,

$$= \frac{\alpha\alpha}{rr}.$$

Es kommt also blos darauf an, diese schon bekannte Abstossungskraft aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung abzuleiten, alsdann wird, weil in diesem Grundgesetze c enthalten ist, ein von c abhängiger Ausdruck jener Kraft erhalten werden, den man dem schon bekannten Werthe nur gleich zu setzen braucht, um c zu finden. Unter den beschriebenen einfachen Verhältnissen lässt sich aber die Abstossungskraft der beiden Stromelemente α, α aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung sehr leicht ableiten; denn zerlegen wir die ganze durch das Grundgesetz gegebene Kraft in zwei Theile, in die *elektrostatische* und *elektrodynamische*

Kraft; so leuchtet von selbst ein, dass die Summe der elektrostatischen Kräfte (wegen der in beiden Stromelementen vorhandenen elektrostatischen Neutralisation) zwischen den beiden Stromelementen Null ist. Ebenso leuchtet ein, dass zwischen den elektrischen Massen beider Stromelemente keine Beschleunigung statt findet, dass also $\frac{ddr}{dt^2}=0$ ist. Hiedurch reducirt sich der allgemeine Ausdruck der elektrischen Wirkung

$$\frac{ee'}{rr}\left[1-\frac{1}{cc}\left(\frac{dr^2}{dt^2}-2r\frac{ddr}{dt^2}\right)\right]$$

in unserem Falle auf

$$-\frac{1}{cc}\frac{ee'}{rr}\frac{dr^2}{dt^2}.$$

Dieser Ausdruck nun, angewendet

1) auf die beiden positiven Massen in den beiden Stromelementen $e=+\alpha$ und $e'=+\alpha$, giebt, da die relative Geschwindigkeit dieser Massen $\frac{dr}{dt}=0$ ist (weil beide mit gleicher Geschwindigkeit in gleicher Richtung bewegt werden) die Abstossungskraft $=0$;

2) dasselbe gilt für die beiden negativen Massen $e=-\alpha$ und $e'=-\alpha$;

3) derselbe Ausdruck aber, angewendet auf die positive Masse $e=+\alpha$ und die negative $e'=-\alpha$, giebt, da die relative Geschwindigkeit dieser Massen $\frac{dr}{dt}=\frac{1}{\tau}.E$ ist (weil sie beide mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2\tau}.E$ in entgegengesetzter Richtung bewegt werden) die Abstossungskraft $=+\frac{1}{cc}\frac{\alpha\alpha}{rr}\cdot\frac{1}{\tau\tau}.EE$;

4) dasselbe gilt für die negative Masse $e=-\alpha$ und die positive $e'=+\alpha$.

Hieraus folgt also die Summe aller Abstossungskräfte der in beiden Stromelementen enthaltenen elektrischen Massen

$$=2.\frac{1}{cc}\cdot\frac{\alpha\alpha}{rr}\cdot\frac{1}{\tau\tau}EE,$$

und wird diese Summe ihrem schon bekannten Werthe $\frac{\alpha\alpha}{rr}$ gleich gesetzt; so ergiebt sich zur Bestimmung von c folgende Gleichung:

$$\frac{\alpha\alpha}{rr}=2.\frac{1}{cc}\cdot\frac{\alpha\alpha}{rr}\cdot\frac{1}{\tau\tau}EE,$$

oder

$$c=\frac{E}{\tau}\cdot\sqrt{2},$$

was zu beweisen war.

18.

Die elektrischen Gesetze mit numerischer Bestimmung der Constanten.

Die in der ersten und zweiten Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen entwickelten elektrischen Gesetze sind folgende:

1) *das Grundgesetz der elektrischen Wirkung*, — wonach die Kraft, welche die elektrische Masse e auf die elektrische Masse e' aus der Entfernung r bei der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ und Beschleunigung $\frac{ddr}{dt^2}$

ausübt, durch

$$\frac{ee'}{rr}\left[1-\frac{1}{cc}\left(\frac{dr^2}{dt^2}-2r\frac{ddr}{dt^2}\right)\right]$$

ausgedrückt wird;

2) *das Fundamentalgesetz der Elektrodynamik,* — wonach die Kraft, welche ein unveränderliches und unbewegtes Stromelement von der Länge α und der Stromintensität i auf ein gleiches Stromelement von der Länge α' und von der Stromintensität i' aus der Entfernung r ausübt, wenn α mit r den Winkel θ, α' mit der verlängerten r den Winkel θ', und α mit α' den Winkel ε bilden, durch

$$\frac{\alpha\alpha'}{rr}\, ii'\,(3\cos\theta\cos\theta'-2\cos\varepsilon),$$

ausgedrückt wird;

3) *das Gesetz der Voltainduction eines unveränderlichen gegen den Leiter bewegten Stromelements,* — wonach die elektromotorische Kraft, welche ein Stromelement von der Länge α und von der Stromintensität i auf ein Leiterelement von der Länge α', welches mit der Geschwindigkeit u bewegt wird, aus der Entfernung r ausübt, wenn α mit r den Winkel θ, α' mit r den Winkel φ, u mit der verlängerten r den Winkel θ', und α mit u den Winkel ε bilden, durch

$$\frac{2\sqrt{2}}{c}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{rr}.\,ui\cos\varphi\,(3\cos\theta\cos\theta'-2\cos\varepsilon)$$

ausgedrückt wird;

4) *das Gesetz der Voltainduction eines veränderlichen, gegen den Leiter unbewegten Stromelements,* — wonach die elektromotorische Kraft, welche ein Stromelement von der Länge α, dessen Stromintensität in der Zeit t gleichförmig um i wächst, auf ein Leiterelement von der Länge α' aus der Entfernung r ausübt, wenn α mit r den Winkel θ, und α' mit der verlängerten r den Winkel θ' bilden, durch

$$-\frac{2\sqrt{2}}{c}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{r}\cdot\frac{i}{t}\cos\theta\cos\theta'$$

ausgedrückt wird;

5) *das Gesetz der Voltainduction einer Gleitstelle,* — wonach die elektromotorische Kraft, welche ein durch die Gleitstelle gehender Strom von der Intensität i bei der Gleitgeschwindigkeit v auf ein Leiterelement von der Länge α' aus der Entfernung r ausübt, wenn v mit r den Winkel θ, α' mit der verlängerten r den Winkel θ' bilden, durch

$$-\frac{2\sqrt{2}}{c}\cdot\frac{\alpha'}{r}\,vi\cos\theta\cos\theta'$$

ausgedrückt wird.

Anm. Die Einheit, in welcher die elektromotorischen Kräfte in (3), (4) und (5) ausgedrückt wird, ist die Differenz der in mechanischem Maasse ausgedrückten Kräfte, welche auf die elektrostatische Einheit positiver und negativer Elektricität in α' wirken. Man bezeichnet diese Einheit als mechanisches Maass der elektromotorischen Kräfte und unterscheidet davon [illegible] magnetischen Maasse der elektromotorischen Kräfte, welches die Differenz der in mechanischem Maasse ausgedrückten Kräfte [illegible] welche auf die magnetische Einheit positiver und negativer Elektricität in α' wirken [illegible]. Da die magnetische Einheit = 155370.10 [illegible] elektrostatischen Einheiten ist (siehe S. [illegible]), so erhält man [illegible]

Ein positiver Werth der Ausdrücke (1) und (2) bedeutet eine Abstossungskraft, ein negativer Werth eine Anziehungskraft. Der Zahlenwerth nach unseren Maassen giebt die Grösse der Kräfte im Verhältniss zu derjenigen Kraft an, welche der Masse eines Milligramms während einer Secunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Secunde ertheilt. In dem Ausdruck (2), sowie in allen folgenden, werden die Stromintensitäten i, i' nach *magnetischem* Maasse gemessen vorausgesetzt, was immer mit der *Tangentenboussole* leicht geschehen kann. Bezeichnet man die *elektrische Capacität* des Leiters α', d. h. das Verhältniss der in ihm enthaltenen positiven Elektricitätsmenge (die der negativen gleich ist) zu seiner Länge, mit ε'; so geben für $\varepsilon' = 1$ die Ausdrücke (3) (4) (5) den Unterschied der beiden Kräfte, welche in der Richtung von α' auf die in α' enthaltene positive und negative Elektricitätsmenge wirken, und zwar geben sie diesen *Kraftunterschied* im Verhältniss zu derjenigen Kraft an, welche der Masse eines Milligramms während einer Secunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Secunde ertheilt. — Ist ε' von 1 verschieden, so müssen die Ausdrücke (3) (4) (5) mit ε' multiplicirt werden, um den angegebenen *Kraftunterschied* zu erhalten.

Eine vollständige Bestimmung aller Kräfte durch die angegebenen Gesetze fordert, dass in allen obigen Ausdrücken für die *Constante c* der im vorigen Artikel gefundene Zahlenwerth gesetzt werde. Man erhält alsdann:

$$(1.)\quad \frac{ee'}{rr}\left[1 - \frac{1}{cc}\left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r\frac{ddr}{dt^2}\right)\right] = \frac{ee'}{rr}\left[1 - \frac{1}{193120\,.\,10^{18}}\left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r\frac{ddr}{dt^2}\right)\right]$$

$$(2.)\quad \frac{\alpha\alpha'}{rr}\,ii'\,(3\cos\theta\cos\theta' - 2\cos\varepsilon)$$

$$(3.)\quad \frac{2\sqrt{2}}{c}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{rr}\,.\,ui\cos\varphi\,(3\cos\theta\cos\theta' - 2\cos\varepsilon)$$
$$= \frac{1}{155370\,.\,10^6}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{rr}\,.\,ui\cos\varphi\,(3\cos\theta\cos\theta' - 2\cos\varepsilon)$$

$$(4.)\quad -\frac{2\sqrt{2}}{c}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{r}\cdot\frac{i}{t}\cos\theta\cos\theta' = -\frac{1}{155370\,.\,10^6}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{r}\cdot\frac{i}{t}\cos\theta\cos\theta'$$

$$(5.)\quad -\frac{2\sqrt{2}}{c}\cdot\frac{\alpha'}{r}\,.\,vi\cos\theta\cos\theta' = -\frac{1}{155370\,.\,10^6}\cdot\frac{\alpha'}{r}\,.\,vi\cos\theta\cos\theta'.$$

Die elektrischen Gesetze in der letzteren Form, *mit numerischer Bestimmung aller Constanten*, genügen allen *praktischen* Forderungen; für *theoretische* Untersuchungen aber kann es in manchen Fällen erforderlich sein, statt der in *magnetischem* Maasse zu messenden Stromintensitäten i, i' in obigen Ausdrücken die aus den *Ursachen* der Stromintensität (siehe Art. 2) abgeleiteten Werthe von i, i' zu setzen. Bezeichnet

nämlich $+ \alpha\varepsilon$ und $- \alpha\varepsilon$ die im Leiter α enthaltene positive und negative Elektricitätsmenge, und $+ u$ und $- u$ ihre Geschwindigkeiten, womit sie im Leiter bewegt werden, bezeichnet ferner $+ \alpha'\varepsilon'$, $- \alpha'\varepsilon'$, $+ u'$ und $- u'$ das nämliche für den Leiter α'; so sind εu und $\varepsilon' u'$ die Werthe der Stromintensitäten nach *mechanischem* Maasse bestimmt, und es müssen diese Werthe, nach dem Artikel 15 gefundenen Verhältnisse, mit $155370 . 10^6$ dividirt werden, um die Werthe derselben Stromintensitäten nach *magnetischem* Maasse ausgedrückt zu erhalten; folglich ist in obigen Ausdrücken

$$i = \frac{\varepsilon u}{155370 . 10^6}, \quad i' = \frac{\varepsilon' u'}{155370 . 10^6},$$

und es können diese Werthe, wenn es erforderlich sein sollte, in obigen Ausdrücken für i und i' substituirt werden.

19.

Anwendung auf Elektrolyse.

Alle elektrischen Kräfte, welche durch die im vorhergehenden Artikel angeführten Gesetze bestimmt werden, sind Kräfte, welche unmittelbar nur auf elektrische Massen wirken. *Alle Kräfte aber, welche unmittelbar nur auf elektrische Massen wirken, wirken mittelbar auch auf die ponderabelen Träger jener elektrischen Massen.* Es wird dadurch der Anwendung der elektrischen Gesetze auf die Untersuchung der ponderabelen Körper ein weites Feld eröffnet; denn die Elektricität wird dadurch für uns zu einem Instrumente, mit dessen Hülfe wir bekannte Kräfte auf ponderabele Körper unter Verhältnissen wirken lassen können, unter denen keine anderen bekannten Kräfte wirken.

Obiger Satz leuchtet von selbst ein, wenn elektrische Massen mit ihrem ponderabelen Träger so verbunden sind, dass sie ohne denselben nicht bewegt werden können. Aber auch in metallischen Leitern, in denen sich die Elektricität bewegen kann, während ihr ponderabeler Träger (das Metall) in Ruhe verharrt, wo also die elektrischen Massen von einem Metalltheilchen zum andern übergehen, findet doch eine Verbindung statt, welche die elektrischen Massen mit den Metalltheilchen verknüpft, und welche gelöst werden muss, ehe die elektrische Masse von dem einen Metalltheilchen zum andern übergehen kann. So lange diese Verbindung besteht, werden alle Kräfte, welche unmittelbar nur auf die elektrischen Massen wirken, doch mittelbar auf die damit ver-

bundenen Metalltheilchen übertragen, und nur diejenigen Kräfte, welche auf die elektrischen Massen wirken, nachdem sie von den Metalltheilchen sich abgelöst haben, werden auf diese Metalltheilchen nicht mehr übertragen, sondern ertheilen den elektrischen Massen, bis sie zu den nächsten Metalltheilchen gelangen, eine bestimmte Geschwindigkeit, die aber durch die Verbindung, in welche jene elektrischen Massen mit diesen nächsten Metalltheilchen treten, wieder aufgehoben wird, was dieselbe Wirkung hat, wie wenn die elektrischen Kräfte, welche jene Geschwindigkeit hervorgebracht hatten, auf diese nächsten Metalltheilchen übertragen worden wären. Alle diese Kräfte, welche aus der Verbindung elektrischer Massen mit einzelnen Metalltheilchen hervorgehen, nennt man *Widerstandskräfte*, welche das Metall der Bewegung der Elektricität in seinem Innern entgegensetzt, aus denen das *Ohm'sche Gesetz* folgt, dass die Elektricität in den metallischen Leitern in einer gleichförmigen Bewegung nur dann beharren kann, wenn sie fortwährend von einer gleich grossen Kraft vorwärts getrieben wird, und dass der Strom augenblicklich verschwindet, sobald die treibende Kraft aufhört. — Es folgt also hieraus, dass auch bei Leitern, durch den *Widerstand* der Leiter, alle Kräfte, welche unmittelbar auf die Elektricität im Leiter wirken, mittelbar auf den Leiter selbst übertragen werden.

In der *Elektrolyse* hat man es nun mit keinem metallischen Leiter zu thun, welcher in Ruhe verharrt, während die elektrischen Fluida sich in ihm bewegen, sondern mit einem aus verschiedenartigen ponderabelen Theilchen zusammen gesetzten Körper (Wasser), von denen die eine Art (Wasserstofftheilchen) der Bewegung der *positiven* Elektricität folgt, die andere Art (Sauerstofftheilchen) der Bewegung der *negativen* Elektricität. Es entsteht also die Frage, woher die Kräfte rühren, welche diese verschiedene Bewegung der beiden Bestandtheile des Wassers hervorbringen? Die elektrolytischen Gesetze beweisen, dass diese Bewegungen, wenn auch keine unmittelbare, doch eine mittelbare Wirkung der elektrischen Kräfte sein müssen. Wenn nun die elektrischen Kräfte unmittelbar nur auf die mit den Wasserstoff- und Sauerstofftheilchen verbundenen elektrischen Massen wirken, so beweist das Faktum, dass die Wasserstofftheilchen der Bewegung der positiven, die Sauerstofftheilchen der Bewegung der negativen Elektricität folgen, dass jene mit freier positiver, diese mit freier negativer Elektricität verbunden im Wasser enthalten sein müssen, wobei es dahin gestellt bleibt, ob sie ausser der

freien Elektricität auch noch eine Quantität neutralen Fluidums enthalten. Es mag auch unerörtert bleiben, wie stark diese Verbindung der Wasserstofftheilchen mit der freien positiven und der Sauerstofftheilchen mit der freien negativen Elektricität im Wasser sei; ob sie so stark sei, dass sie gar nicht gelöst werde, also die Elektricität bei der Elektrolyse sich nur mit ihrem ponderabelen Träger bewege, oder ob sie sich verhalte wie in metallischen Leitern, so dass der Elektricität ausser der Bewegung mit dem ponderabelen Träger auch noch eine von demselben unabhängige Bewegung zukomme. Nur könnte in letzterem Falle das Gesetz der Zersetzung verschiedener zusammengesetzten Körper durch denselben Strom nach Proportion der chemischen Äquivalente keine strenge Gültigkeit haben, wie es nach den neuesten Untersuchungen der Fall zu sein scheint.

Werden nun die elektrischen Kräfte, welche unmittelbar nur die elektrischen Fluida zu scheiden suchen, durch irgend ein Band, was diese Fluida mit den Bestandtheilen des Wassers verbindet, auf diese Bestandtheile übertragen, so kann eine nähere Bestimmung der *chemischen Scheidungskräfte*, welche die Trennung der ponderabeln Bestandtheile hervorbringen, durch die genaue Kenntniss der elektrischen Scheidungskräfte gewonnen werden, und es beruht hierauf das besondere Interesse, welches die Elektrolyse vor andern Methoden der chemischen Zersetzung besitzt. Die Elektricität lässt sich nämlich wie ein Instrument benutzen, durch welches wir an jedes Wasserstoff- und Sauerstofftheilchen im Wasser einen Faden knüpfen und beide Fäden in entgegengesetzter Richtung mit bekannten Kräften spannen können, bis die Wasserstoff- und Sauerstofftheilchen von einander gerissen werden.

Um dieses Instrument zu benutzen und dadurch wirklich die zur Trennung chemisch verbundener Theile erforderlichen Kräfte nach bekannten Maassen zu bestimmen, mussten *die elektrischen Gesetze mit numerischer Bestimmung ihrer Constanten* gegeben sein. Nachdem dies geschehen ist, wollen wir auch diese Anwendung von den gewonnenen Resultaten noch zu machen versuchen.

Die Kräfte, welche die elektrischen Fluida in Strombewegung versetzen, werden *elektromotorische Kräfte* genannt. Diese besondere Benennung (welche zur Unterscheidung *dieser Art von Kräften* und nicht blos ihrer Wirkungen gebraucht wird) hat ihren Grund blos darin, dass diese Kräfte bisher nicht nach bekannten Maassen gemessen,

sondern nur auf indirecte Weise durch die Wirkungen der von ihnen hervorgebrachten Ströme (Wärmewirkungen, chemische und magnetische Wirkungen) bestimmt werden konnten, wodurch sie zwar unter einander verglichen, aber absolut nach keinem bekannten Maasse ausgedrückt und daher auch mit andern bekannten Kräften nicht verglichen werden konnten. Dieser Grund fällt weg, wenn man diese Kräfte nach den im vorhergehenden Artikel angegebenen Gesetzen bestimmt, wodurch sie in bekannten Maassen ausgedrückt werden. Auch diejenigen Kräfte, welche man nicht unmittelbar nach obigen Gesetzen berechnen kann, erhält man in bekannten Maassen ausgedrückt, durch Vergleichung mit jenen. — Da man endlich die Vertheilung des Widerstands in einer geschlossenen Kette genau bestimmen kann und bei einem constanten Strome nach dem Ohm'schen Gesetz elektromotorische Kraft und Widerstand überall in gleichem Verhältniss stehen müssen, so lernt man dadurch auch die Vertheilung der elektromotorischen Kräfte auf die verschiedenen Theile der Kette kennen. Ist also in einer Kette ein Voltameter eingeschaltet, so lassen sich die im Wasser des Voltameters wirkenden elektrischen Scheidungskräfte, durch welche das Wasser zersetzt wird, genau ermitteln.

Es tritt nun aber beim Wasser der besondere Umstand ein, dass es in reinem Zustand einen sehr schlechten Stromleiter bildet und sehr schwer zersetzbar ist. Alle elektrolytischen Messungen beziehen sich daher auf Wasser, was mit Schwefelsäure oder anderen Stoffen vermischt ist: für verschiedene Mischungen erhält man verschiedene Resultate in Beziehung auf Zersetzbarkeit. Es ist daher nothwendig, sich zunächst auf eine bestimmte Mischung zu beschränken, und es soll hier also nach Horsford's in Poggendorffs Annalen 1847, Bd. 70, S. 238, mitgetheilten Untersuchungen eine Mischung von Wasser und Schwefelsäure von 1,25 spec. Gew. gewählt werden, welche unter allen Mischungen von Wasser und Schwefelsäure am leichtesten zersetzt wird.

Der *Widerstand*, welchen diese Mischung dem Strome entgegensetzt, ist von Horsford für gleiche Länge und Querschnitt

696700 Mal

grösser als der Leitungswiderstand des Silbers gefunden worden, oder, wenn man das Leitungsverhältniss von Silber zu Kupfer nach Lenz (Poggendorffs Annalen Bd. 34. 418 Bd. 45. 105) wie 1:0,7417 setzt,

516750 Mal

grösser als der Leitungswiderstand des von Lenz gebrauchten Kupfers. — Nach den in den »Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen« Bd. 5 (Über die Anwendung der magnetischen Induction auf Messung der Inclination mit dem Magnetometer) mitgetheilten Messungen ist der Widerstand eines Kupferdrahts von 1 Millimeter Länge und 1 Milligramm Masse ($= \frac{1}{8,127}$ Quadratmillimeter Querschnitt) nach absolutem Maasse des *magnetischen* Systems

$$= 2310000$$

gefunden worden,*) d. i. für einen Kupferdraht von 1 Millimeter Länge und 1 Quadratmillimeter Querschnitt

$$= 274100.$$

Hieraus ergiebt sich der Widerstand obiger Mischung nach *magnetischem* Widerstandsmaass für 1 Millimeter Länge und 1 Quadratmillimeter Querschnitt

$$= 141640 \,.\, 10^6.$$

Es sind aber in dieser Mischung dem Volumen nach nahe 9 Theile Wasser auf 1 Theil Schwefelsäure enthalten und es kommt daher von dem ganzen Querschnitt nur $\frac{9}{10}$ auf das reine Wasser. Setzt man voraus, dass der ganze Strom blos durch das Wasser geht (weil wenn ein Theil des Stromes durch die Schwefelsäure geleitet würde, dieser einen Nebenstrom bildete, welcher bei Betrachtung der Zersetzung des Wassers ausgeschlossen werden müsste), so würde der Widerstand blos auf Wasser (unter Einfluss der benachbarten Schwefelsäure) bezogen für 1 Milligramm Länge und 1 Quadratmillimeter Querschnitt

$$= 127476 \,.\, 10^6$$

zu setzen sein.

Soll nun aber bei diesem *Widerstande* die Stromintensität nach *magnetischem* Maasse $= 106\frac{2}{3}$ sein, nämlich so stark, dass, nach Art. 1 S. 224 1 Milligramm Wasser in 1 Secunde zersetzt wird, so müsste die elektromotorische Kraft für jedes Millimeter nach *magnetischem* Maasse

$$106\tfrac{2}{3} \,.\, 127476 \,.\, 10^6$$

*) An der angeführten Stelle findet man den Widerstand verschiedener Kupfersorten angegeben, unter denen der obige, dem von Jacobi zu seinem Widerstands-Etalon gebrauchten Kupfer entsprechende, Werth der grösste ist. Dieser Werth ist gewählt worden, weil Lenz, mit Jacobi zu gemeinschaftlichen Arbeiten oft verbunden, sich bei seinen Versuchen wahrscheinlich auch der nämlichen Kupfersorte wie Jacobi bedient hat.

betragen, was mit $\frac{2\sqrt{2}}{c} = \frac{1}{155370 \cdot 10^6}$ zu multipliciren ist, um dieselbe Kraft nach *mechanischem* Maasse ausgedrückt zu erhalten.

Diese Zahl bedeutet nun aber nach dem vorhergehenden Artikel den *Unterschied der Kräfte*, welche in der Richtung des Stroms auf *jede Einheit* der freien positiven Elektricität (in den Wasserstofftheilchen) einer 1 Millimeter langen Wassersäule und auf *jede Einheit* der freien negativen Elektricität (in den darin befindlichen Sauerstofftheilchen) wirken, und diese Zahl muss daher, um die *ganze wirksame Kraft* zu erhalten, noch mit n multiplicirt werden, wenn n Einheiten freier positiver oder freier negativer Elektricität in den Wasserstoff- oder Sauerstofftheilchen der 1 Millimeter langen Wassersäule enthalten sind.

Der Wasserstoff von 1 Milligramm zerlegten Wassers giebt aber an die Elektrode, an der er sich entwickelt, seine freie positive Elektricität ab, welche darauf durch die Elektrode weiter strömt (oder, was in der Wirkung einerlei ist, durch Zuführung von negativer Elektricität daselbst neutralisirt wird,) und den Querschnitt in 1 Secunde durchfliesst. Da nun aber die Stromintensität nach *elektrolytischem* Maasse $= 1$ ist und nach Art. 15 bei dieser Stromintensität $106\frac{2}{3} \cdot 155370 \cdot 10^6$ Einheiten positiver und eben so viel negativer Elektricität durch den Querschnitt in 1 Secunde hindurchgehen, so ergiebt sich (wenn die Hälfte der an der Elektrode frei gewordenen positiven Elektricität durch die Elektrode weiter strömt, während die andere Hälfte von der durch die Elektrode zugeführten negativen Elektricität neutralisirt wird),

$$\tfrac{1}{2} n = 106\tfrac{2}{3} \cdot 155370 \cdot 10^6.$$

Multiplicirt man also obige Zahl mit

$$\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot n = 2 \cdot 106\tfrac{2}{3},$$

so giebt das Product

$$2 \cdot (106\tfrac{2}{3})^2 \cdot 127476 \cdot 10^6$$

den *Unterschied der Kräfte*, welche in der Richtung des Stroms auf die in den Wasserstofftheilchen von 1 Milligramm Wasser, welches eine 1 Millimeter lange Säule bildet, enthaltene freie positive, und auf die in den Sauerstofftheilchen enthaltene negative Elektricität (unter Einfluss der benachbarten Schwefelsäure) wirken müssen, wenn die Zersetzung des Wassers mit der Geschwindigkeit von 1 Milligramm in der Secunde erfolgen soll, und zwar ist dieser *Kraftunterschied* durch obige Zahl im Verhältniss zu derjenigen Kraft bestimmt, welche der Masse eines Mil-

ligramms während einer Secunde die Geschwindigkeit von 1 Millimeter in der Secunde ertheilt.

Das Gewicht eines Milligramms ist eine Kraft, welche der Masse eines Milligramms in 1 Secunde die Geschwindigkeit von 9811 Millimetern in der Secunde ertheilt; dividirt man daher die angegebene Zahl mit 9811, so erhält man jenen *Kraftunterschied* im Milligrammengewicht ausgedrückt

$$= \frac{2}{9811} \cdot (106\tfrac{2}{3})^2 \cdot 127476 \cdot 10^6 = 2 \cdot 147830 \cdot 10^6.$$

Man kann dieses Resultat auf folgende Weise aussprechen: *Wären alle Theilchen Wasserstoff in 1 Milligramm Wasser einer 1 Millimeter langen Säule an einen Faden geknüpft, und an einen andern Faden alle Theilchen Sauerstoff; so müssten beide Fäden in entgegengesetzten Richtungen jeder mit dem Gewicht von*

147830 *Kilogrammen*

oder etwa 2956 *Centnern gespannt werden, um eine Zersetzung des Wassers mit solcher Geschwindigkeit hervorzubringen, nach welcher 1 Milligramm Wasser in der Secunde zerlegt werden würde.* Die Spannung bleibt dieselbe für Säulen von verschiedenem Querschnitt, wächst aber proportional mit der Länge der Säule.

Sollte das Wasser unter gleichen Verhältnissen mit geringerer Geschwindigkeit zerlegt werden, z. B. mit der Geschwindigkeit von 1 Milligramm in 2956 Secunden, so würde obige Spannung proportional kleiner sein, z. B. nur 1 Centner betragen. Überhaupt würde die Spannung hienach beliebig klein sein können, immer würde Zersetzung erfolgen, nur aber mit desto geringerer Geschwindigkeit, je kleiner die Spannung wäre. Doch gilt dies nur unter der Voraussetzung, dass die *Widerstandskraft*, welche das Wasser seiner Zersetzung (der Bewegung des Wasserstoffs und Sauerstoffs in entgegengesetzten Richtungen) entgegensetzt, analog der *Widerstandskraft*, welche nach dem Ohm'schen Gesetze metallische Leiter der Bewegung der positiven und negativen Elektricität in ihrem Innern entgegensetzen, der Geschwindigkeit der Zersetzung proportional sei.*) Es ist aber selbst bei metallischen Leitern sehr wahr-

*) Nach dem Ohm'schen Gesetze ist das Verhältniss der Widerstandskraft, welche ein Leiter der Bewegung der Elektricität in seinem Innern entgegensetzt, zur Geschwindigkeit dieser Bewegung eine *Constante*, welche der *Widerstand* des Leiters genannt wird.

scheinlich, dass das Ohm'sche Gesetz der Wirklichkeit nicht genau entspreche, sondern dass streng genommen die Widerstandskraft aus zwei Theilen bestehe, von denen der eine der Geschwindigkeit proportional, der andere constant ist, weil dadurch allein die besseren Leiter (Metalle) mit den schlechteren (Isolatoren) unter ein gemeinschaftliches Gesetz gebracht werden können. Dasselbe gilt wahrscheinlich auch von der Widerstandskraft, welche das Wasser der Bewegung des Wasserstoffs und Sauerstoffs nach entgegengesetzten Richtungen in seinem Innern entgegensetzt. Der *Widerstand* (die Widerstandskraft dividirt durch die Stromgeschwindigkeit) wird dann durch die Summe einer Constanten w und eines der Stromgeschwindigkeit umgekehrt proportionalen Theils $\frac{k}{i}$ dargestellt. Substituirt man nun diese Summe für den *Widerstand* im Ohm'schen Gesetze, so erhält man die Stromintensität i durch die elektromotorische Kraft E und durch die angegebene Summe auf folgende Weise ausgedrückt:

$$i = \frac{E}{w + \frac{k}{i}},$$

oder

$$E = k + wi.$$

Bei den metallischen Leitern ist k sehr klein gegen die bei den Messungen vorkommenden Werthe von wi; bei den Isolatoren verschwindet wi gegen k.

Sind nun auch keine genauen Versuche über das Wasser vorhanden, aus denen der Werth der Constanten k bestimmt werden könnte; so sind doch Versuche vorhanden, durch welche bewiesen wird, dass diese Constante, wenn auch einen kleinen, doch keinen ganz verschwindenden Werth hat. Leitet man nämlich magnetisch inducirte Ströme durch Wasser, so lässt sich aus den messbaren Stromwirkungen entnehmen, dass dieselbe Induction, je nachdem sie schneller oder langsamer ausgeführt wird, mehr oder weniger Wasser zersetze, was nicht der Fall sein dürfte, wenn $k = 0$ wäre. — Bei elektrolytischen Messungen pflegt wi so gross zu sein, dass k dagegen nicht in Betracht kommt.

Man bezeichnet die Kräfte, welche der Trennung des Wasserstoffs und Sauerstoffs im Wasser Widerstand leisten, als *chemische Affinitätskräfte*, die man aber bisher nicht im Stande war, in bekannten Maassen auszudrücken. In diesem Artikel sollte an einem Beispiele gezeigt werden, wie die Resultate der vorhergehenden Untersuchung zur wirklichen

Ausführung einer solchen Bestimmung benutzt werden können. Es wird dadurch der Weg zur näheren Erforschung der *Gesetze der chemischen Affinitätskräfte* gebahnt, wozu aber zahlreichere Messungen dieser Kräfte nöthig sind, wovon hier nur eine Messung als Beispiel gegeben werden sollte.

20.

Elektricitätsgehalt der Leiter.

Die Intensität des durch einen Leiter gehenden Stroms ist proportional der Geschwindigkeit, mit welcher die im Leiter enthaltene positive und negative Elektricität *durch den Querschnitt des Leiters* fliesst, und hängt daher von zwei Faktoren ab: 1) von der in jedem *Längenelemente* des Leiters enthaltenen Elektricitätsmenge (welche die *Capacität* des Leiters genannt werden kann), 2) von der Geschwindigkeit, mit welcher diese Elektricitätsmenge (positive und negative nach entgegengesetzter Richtung) sich im Leiter fortbewegt. Lässt sich nun auch die Intensität des Stromes messen, das heisst die positive und negative Elektricitätsmenge nach bekannten Maassen bestimmen, welche *durch den Querschnitt des Leiters* fliesst, so lässt sich doch weder die in einem *Längenelement* des Leiters enthaltene Elektricitätsmenge noch die *Geschwindigkeit*, mit welcher sich dieselbe im Leiter fortbewegt, einzeln bestimmen: es würde dies nur in solchen Fällen geschehen können, wo die eine Elektricität sich nicht allein bewegte, sondern die Leitertheilchen, in denen sie enthalten wäre, mit fortführte.

Ob nun dieser Fall beim Überspringen der Elektricität von einem Conductor zum andern (durch eine Luftschicht), wobei kleine Theilchen von dem einen Conductor abgerissen und zum andern Conductor hinübergeführt werden, statt finde, ist zwar auf experimentellem Wege nicht ermittelt, und wird sich auch nicht vollständig und sicher ermitteln lassen; doch scheint es unter gewissen Verhältnissen faktisch festzustehen, dass nur von dem positiv geladenen Conductor kleine Theilchen abgerissen und zum negativen Conductor hinüber geführt werden. Auch unterliegt es keinem Zweifel, dass diese kleinen abgerissenen Theilchen mit freier positiver Elektricität geladen sind und dass durch dieselben der Übergang einer bestimmten Elektricitätsmenge von einem Conductor zum andern vermittelt werde. Ob aber nur der Übergang eines Theils oder aller positiver Elektricität von jenem Conductor zu

diesem auf diese Weise vermittelt werde, ferner ob in diesen kleinen abgerissenen Theilchen blos freie positive Elektricität oder ausserdem auch eine bestimmte Menge neutralen Fluidums enthalten sei, endlich wie sich dabei die negative Elektricität des andern Conductors verhalte, ist bisher keiner näheren Erörterung unterworfen worden.

Was zunächst das Verhalten der Elektricität des negativ geladenen Conductors betrifft, von welcher unter den erwähnten Verhältnissen kein Theilchen abgerissen und zum positiven Conductor geführt wird, so scheint daraus hervorzugehen, dass die negative Ladung dieses Conductors unter jenen Verhältnissen irgend eine Verzögerung erlitten, und dass daher, ehe diese Ladung die zum Abreissen kleiner Theilchen erforderliche Stärke erreicht habe, die vom positiv geladenen Conductor abgerissenen Theilchen schon zum negativen gelangen und durch Mittheilung ihrer positiven Ladung das Wachsthum der negativen Ladung verhindern. Unter diesen Verhältnissen würde also gar keine Elektricität vom negativ geladenen Conductor zum positiv geladenen übergehen.

Was die andere Frage betrifft, ob die abgerissenen Theilchen blos freie positive Elektricität enthalten, oder ob sie ausserdem eine bestimmte Quantität neutrales Fluidum mit sich führen, so lässt sich eine bestimmte Ansicht hierüber nur auf das Faktum der äussersten Feinheit der abgerissenen Theilchen begründen.

Es ist nämlich bekannt, dass, wenn eine grössere und kleinere Kugel nach der Berührung getrennt werden, die in beiden enthaltene freie Elektricität sich zwischen ihnen nach einem bestimmten Verhältnisse theilt, und zwar so, dass die mittlere Dicke der an der Oberfläche jeder Kugel befindlichen Elektricitätsschicht nicht gleich, sondern dass die an der Oberfläche der kleineren Kugel grösser ist, als die an der Oberfläche der grösseren, und zwar dass das Verhältniss sich dem Verhältniss

$$1,6449 : 1$$

desto mehr nähert, je ungleicher beide Kugeln sind.

Ein abgerissenes Theilchen kann nun als eine äusserst kleine Kugel betrachtet werden, und es wird daher, wenn man die Dicke der an der Oberfläche des positiv geladenen Conductors vorhandenen Elektricitätsschicht mit ε bezeichnet, die Dicke der an der Oberfläche des abgerissenen Theilchens vorhandenen $= 1,6449 . \varepsilon$ zu setzen sein. Während nun bekanntlich bei dem positiv geladenen Conductor ε gegen den Krüm-

mungshalbmesser seiner Oberfläche verschwindet, lässt sich keineswegs annehmen, dass auch 1,6449 . ε gegen den Halbmesser des kleinen abgerissenen Theilchens verschwinde, im Gegentheil darf man bei der äussersten Kleinheit dieses Theilchen voraussetzen, dass sein Halbmesser kleiner oder wenigstens nicht grösser sei als 1,6449 . ε. Alsdann folgt aber, dass diese Schicht freier positiver Elektricität das ganze Theilchen erfülle und dass also kein von dieser Schicht eingeschlossener Raum vorhanden sei, der eine bestimmte Menge neutralen Fluidums enthielte. Die kleinen abgerissenen Theilchen würden also blos freie positive Elektricität enthalten.

Was endlich die Frage betrifft, ob von dem positiv geladenen Conductor die freie Elektricität nur von den abgerissenen Theilchen zum negativen Conductor hinübergeführt werden, oder ob daneben eine andere Quantität positiver Elektricität ohne ponderabelen Träger sich selbst einen Weg zum negativ geladenen Conductor bahne, so kann nur der Mangel alles physischen Grundes geltend gemacht werden, von dem es abhinge, dass der eine Theil der Elektricität, unter ganz gleichen Verhältnissen, sich unabhängig von seinem ponderabelen Träger bewegen sollte, während der andere seinen ponderabelen Träger mit nachziehen müsste. Da es also von einem Theile der übergehenden Elektricität faktisch feststeht, dass sie ihren ponderabelen Träger mit fortzieht, so muss dasselbe von aller übergehenden Elektricität so lange angenommen werden, bis das Gegentheil bewiesen wird.

Es würde hier also der Fall eines Stromes wirklich vorliegen, bei welchem sich die Leitertheilchen, welche nur positive Elektricität enthalten, fortbewegen. Nun lässt sich nach den gewonnenen Maassbestimmungen die fortbewegte Elektricitätsmenge, welche von dem einen Conductor zum andern übergegangen ist (durch Messung der Stromintensität) genau bestimmen; folglich bleibt nur übrig, auch die Menge der ponderabelen Masse genau zu bestimmen, welche gleichzeitig von dem positiven Conductor abgerissen und an den negativen Conductor angesetzt worden ist. So klein diese ponderabele Masse auch sein mag, so lässt sie sich doch deutlich beobachten und es ist danach anzunehmen, dass auch ihr Gewicht mit den feinsten Wagen, die wir besitzen, sich werde bestimmen lassen.

Jedenfalls wird sich ergeben, dass selbst für sehr grosse Elektricitätsmengen, welche vom positiv geladenen Conductor zum negativ ge-

ladenen übergehen, die ponderabele Masse der mit fortgerissenen Leitertheilchen sehr klein sei, dass folglich die in jedem *Längenelemente* des Leiters enthaltene Elektricitätsmenge ausserordentlich gross sei. Je grösser aber diese Elektricitätsmenge ist, desto kleiner ist, bei gegebener Stromintensität, die *Geschwindigkeit*, mit welcher sich diese Elektricitätsmenge im Leiter fortbewegt, und es darf daher diese geringe Geschwindigkeit, mit welcher sich die elektrischen Fluida in ihren Leitern bewegen, in keiner Weise mit der ausserordentlich grossen Geschwindigkeit verwechselt werden, mit welcher die Störung des Gleichgewichts der elektrischen Fluida durch metallische Leiter fortgepflanzt wird, auf welche die bekannten von Wheatstone gemachten Versuche sich beziehen.

Dass die in einem Längenelemente eines *metallischen Leiters* enthaltene Elektricitätsmenge sehr gross, und die Geschwindigkeit, mit welcher sich diese Elektricitätsmenge im Leiter bewegt, bei allen wirklich dargestellten Strömen sehr klein sei, liess sich nach Analogie aus dem für *feuchte Leiter* (Wasser) in Artikel 15 gefundenen Resultate im voraus erwarten. Denn es ist dort gefunden worden, dass bei einem Strome, dessen Intensität nach *elektrolytischem* Maasse = 1 ist, eine positive Elektricitätsmenge von $106\frac{2}{3} \,.\, 155370 \,.\, 10^6$ Einheiten zusammen mit $\frac{1}{9}$ Milligramm Wasserstoff in der einen Richtung, und eine gleich grosse negative Elektricitätsmenge mit $\frac{8}{9}$ Milligramm Sauerstoff verbunden in entgegengesetzter Richtung durch den Querschnitt des Leiters in 1 Secunde geht, woraus folgt, dass in 1 Milligramm Wasser $106\frac{2}{3} \,.\, 155370 \,.\, 10^6$ Einheiten positiver und gleich viel negativer Elektricität enthalten sein müsse, die sich aber (zusammen mit ihren ponderabelen Trägern) nur mit der geringen Geschwindigkeit von $\frac{1}{2}$ Millimeter in der Secunde fortbewegen, wenn der Querschnitt des feuchten Leiters nur 1 Quadratmillimeter gross ist. Ist der Querschnitt grösser, so ist die Geschwindigkeit nach Verhältniss noch kleiner.

21.

Anwendung auf Maasse.

Die in der Physik gebräuchlichen Maasse werden in *Grundmaasse* und *abgeleitete Maasse* eingetheilt. In der allgemeinen Mechanik, wo alle Kräfte einzeln als gegeben betrachtet werden, lassen sich alle Maasse auf die

drei bekannten Grundmaasse für *Raum, Zeit* und *Masse* zurückführen. — In allen denjenigen Theilen der Physik, wo das *Gravitationsgesetz* vorausgesetzt werden darf, lassen sich alle Maasse blos auf die beiden Grundmaasse für *Raum* und *Zeit* zurückführen, aus denen mit Hülfe des Gravitationsgesetzes auch das Maass der *Masse* abgeleitet wird. Man kann nämlich diejenige Masse zum Maasse nehmen, welche, wenn sie in einem Punkte concentrirt wäre, auf eine andere Masse in der Einheit der Entfernung nach dem Gravitationsgesetze eine Kraft ausübt, die ihr in der Zeiteinheit eine Geschwindigkeit ertheilt gleich der Längeneinheit in der Zeiteinheit.

Es ist nun interessant zu bemerken, dass auch dieses Maasssystem noch einer Vereinfachung fähig ist, und dass es möglich ist alle in der Physik gebrauchten Maasse *aus dem einzigen Grundmaass für Raum* abzuleiten, wenn man zwei Grundgesetze der Natur zu diesem Zwecke voraussetzen darf, nämlich ausser dem *Gravitationsgesetze ponderabeler Massen* das *Grundgesetz der elektrischen Wirkung*. Denn mit Hülfe des letzteren kann auch *das Maass der Zeit aus dem Raummaasse abgeleitet werden*. Man kann nämlich diejenige Zeit zum Maasse nehmen, in welcher sich zwei mit gleichförmiger relativer Geschwindigkeit bewegte elektrische Massen um die Längeneinheit einander nähern oder von einander entfernen müssen, wenn sie nach diesem Gesetze gar keine Wirkung auf einander ausüben sollen.

Wählt man das *Millimeter* zum Raummaasse, so würde unter Voraussetzung des Grundgesetzes der elektrischen Wirkung aus diesem Raummaass ein Zeitmaass abgeleitet werden, welches der

439450 *Millionste Theil einer Secunde*

wäre; denn wenn zwei mit gleichförmiger relativer Geschwindigkeit bewegte elektrische Massen in diesem kleinen Zeitraume um 1 Millimeter sich einander nähern oder von einander entfernen, so üben sie nach dem Grundgesetz der elektrischen Wirkung gar keine Wirkung auf einander aus.

Nachdem auf diese Weise aus dem Raummaass das Zeitmaass abgeleitet worden ist, kann ferner aus diesen beiden Maassen unter Voraussetzung des Gravitationsgesetzes auch das Maass der Masse abgeleitet werden. Es ist nämlich nach dem Gravitationsgesetze die Erde eine Masse, welche, wenn sie in einem Punkte concentrirt wäre, einer andern Masse in einer dem Erdhalbmesser gleichen Entfernung die Be-

schleunigung $= 9811$ ertheilt, wenn das Millimeter zum Raummaass und die Secunde zum Zeitmaass gebraucht werden. Nimmt man nun statt der Secunde das eben abgeleitete Zeitmaass, welches 439450 Millionen Mal kleiner ist, so ist das abgeleitete Beschleunigungsmaass 439450^2 Billionen Mal grösser, und es ist nach diesem grösseren Maasse obige Beschleunigung

$$= \frac{9811}{439450^2 . 10^{12}}.$$

Setzt man nun den Erdhalbmesser $= 6370 . 10^6$ (Millimeter), so ergiebt sich nach dem Gravitationsgesetze die Erde als eine Masse, welche, wenn sie in einem Punkte concentrirt wäre, einer andern Masse in der Einheit der Entfernung die Beschleunigung

$$= \frac{9811 . 6370^2 . 10^{12}}{439450^2 . 10^{12}}$$

ertheilt, folglich ist eine Masse, welche $\frac{439450^2}{9811 . 6370^2}$ oder fast die Hälfte von der Erdmasse beträgt, diejenige Masse, welche nach dem Gravitationsgesetze, unter Annahme des Millimeters als Raummaasses und mit Hülfe des daraus schon abgeleiteten Zeitmaasses, als *abgeleitetes Massenmaass* erhalten wird.

Aus dem Millimeter als Raummaass und aus dem daraus eben abgeleiteten Zeit- und Massenmaasse werden endlich alle übrigen in der Physik gebrauchten Maasse auf bekannte Weise abgeleitet.

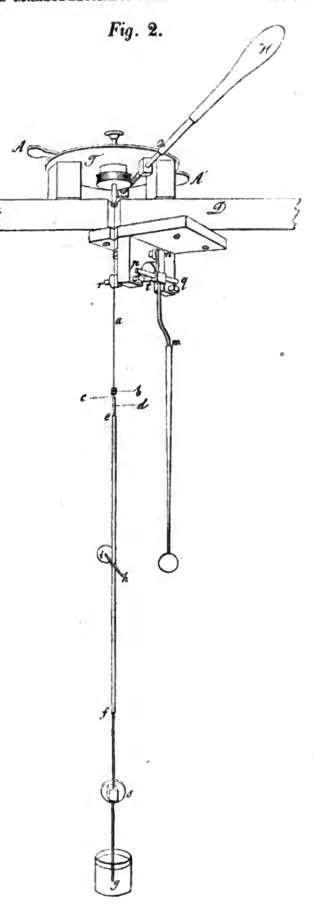
Nach diesem Systeme, wo alle Maasse aus dem einzigen Grundmaasse des Raums abgeleitet werden, ist die Anziehungskraft zweier Massen m, m' in der Entfernung r gleich $\frac{mm'}{rr}$ und die Abstossungskraft zweier Elektricitätsmengen e, e' in der Entfernung r gleich $\frac{ee'}{rr}\left(1-\frac{dr^2}{dt^2}+2r\frac{ddr}{dt^2}\right)$, ohne dass diesen Ausdrücken oder einzelnen Gliedern derselben constante Faktoren beizufügen sind.

Anhang.

I. Beschreibung der Torsionswage.

Um eine ungleiche Rückwirkung der von den geladenen Kugeln durch Influenz elektrisirten Wände der Torsionswage auf die bewegliche Kugel möglichst zu vermeiden, ist die Wage in ungewöhnlich grossem Maassstabe ausgeführt. Der Kasten, in welchem die Kugeln hingen, war parallelepipedisch 1,16 Meter lang, 0^m87 breit und 1^m44 hoch. Die 12 Kanten des Parallelepipeds waren aus quadratischen Pfosten (80^{mm} Seite) von hartem Holze gezimmert. Nachdem das Gerüst auf einem grossen fundamentirten Stein festgestellt war, wurde als Deckel eine schwere Holzplatte aufgelegt, die Seitenwände aber wurden in der Weise mit scharf angespanntem Wachstuch bekleidet, dass die Kanten der Pfosten nicht in das Innere des Raumes hineinragten. Nach dieser Bekleidung, welche zum Einhängen der Apparate blos das obere Viertel einer Wand offen liess, wurde die Festigkeit des Kastens durch angeschraubte Streben noch sehr vermehrt. Bei der Messung selbst wurde die Öffnung, nachdem die Standkugel eingebracht war, durch einen Schieber geschlossen. Ausserdem war aber der ganze Kasten mehrfach mit Tüchern und Decken, die auf dem Steine noch auflagen, behängt, um jeden Luftzug abzuhalten. Dennoch war es nöthig, Nachts in dem ungeheizten Zimmer zu beobachten, weil das Öffnen und Schliessen der Thüren in andern Theilen des Gebäudes und die ungleiche Erwärmung namentlich des Fussbodens durch die Sonne zu Luftströmungen Veranlassung wurden, welche ein Schwanken der beweglichen Kugel zuweilen bis zu einem halben Grade hervorbrachten. Nachts aber, wenn die Luft draussen nicht zu unruhig war, schwankte die Kugel nicht um eine Minute.

Über der Mitte des Deckels, dessen Durchschnitt Fig. 2 mit *D* bezeichnet ist, war der Torsionskreis *T* befestigt, dessen Albidade *AA'* die einzelne Minute durch ihre Nonien ablesen liess und zur feineren Regulirung der Torsion durch einen Hook'schen Schlüssel *H*, oder nach dessen Auslösung auch frei durch die Hand geführt werden konnte. Weiter bedeuten die Buchstaben der Figur:



a den hartgezogenen Messingdraht (Nr. 12) 398^{mm} lang, in der Axe der Alhidade befestigt;

b einen kleinen Messingcylinder mit Seitenschraube, um ihn am unteren Ende von *a* festzuklemmen. Unten an ihm ist

c eine 5^{mm} vorragende Schraubenspindel, entweder um die Körper anzuschrauben, durch deren Schwingungsdauer der Torsionscoefficient bestimmt werden sollte, oder den Messingdraht

d, an welchen die 5^{mm} dicke, 450^{mm} lange cylindrische Stange *ef* von reinem Schellack angeschmolzen war.*)

hi bedeutet den Schellackhebel für die bewegliche Kugel, der sich beiderseits bei etwa 60^{mm} Länge bis zu 2^{mm}5 Dicke verjüngte.

fg ist ein Draht, unten einen Zoll weit in Olivenöl tauchend, mit einem in Holz gefassten Spiegel *s*. Das Öl hat die Wirkung, nicht nur die Schwankungen der beweglichen Kugel, sondern auch die durch Erschütterungen entstandenen Pendel-

*) Gegen die Grösse des oberen Theiles der Figur, ist die Länge *ef*, wie überhaupt die Länge *Tg* zu gering gezeichnet. Die Kugeln waren vom Deckel weiter entfernt.

bewegungen der langen Stange in kürzester Zeit zu beruhigen, während es andererseits durchaus kein Hinderniss ist, dass der Hebel der allergeringsten Torsionsänderung folgt.

Die beiden Kugeln der Drehwage bestanden aus sehr dünnem Argentanblech, waren fein polirt und vergoldet, und blos durch Erhitzen an das Schellack angeklebt.

Die lange, unten sich verdünnende vertikale Schellackstange für die *Standkugel* war an eine gekrümmte Messingstange *mn* geklebt. Mit dieser war eine horizontale Axe *pq* mit zwei Stahlspitzen und rechtwinklig dazu ein Messingstab *rt* mit einem Laufgewichte fest verbunden. Die Spitzen standen auf Messinglagern, *q* in einem conischen Loch, *p* in einem Schlitz. Das Laufgewicht drückte das obere Ende der Messingstange *mn* gegen eine Stellschraube, so dass jedesmal nach erneutem Aus- und Einbringen die Standkugel genau dieselbe Lage in der Torsionswage bekommen musste. Drückte man zum Laden der beweglichen Kugel die Messingstange *mn* nach vorn, bis der Stab *tr* gegen eine Stellschraube trat, so befand sich die geladene Standkugel neben der beweglichen, zog sie an und lud sie, ohne dass letztere erst einen grossen Bogen zu beschreiben brauchte.

Dem Spiegel *s* gegenüber war in der Wand der Torsionswage eine mit einem Planglase verschlossene Öffnung. Aussen in einiger Entfernung befand sich eine horizontale Skala, deren Spiegelbild in einem Fernrohr beobachtet werden konnte. Die Entfernung der Skala war so gewählt, dass, wenn die Drehung des Hebels der Torsionswage eine Minute betrug, die Skala im Fernrohr sich um einen Skalentheil bewegte. Zugleich war die Skala so gestellt, dass dann, wenn die Mittelpunkte der beiden Kugeln mit der Drehaxe genau einen rechten Winkel bildeten, ihr in der Mitte gelegener Nullpunkt, von dem aus sie nach beiden Seiten numerirt war, grade im Faden des Fernrohrs erschien.

Dies war die Lage der Kugeln, in der sie beobachtet werden sollten und die auf diese Weise mit grosser Schärfe immer erkannt werden konnte. Hatte sich nach ihrer Elektrisirung die bewegliche Kugel weiter von der Standkugel entfernt, so konnte der am Fernrohr befindliche Beobachter sogleich ablesen, um wie viele Grade oder Minuten ihr Stand durch die Torsion corrigirt werden musste. Andererseits war an dem Hook'schen Schlüssel eine Scheibe angebracht, welche die Drehung dieses Schlüssels in Minuten der Drehung der Alhidade erkennen

liess, und so konnte der die Torsion regulirende zweite Beobachter, ohne auf den Nonius zu sehn, auf Commando*) die Correction herbeiführen. Einige Übung in der rechtzeitigen Ertheilung und Ausführung dieses Commandos und die vortreffliche Wirkung des Öls brachten es bald dahin, dass in verhältnissmässig sehr kurzer Zeit die durch das Laden in heftige Bewegung gerathene bewegliche Kugel vollkommen ruhig so stand, dass die Mittelpunkte der beiden Kugeln mit der Drehaxe einen Winkel bildeten, der um wenige Minuten grösser als ein Rechter war, d. h. dass im Fernrohr der Nullpunkt der Skala um einige Theilstriche vom Faden des Fernrohrs abstand. Der Elektricitätsverlust führte dann durch die vorhandene Torsion von selbst die Kugel allmählig näher an die Standkugel heran, so dass der Zeitpunkt, in welchem der Nullpunkt der langsam wandernden Skala den Faden des Fernrohrs passirte, mit Schärfe zu bestimmen war. Darauf wurde die Torsion abgelesen.

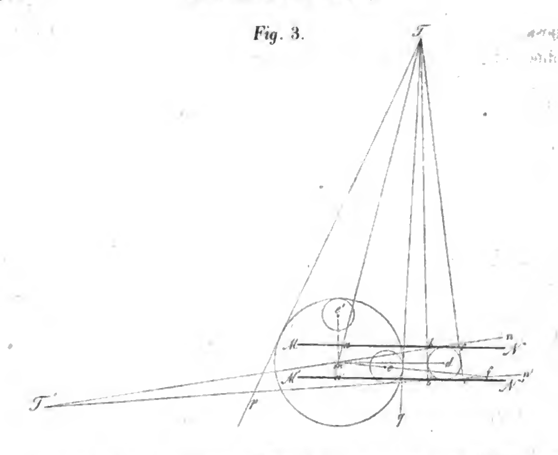
Derjenige Stand, bei welchem die Mittelpunkte der beiden Kugeln mit der Drehaxe der Torsionswage genau einen rechten Winkel bildeten, ist folgendermaassen gefunden.

Nachdem statt der Schellackstange an dem kleinen Cylinder des Torsionsdrahtes ein unten beschwerter feiner Faden befestigt war, dessen Projection Fig. 3 m die Drehaxe vorstellt, wurde ein Theodolith T in der Entfernung von einigen Metern aufgestellt und die Entfernung Tm genau gemessen. Darauf wurde ein in Millimeter getheilter Maassstab von Elfenbein horizontal in die Lagen MN und $M'N'$ gebracht, so dass er jedesmal parallel mit md stand und die Standkugel in der halben Höhe tangirte. Der vertikale Faden im Fernrohr des Theodolithen liess die Längen ab, ac, $a'b'$ und $a'c'$ bei der starken Vergrösserung auf den zehnten Theil eines Millimeters schätzen. Es ist dann

$$md = \frac{1}{4}(ab + ac + a'b' + a'c').$$

*) Will man den Hebel einer nicht geladenen Torsionswage aus einer Lage in eine andere bringen, ohne dass lange andauernde Oscillationen entstehen, so mache man, wenn der Hebel noch ruht, die halbe Correction plötzlich, die andere Hälfte dann eben so plötzlich in dem Augenblicke, wo der Hebel seine grösste Elongation erreicht und umkehren will. Dann wird er desto ruhiger stehen, je weniger der Widerstand der Luft gegen sein Trägheitsmoment in Betracht kommt. Bei der geladenen Torsionswage erreicht man auf diese Weise den Zweck angenähert.

Fig. 3.



Darauf wurde ein zweiter Theodolith in einen solchen Punkt T gestellt, dass der vertikale Faden seines Fernrohrs die Drehaxe m deckte und die Standkugel tangirte. Nachdem Tm gemessen war, wurde das Fernrohr in die Lage Tn gedreht, so dass der Faden die andere Seite der Standkugel tangirte, und blieb dann unverrückt so stehen.

Jetzt hängte man die Schellackstange mit der beweglichen Kugel wieder an den Torsionsdraht und maass mit dem Theodolithen T den Winkel pTq. Die vor Lichtreflexen geschützte bewegliche Kugel zeichnete sich auf weissem Hintergrunde sehr scharf ab und wies dem Theodolithen bei langsamer Drehung die Tangenten des Kreises, innerhalb dessen sie sich bewegte. Der Abstand des Mittelpunktes der beweglichen Kugel von der Drehaxe ist also

$$me = Tm \sin \tfrac{1}{2} pTq - r',$$

wobei r' der vorher gemessene Radius der beweglichen Kugel ist.

Nun wurde die Standkugel herausgenommen, der Kasten der Torsionswage, um Luftströmungen zu vermeiden, ganz geschlossen bis auf zwei kleine Öffnungen in der schon bekannten Richtung Tn', und durch den Torsionsdraht die bewegliche Kugel so gestellt, dass sie von der Richtung Tn' tangirt wurde.

Die bewegliche Kugel musste jetzt um $90^0 + dme$ gedreht werden,

wenn ihr Mittelpunkt in die Lage e' kommen sollte, welche mit m und d einen rechten Winkel beschreibt. Nun ist der Winkel

$$dme = mfT + mTf - nmd,$$

während

$$mfT = \text{arc sin} \frac{Tm \sin mTn' - r'}{me},$$

$$mTf = 2 \,.\, \text{arc sin} \frac{r}{Tm + md \cos nmd},$$

$$nmd = \text{arc sin} \frac{r}{md} \text{ *)}.$$

Da hier alles gegeben ist, so liess sich dme leicht berechnen, und es wurde nun die Drehung der beweglichen Kugel um $90^0 + dme$ mittelst des Torsionskreises vorgenommen und der Nullpunkt der Beobachtungsskala richtig gestellt.

II. Beschreibung der Tangentenboussole.

Der zu dem Multiplicator verwendete Kupferdraht war vorzüglich gut mit Seide besponnen und darauf in seiner ganzen Länge von fast $\frac{3}{4}$ Meilen durch Collodium gezogen.**) Von der grossen Rolle, auf welcher er sich dann befand, wurde er, durch Hülfe eines Flaschenzuges sehr gleichmässig gespannt, auf den kreisförmigen Ring der Tangentenboussole in 5635 Windungen aufgewunden. Dieser Metallring, der eine Rinne von rechteckigem Querschnitt bildete, war überall, wo sich der Draht an ihn anlegte, vorher in der Hitze dick mit Siegellack überzogen. In den Ring wurde nachher ein 20 Pfund schwerer Kupferring als Dämpfer gestellt. Alles Übrige solcher Einrichtungen ist bekannt.

Die Hauptsache war, die Überzeugung zu erlangen, dass wirklich alle Windungen der Tangentenboussole von dem Entladungsstrom durchlaufen wurden und nicht etwa ein Überspringen eines Theiles derselben durch einen in der Tiefe der Windungen vielleicht nicht sichtbaren Fun-

---

*) Diese vielen Umstände wurden durch die Undurchsichtigkeit des hängenden Schellackstabes geboten.

**) Versuche, ob dadurch das Isolationsvermögen wirklich wächst, sind nicht angestellt, man sollte es aber annehmen. Jedenfalls erreicht man dadurch, dass die Seide nicht nur auf dem Drahte sehr fest haftet, sondern auch, dass sie an der Oberfläche nicht leicht rauh wird. Das Verfahren ist einfach: Von der Originalrolle leitet man den Draht um eine kleine feste Rolle mit horizontaler Axe und von da in grosser Entfernung zu einer grossen Rolle, auf die er vorläufig aufgewunden wird. Die kleine feste Rolle taucht zur Hälfte in ein Gefäss mit Collodium.

ken geschah. Nun war ein in Marburg oft gebrauchter kleiner Multiplicator von 1000 Windungen zur Hand, und es liess sich aus den Dimensionen der beiden Instrumente vorhersehn, dass sie gegen die Entladung einer Leidener Flasche ungefähr gleiche Empfindlichkeit haben würden. Beide Multiplicatoren wurden so verbunden, dass dieselbe durch Wassersäulen verzögerte Entladung einer grösseren Leidener Flasche durch die Windungen beider fliessen musste. Wenn nun nicht nur das vorhergesehene Verhältniss der Empfindlichkeit eintrat, sondern bei einer Steigerung der Ladung sowohl die Angaben beider Boussolen unter einander proportional blieben, als auch den Angaben eines Sinuselektrometers entsprachen, welches, mit der Leidener Flasche verbunden, deren einzelne Ladungen vergleichen liess, so konnte man überzeugt sein, dass die grosse Tangentenboussole ihrem Zwecke entsprach. Bei allen Entladungen, welche durch ein besonders construirtes Pendel regulirt wurden, blieb der Knopf der Flasche dieselbe Zeit und zwar nur $\frac{3}{8}$ Secunden lang mit dem Multiplicator in Verbindung, um von dem wieder auftretenden Rückstande nur einen sehr kleinen und zwar proportionalen Theil zur Wirkung kommen zu lassen. Folgendes sind die Resultate:

Nr.	*a.* Ablenkung φ des Sinus-elektromet.	*b.* $\sqrt{\sin\varphi}$.	*c.* Kleiner Multiplicat. Elongation in Skalenth.	*d.* Tangenten-boussole. Elongation in Skalenth.	$\frac{d}{c}$	$\frac{d}{b}$
1.	9° 31′	0,4078	41.75	170,40	4,1060	417,85
2.	19° 59′	0,5845	59,50	244,85	4,1151	418,91
3.	34° 57′	0,7569	76,95	316,10	4,1078	417,62
4.	49° 54′	0,8746	88,97	365,45	4,1076	417,85

Jede der Zahlen unter *c* und *d* ist das Mittel aus 2 bis 3 Messungen, die unter einander höchstens um 1 Skalentheil differirten. Die verlangte Proportionalität stellt sich also sehr vollkommen heraus. Nun war der Abstand des Spiegels von der Skala bei dem kleinen Multiplicator 1633, bei dem grossen 6437,6 Skalentheile und ihre Empfindlichkeit verhält sich also, wie oben ungefähr gefordert wurde, nämlich wie 1:1,0423.

Diese Messungen, von denen die zweite offenbar bei der Tangentenboussole einen Beobachtungsfehler voraussetzen lässt, zeigen bei allen drei Instrumenten eine ausserordentliche Feinheit in der Vergleichung der disponiblen Ladung einer Leidener Flasche.

Inhalt.

Verbesserung.

In der Abhandlung: „Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondre über Diamagnetismus" in den Abhandlungen der K. Sächs. Ges. der Wissensch. I. Art. 26. Seite 572. Zeile 20 — 22 soll es heissen:

„Durch Ausführung der Integration erhält man für y folgenden Ausdruck:

$$y = \tfrac{2}{3}\, n\mu \frac{X}{D},\ \text{wenn } X < D$$

$$y = n\mu \left(1 - \tfrac{1}{3} \frac{DD}{XX}\right),\ \text{wenn } X > D.\text{"}$$

ELEKTRODYNAMISCHE

MAASSBESTIMMUNGEN

INSBESONDRE

ÜBER

ELEKTRISCHE SCHWINGUNGEN.

VON

WILHELM WEBER.

Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Band VI.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1864.

ELEKTRODYNAMISCHE

MAASSBESTIMMUNGEN

INSBESONDRE

ÜBER

ELEKTRISCHE SCHWINGUNGEN

VON

WILHELM WEBER.

Die verschiedenen Kräfte, welche von elektrischen Massen ausgeübt werden, oder welche auf sie wirken, nach Maass und Gesetz genau und vollständig zu bestimmen, ist die *erste* Aufgabe gewesen, welche in diesen Abhandlungen über elektrodynamische Maassbestimmungen erörtert worden ist. Es ist ein *Grundgesetz* aufgestellt worden, aus welchem *erstens* die Kräfte der elektrostatischen Wechselwirkung und deren von Coulomb entdeckte Gesetze, *zweitens* die Kräfte der elektrodynamischen Wechselwirkung der Stromelemente unter einander und deren von Ampère entdeckte Gesetze, *drittens* die Kräfte der von Faraday entdeckten elektrodynamischen Induction (der Volta-Induction) — sowohl der durch Bewegung des Stromes mit seinem Träger, als auch der durch Stromänderung im unbewegten Träger, als auch der von Neumann zuerst entdeckten und beobachteten, durch den Durchgang eines Stroms durch einen Gleitpunkt seines Leiters, — und deren Gesetze, abgeleitet und bestimmt worden sind.

Ausser diesen verschiedenen Kräften der *rein* elektrischen Wechselwirkung sind auch die Kräfte betrachtet worden, welche vom *Magnetismus* auf die Elektricität ausgeübt werden, nämlich die *elektromagnetischen* Kräfte und die der *magnetelektrischen Induction* des gegen elektrische Massen bewegten Magnetismus — sowohl wenn der Magnetismus mit seinem Träger, als auch wenn er bloss in seinem Träger bewegt wird. — Auch für diese Kräfte konnten die Gesetze aus dem aufgestellten elektrischen Grundgesetze abgeleitet werden, wenn man nämlich nach Ampère für Molecularmagnete elektrische Molecularströme substituirte. Dasselbe galt auch von den *elektrodiamagnetischen* Kräften.

Endlich sind auch diejenigen Kräfte betrachtet worden, welche von den *ponderabelen Körpern*, worin die elektrischen Massen sich bewegen, auf diese letzteren ausgeübt und die galvanischen Widerstandskräfte der

ponderabelen Körper genannt werden. Auch zur Bestimmung dieser Kräfte ist nach dem Leitfaden des für beharrliche Ströme bewiesenen Ohm'schen Gesetzes ein allgemeineres Grundgesetz aufzustellen versucht worden.

An diese Erforschung der *Kräfte* knüpft sich nun eine *zweite* Aufgabe der Elektrodynamik, nämlich die Erforschung der *Bewegungen*, welche die elektrischen Massen, getrieben von allen diesen Kräften, machen, und die Erforschung der Gesetze dieser Bewegungen in ihrer Abhängigkeit von jenen Kräften, eng an. Denn um diese Bewegungen zu bestimmen ist eine genaue und vollständige Kenntniss aller jener Kräfte unentbehrlich und es kann daher die Erforschung jener Kräfte als das Mittel, die Erforschung dieser Bewegungen als der Zweck, welcher dadurch erreicht werden soll, betrachtet werden.

Diese zweite viel umfassende Aufgabe der Elektrodynamik hat noch wenig Bearbeitung gefunden und es lässt sich mit Recht fragen, woher es komme, dass auf der durch die Kenntniss der Kräfte gegebenen Grundlage in dieser Richtung weiter zu bauen so wenig geschehen ist? Offenbar hat man Anstand genommen, jene Grundlage schon als ganz sicher und fertig zu betrachten. Es konnte in Zweifel gezogen werden, ob alle auf elektrische Massen wirkenden Kräfte schon bekannt wären, namentlich ob ausser den bekannten, in allen Entfernungen wirkenden, rein elektrischen Kräften nicht noch irgend welche unbekannte, auf unmessbar kleine Wirkungssphären beschränkte, *elektrische Molecularkräfte* mitwirkten, die vorher erforscht werden müssten, ehe man die davon abhängigen Bewegungsgesetze elektrischer Massen zu entwickeln versuchte. Auch die Zulässigkeit des Widerstandsgesetzes der *ponderabelen Leiter* konnte für die Entwickelung der Gesetze *schnell wechselnder* elektrischer Bewegungen in Zweifel gezogen werden, da dieses Gesetz von Ohm nur für *beharrliche* Ströme bewiesen, der allgemeinere auf alle Verhältnisse anwendbare Ausspruch dieses Gesetzes aber bloss versuchsweise aufgestellt worden ist. — Endlich kommt hinzu, dass die Kenntniss der *Kräfte* doch nicht die einzige für Lösung der zweiten Aufgabe erforderliche Grundlage ist, sondern dass ausserdem dazu auch noch eine genauere Kenntniss der zu bewegenden *Massen*, nebst anderen noch nicht hinreichend bekannten Verhältnissen, nöthig erscheint.

Dennoch ist ein Versuch zur Lösung dieser zweiten Aufgabe und zwar in so umfassender Weise, als die Umstände es gestatteten, von

Kirchhoff gemacht und in Poggendorffs Annalen 1857 Bd. 100 und 102 mitgetheilt worden. Dieser erste Versuch hat, obiger Bedenken ungeachtet, mit Recht grosses Interesse erweckt; denn es leuchtet ein, dass eine Entscheidung, ob und in wie weit obige Bedenken begründet seien, schwerlich auf anderem Wege als auf dem des Versuchs gewonnen werden kann. — Kirchhoff hat nämlich versucht, *eine allgemeine Theorie der Bewegung der Elektricität in einem unendlich dünnen Drahte* aufzustellen, wobei er jedoch, wie er selbst angiebt, gewisse Thatsachen, welche bei constanten elektrischen Strömen, oder solchen deren Intensität sich nur langsam ändert, statt finden, als allgemein geltend angenommen hat. Der Gang seiner Entwickelung soll im folgenden Artikel näher betrachtet werden.

I.

BEWEGUNGSGESETZE.

1.

Kirchhoff, über die Bewegung der Elektricität in Leitern.

Es sollen x, y, z die rechtwinklichen Coordinaten eines Punkts des Leiters bezeichnen, ferner u, v, w die *Stromdichtigkeiten* des nach den drei Coordinatenaxen zerlegten elektrischen Stroms, welcher zur Zeit t in jenem Punkte des Leiters vorhanden ist. — Unter *Stromdichtigkeit* wird hier verstanden das Product der Geschwindigkeit der strömenden Elektricität in die Menge der in der Volumeneinheit des Leiters enthaltenen positiven Elektricität. Nach dem Ohm'schen Widerstandsgesetze, wenn ihm allgemeinere Geltung beigelegt wird, bedeutet dieses so viel als das Product der im betrachteten Punkte (x, y, z) wirkenden *elektromotorischen Kraft* in das *specifische Leitungsvermögen* des Leitermetalls. Hienach ist also, wenn A die elektromotorische Kraft im Punkte (x, y, z) — d. i. den Unterschied der auf die Maasseinheit positiver und negativer Elektricität im Punkte (x, y, z) wirkenden Kräfte — bezeichnet, und α, β, γ die Winkel, welche die Richtung dieser Kraft mit den Richtungen der drei Coordinatenaxen bildet, und k das specifische Leitungsvermögen des Leitermetalls,

$$u = A\cos\alpha . k\ , \quad v = A\cos\beta . k\ , \quad w = A\cos\gamma . k\ ,$$

wobei für Kräfte und Leitungsvermögen die *mechanischen Maasse* angenommen werden sollen, deren sich Kirchhoff stets bedient*). —

Die elektromotorische Kraft A rührt nun aber zum Theil von der in der ganzen Kette vertheilten *freien Elektricität* her, zum Theil von der *Induction*, die in Folge der Aenderung der Stromstärke in allen Theilen der Leitungskette wirkt. Von allen *äusseren* elektromotorischen Kräften, z. B. von magnetelektrischen Inductionskräften, die von aussen her auf die Leitungskette wirken können, soll vor der Hand ganz abgesehen werden. Alle übrigen bekannten Kräfte, welche auf elektrische Massen

---

*) Bezeichnet ξ, η, ζ die Verschiebung eines elektrischen Theilchens im Punkte (x, y, z) nach der Zeit t in der Richtung der drei Coordinaten, also $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ die Geschwindigkeit der strömenden Elektricität, nach der Richtung der drei Coordinatenaxen zerlegt, so ist, wenn $\mathfrak{E}$ die Menge der in der Volumeneinheit des Leiters enthaltenen positiven Elektricität bezeichnet, der ersten Bestimmung gemäss,

$$u = \mathfrak{E}\frac{d\xi}{dt}, \quad v = \mathfrak{E}\frac{d\eta}{dt}, \quad w = \mathfrak{E}\frac{d\zeta}{dt}.$$

Nach dem Ohm'schen Gesetze ist aber die Stromintensität i in einem linearen Leiter, wenn sie beharrlich ist, dem Quotienten der Summe aller nach der Richtung des Leiters in der Länge der ganzen geschlossenen Kette l wirkenden elektromotorischen Kräfte, d. i. $\int Adl$, dividirt durch den Widerstand der ganzen Kette, d. i. $\int\frac{dl}{ks}$, wenn s den Querschnitt des Leiters und k das specifische Leitungsvermögen des Leitermetalls bezeichnet, proportional oder, nach mechanischen Maassen, gleich, folglich ist $i = \frac{\int Adl}{\int\frac{dl}{ks}}$. In diesem Ausspruch des Ohm'schen Gesetzes wird aber unter der Stromintensität i das Product der Geschwindigkeit der strömenden Elektricität, d. i. $\frac{d\sigma}{dt}$, wenn $\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}\cos\alpha$, $\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}\cos\beta$, $\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}\cos\gamma$ gesetzt wird, in den Querschnitt des Leitungsdrahtes s und in die Menge $\mathfrak{E}$ der in der Volumeneinheit des Leiters enthaltenen positiven Elektricität verstanden, folglich ist

$$\frac{\int Adl}{\int\frac{dl}{ks}} = \mathfrak{E}s\frac{d\sigma}{dt}.$$

Wird nun dem Ohm'schen Gesetze allgemeinere Geltung, für jedes einzelne Längenelement der Kette, zugeschrieben, so erhält man

$$\frac{Adl}{\frac{dl}{ks}} = Aks = \mathfrak{E}s\frac{d\sigma}{dt},$$

oder $Ak = \mathfrak{E}\frac{d\sigma}{dt}$, und hieraus, durch Zerlegung nach den Coordinatenaxen,

$$A\cos\alpha \,.\, k = \mathfrak{E}\frac{d\xi}{dt} = u, \quad A\cos\beta \,.\, k = \mathfrak{E}\frac{d\eta}{dt} = v, \quad A\cos\gamma \,.\, k = \mathfrak{E}\frac{d\zeta}{dt} = w.$$

wirken, tragen zur *elektromotorischen Kraft* (wenn die Widerstandskräfte, die dazu gerechnet werden könnten, davon ausgeschlossen bleiben) nichts bei, z. B. die von Ampère entdeckten, aus der Wechselwirkung der Stromelemente unter einander resultirenden, elektrodynamischen Kräfte, von denen bekannt ist, dass der Unterschied der auf die positive Elektricität und der auf die negative Elektricität wirkenden Kräfte stets Null ist, woraus also keine *elektromotorische* Kraft resultirt.

Die Componenten des *ersten* Theils der elektromotorischen Kraft, welcher von der in der Kette vertheilten *freien Elektricität* herrührt, werden, wenn Ω den Werth der *Potentialfunction der freien Elektricität* im Punkte (x, y, z) bezeichnet, durch die *verdoppelten*, negativ genommenen Werthe der partiellen Differentialquotienten von Ω nach den drei Coordinatenaxen, d. i. durch

$$-2\frac{d\Omega}{dx}, \quad -2\frac{d\Omega}{dy}, \quad -2\frac{d\Omega}{dz}$$

dargestellt, wie man leicht ersieht, wenn man beachtet, dass die elektromotorische Kraft, d. i. der Unterschied der auf die Einheit positiver und negativer Elektricität wirkenden Kräfte, *doppelt* so gross ist als die auf die Einheit *positiver* Elektricität wirkende Kraft.

Um die Componenten des *zweiten* Theils der elektromotorischen Kraft anzugeben, welcher von der *Induction* in Folge von Aenderungen der Stromintensitäten in allen Theilen der Leitungskette herrührt, bezeichne x', y', z' die Coordinaten eines zweiten Punkts der Leitungskette, ferner u', v', w' die Werthe von u, v, w für diesen Punkt, und r die Entfernung der Punkte (x, y, z) und (x', y', z') von einander.

Aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung ergiebt sich dann die elektromotorische Kraft, welche das Element $dx'dy'dz'$, in welchem die Elektricität *nach der Richtung der x-Axe* mit der Geschwindigkeit $\frac{d\xi'}{dt}$ sich bewegt, wo also, nach der vorhergehenden Note, $u' = \mathfrak{E}\frac{d\xi'}{dt}$ ist, im Punkte (x, y, z) *nach der Richtung der x-Axe* ausübt, nach *mechanischem* Maasse ausgedrückt,

$$= -\frac{8}{cc}\cdot\frac{dx'dy'dz'}{r^3}\cdot(x-x')^2\cdot\frac{du'}{dt}.$$

Es ist nämlich (siehe Elektrodynamische Maassbestimmungen im 5. Bande dieser Abhandlungen, S. 268 Nr. 4) die elektromotorische Kraft, welche ein Stromelement von der Länge α, dessen Stromintensität in der Zeit t um i gleichförmig wächst, auf einen Punkt in der Entfernung r nach

einer Richtung, welche mit der verlängerten r den Winkel θ' macht, ausübt, wenn α mit r selbst den Winkel θ bildet,

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{\alpha}{r} \cdot \frac{i}{t} \cdot \cos\theta \cos\theta' .$$

Hierin ist aber die Stromintensität i nach absolutem *magnetischem* Maasse, wie sie durch Galvanometer bestimmt zu werden pflegt, auszudrücken, wofür der nach *mechanischem* Maasse ausgedrückte Werth, mit Hinzufügung des Faktors $\frac{2\sqrt{2}}{c}$, gesetzt werden kann. Die nach *mechanischem* Maasse ausgedrückte Stromintensität in obigem Falle ist aber $= u'dy'dz'$. Setzt man also $i = \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot u'dy'dz'$, folglich $\frac{i}{t} = \frac{di}{dt} = \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{du'}{dt} \cdot dy'dz'$, und beachtet, dass in obigem Falle $\cos\theta = \cos\theta' = \frac{x-x'}{r}$ und $\alpha = dx'$ ist, so findet man die gesuchte elektromotorische Kraft

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{dx'}{r} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{c} \cdot \frac{du'}{dt} \cdot dy'dz' \cdot \frac{(x-x')^2}{rr},$$

was dem oben angegebenen Werthe gleich ist.

Betrachtet man die Bewegung der Elektricität im Elemente $dx'dy'dz'$ *nach der y- oder z-Axe* statt nach der x-Axe, so tritt, als Werth von $\cos\theta$, $\frac{y-y'}{r}$ oder $\frac{z-z'}{r}$ an die Stelle von $\frac{x-x'}{r}$, und $\frac{dv'}{dt}$ oder $\frac{dw'}{dt}$ an die Stelle von $\frac{du'}{dt}$, woraus folgt, dass die ganze vom Elemente $dx'dy'dz'$ im Punkte (x, y, z) *nach der Richtung der x-Axe* ausgeübte elektromotorische Kraft

$$= -\frac{8}{cc} \cdot \frac{dx'dy'dz'}{r^3}(x-x')\left(\frac{du'}{dt}(x-x') + \frac{dv'}{dt}(y-y') + \frac{dw'}{dt}(z-z')\right).$$

Ebenso findet man für die ganze vom Elemente $dx'dy'dz'$ im Punkte (x, y, z) *nach der Richtung der y- oder z-Axe* ausgeübte elektromotorische Kraft, indem man, als Werth von $\cos\theta'$, $\frac{y-y'}{r}$ oder $\frac{z-z'}{r}$ statt $\frac{x-x'}{r}$ setzt,

$$= -\frac{8}{cc} \cdot \frac{dx'dy'dz'}{r^3} \cdot (y-y')\left(\frac{du'}{dt}(x-x') + \frac{dv'}{dt}(y-y') + \frac{dw'}{dt}(z-z')\right)$$

oder

$$= -\frac{8}{cc} \cdot \frac{dx'dy'dz'}{r^3} \cdot (z-z')\left(\frac{du'}{dt}(x-x') + \frac{dv'}{dt}(y-y') + \frac{dw'}{dt}(z-z')\right).$$

Setzt man nun Kürze halber

$$U = \iiint \frac{dx'dy'dz'}{r^3}(x-x')\left(u'(x-x') + v'(y-y') + w'(z-z')\right) \quad (1)$$

$$V = \iiint \frac{dx'dy'dz'}{r^3}(y-y')\left(u'(x-x') + v'(y-y') + w'(z-z')\right) \quad (2)$$

$$W = \iiint \frac{dx'dy'dz'}{r^3}(z-z')\left(u'(x-x') + v'(y-y') + w'(z-z')\right) \quad (3)$$

so erhält man hienach die Componenten des *zweiten* Theils der elektromotorischen Kraft, welcher von der *Induction* in Folge von Aenderungen der Stromintensitäten in allen Theilen der Leitungskette herrührt,

$$= -\frac{8}{cc}\cdot\frac{dU}{dt}, \quad = -\frac{8}{cc}\cdot\frac{dV}{dt}, \quad = -\frac{8}{cc}\cdot\frac{dW}{dt}.$$

Die Componenten der *ganzen* elektromotorischen Kraft waren aber oben mit

$$A\cos\alpha, \quad A\cos 6, \quad A\cos\gamma$$

bezeichnet worden, wonach also

$$A\cos\alpha = -2\left(\frac{d\Omega}{dx} + \frac{4}{cc}\cdot\frac{dU}{dt}\right)$$

$$A\cos 6 = -2\left(\frac{d\Omega}{dy} + \frac{4}{cc}\cdot\frac{dV}{dt}\right)$$

$$A\cos\gamma = -2\left(\frac{d\Omega}{dz} + \frac{4}{cc}\cdot\frac{dW}{dt}\right)$$

erhalten wird. Setzt man endlich diese Werthe in die oben angeführten Gleichungen der Stromdichtigkeiten u, v, w im Punkte (x, y, z) ein, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$u = -2k\left(\frac{d\Omega}{dx} + \frac{4}{cc}\cdot\frac{dU}{dt}\right) \tag{4}$$

$$v = -2k\left(\frac{d\Omega}{dy} + \frac{4}{cc}\cdot\frac{dV}{dt}\right) \tag{5}$$

$$w = -2k\left(\frac{d\Omega}{dz} + \frac{4}{cc}\cdot\frac{dW}{dt}\right). \tag{6}$$

Für die Bestimmung des Werthes Ω der *Potentialfunction* der in der ganzen Kette vertheilten *freien* Elektricität im Punkte (x, y, z) kommt nun noch besonders in Betracht, dass die Dichtigkeit der *freien* Elektricität im Innern eines Leiters, in welchem Strombewegungen statt finden, nicht wie bei einem Leiter, in welchem die Elektricität sich in Ruhe befindet, $= 0$ gesetzt werden darf. Bezeichnet daher ε' die von Null verschiedene Dichtigkeit der *freien* Elektricität im Punkte (x', y', z'), wenn derselbe *im Innern* des Leiters liegt, e' dagegen, wenn dieser Punkt im Oberflächenelemente dS' liegt, bezeichnet also e' die Dichtigkeit der *freien* Elektricität im *Oberflächenelemente* dS', so erhält man folgende Bestimmung des Werthes von Ω, nämlich

$$\Omega = \iiint\frac{dx'dy'dz'}{r}\cdot\varepsilon' + \iint\frac{dS'}{r}\cdot e'. \tag{7}$$

Hiezu kommt nun noch, dass die Vertheilung der *freien* Elektricität sowohl *im Innern* als auch *an der Oberfläche* der ganzen Leitungskette,

welche durch die Werthe von ε' und e' bestimmt wird, zwar mit der Zeit sich ändern kann, dass aber diese Aenderungen von der *Bewegung* der Elektricität in der Kette abhängen, wonach es zwei Gleichungen geben muss, welche die *partiellen Differentialquotienten* von ε' und e' in Beziehung auf die Zeit in ihrer Abhängigkeit von der *Bewegung* der Elektricität darstellen.

Der Unterschied der in dem Zeitelemente dt in der Richtung der x-, y- und z-Axe aus dem Elemente $dx'dy'dz'$ austretenden positiven Elektricität von der darin eintretenden ist

$$dx'dy'dz' \, . \, \frac{du'}{dx'} dt \, , \quad dx'dy'dz' \, . \, \frac{dv'}{dy'} dt \, , \quad dx'dy'dz' \, . \, \frac{dw'}{dz'} dt \, .$$

Die *Summe* dieser Unterschiede giebt die *Verminderung* der im Elemente $dx'dy'dz'$ enthaltenen freien Elektricität $dx'dy'dz' \, . \, \varepsilon'$ im Zeitelemente dt, welche von der Bewegung der *positiven* Elektricität hervorgebracht wird. Aus der *entgegengesetzt gleichen Bewegung der negativen Elektricität* ergiebt sich aber nochmals eine ebenso grosse Verminderung für dasselbe Zeitelement dt; folglich ist jene Summe *die Hälfte der ganzen Verminderung* der im Elemente $dx'dy'dz'$ enthaltenen freien Elektricität im Zeitelemente dt, d. i. die *Hälfte* von $= - \, dx'dy'dz' \, . \, \frac{d\varepsilon'}{dt} dt$, also ist

$$\frac{du'}{dx'} + \frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'} = - \tfrac{1}{2} \frac{d\varepsilon'}{dt} \, . \qquad (8)$$

Bezeichnet man endlich die Winkel, welche die nach Innen gerichtete Normale des Oberflächenelements dS' mit der Richtung der x-, y- und z-Axe bildet, mit (N', x'), (N', y'), (N', z'), so ist die Menge der *positiven* Elektricität, welche in dem Zeitelemente dt von dem Oberflächenelemente dS' ins Innere zurückströmt,

$$= (u' \cos(N', x') + v' \cos(N', y') + w' \cos(N', z')) \, dS' \, . \, dt \, ,$$

und da eine gleiche Menge *negativer* Elektricität in derselben Zeit aus dem Innern zu dem Oberflächenelemente dS' hinströmt, so ergiebt sich, dass jene Menge die Hälfte der *ganzen Verminderung der freien Elektricität* $e'dS'$ in dem Oberflächenelemente dS' in dem Zeitelemente dt ist, d. i. $= - \tfrac{1}{2} \frac{de'}{dt} \, . \, dS'dt$, also ist

$$u' \cos(N', x') + v' \cos(N', y') + w' \cos(N', z') = - \tfrac{1}{2} \frac{de'}{dt} \, . \qquad (9)$$

So allgemein nun diese von Kirchhoff gegebene Entwickelung der Bewegungsgleichungen der Elektricität in einem beliebigen Leiter sonst auch ist, so liegen ihr doch folgende drei beschränkende Annah-

men zu Grunde, nämlich 1) die Annahme, wonach der Werth der elektromotorischen Kraft in einem Punkte, wie oben geschehen, bloss durch *Verdoppelung der auf die positive Elektricität wirkenden* Kraft bestimmt werden durfte, dass nämlich in allen Theilen des Leiters stets gleiche Mengen von positiver und negativer Elektricität enthalten wären, oder genauer, da dies streng genommen so viel heissen würde als dass die Dichtigkeit der freien Elektricität im Innern und an der Oberfläche des Leiters ε' und e' überall stets Null sein sollte, was nicht der Fall ist, dass wenigstens die vorhandene *freie* Elektricität gegen die Menge des an derselben Stelle vorhandenen *neutralen Gemisches* beider Elektricitäten stets als verschwindend klein betrachtet werden dürfe; 2) die Annahme, dass durch jeden Querschnitt gleichzeitig immer gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität in entgegengesetzter Richtung durchgehen, was nur dann anzunehmen gestattet ist, wenn man überall eine beliebige Bewegung des neutralen Fluidums hinzugefügt denken darf, aus dem Grunde nämlich, weil eine solche hinzugefügte Bewegung des neutralen Fluidums, wenn sie wirklich vorhanden wäre, gar keinen Einfluss auf die *Beobachtungen* haben würde; 3) die Annahme einer allgemeineren Geltung des Ohm'schen Gesetzes, welche, wie später gezeigt werden soll, auf die Annahme zurückgeführt werden kann, dass die *Masse* des elektrischen Fluidums gegen die *Masse* seines ponderabelen Trägers überall völlig verschwinde, was allerdings allgemein angenommen zu werden pflegt.

2.

Entwickelung des Ausdrucks der elektromotorischen Kraft, welche von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen in einem kleinen, als Cylinder betrachteten, Stücke des Leitungsdrahts auf irgend einen Punkt des mittleren Querschnitts dieses Stückes ausgeübt wird.

Zur näheren Bestimmung der elektromotorischen Kraft, welche in irgend einem Punkte des Leitungsdrahtes wirkt, ist es zweckmässig, dieselbe in zwei Theile zu scheiden, nämlich in den Theil, welcher von dem Elemente des Leitungsdrahts herrührt, in welchem der betrachtete Punkt selbst liegt, und in den Theil, welcher von allen übrigen Elementen herrührt, die in grösseren, messbaren Entfernungen von dem betrachteten Punkte liegen.

Das Element des Leitungsdrahts, in welchem der betrachtete Punkt selbst liegt, sei ein Cylinder, dessen Halbmesser im Vergleich mit seiner Länge sehr klein ist. Die Vertheilung der freien Elektricität sowohl wie der elektrischen Bewegungen in diesem Cylinder wird hiebei von Kirchhoff als *symmetrisch gegen die Cylinderaxe* angenommen.

In Beziehung auf die Coordinaten falle die x-Axe mit der Cylinderaxe zusammen und man setze

$$y = \varrho \cos \varphi \qquad y' = \varrho' \cos \varphi'$$
$$z = \varrho \sin \varphi \qquad z' = \varrho' \sin \varphi' .$$

Unterscheidet man ferner die Stromdichtigkeit in der Richtung der Cylinderaxe und senkrecht gegen die Cylinderaxe, so ist letztere, bei der angenommenen Symmetrie der Bewegungen, überall *radial*, d. i. ihre Richtung fällt in jedem Punkte mit dem durch diesen Punkt gelegten Cylinderradius zusammen. Hieraus folgt, wenn σ diese *radiale Stromdichtigkeit* im Punkte (x, y, z), σ' im Punkte (x', y', z') bezeichnet, dass

$$v = \sigma \cos \varphi \qquad v' = \sigma' \cos \varphi'$$
$$w = \sigma \sin \varphi \qquad w' = \sigma' \sin \varphi' ,$$

worin σ und σ' von φ und φ' unabhängige Werthe haben.

Durch Substitution dieser Werthe in den Ausdrücken von Ω und U im vorhergehenden Artikel erhält man, wenn α den Cylinderhalbmesser bezeichnet,

$$\Omega = \iiint \frac{dx' . \varrho' d\varrho' d\varphi'}{r} . \varepsilon' + \alpha \iint \frac{dx' d\varphi'}{r} . e' \qquad (1)$$

$$U = \iiint \frac{dx' . \varrho' d\varrho' d\varphi'}{r^3} (x - x') \Big(u' (x - x') + \sigma' (\varrho \cos (\varphi - \varphi') - \varrho') \Big) . \qquad (2)$$

Man erhält ferner durch diese Substitution

$$\frac{dv'}{dy'} = \frac{d . \sigma' \cos \varphi'}{dy'} ,$$

worin σ' für einen gegebenen Werth von x' bloss von der Variabelen ϱ' abhängt. Setzt man daher $\sigma' = f(\varrho') = f(\sqrt{(y'y' + z'z')})$, so findet man

$$\frac{dv'}{dy'} = \frac{d}{dy'} . \left(\frac{y' f(\sqrt{(y'y' + z'z')})}{\sqrt{(y'y' + z'z')}} \right) = \frac{y'y'}{\varrho'\varrho'} . \frac{d\sigma'}{d\varrho'} + \frac{\varrho'\varrho' - y'y'}{\varrho'^3} . \sigma' ,$$

Ebenso findet man

$$\frac{dw'}{dz'} = \frac{z'z'}{\varrho'\varrho'} . \frac{d\sigma'}{d\varrho'} + \frac{\varrho'\varrho' - z'z'}{\varrho'^3} . \sigma'$$

folglich

$$\frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'} = \frac{d\sigma'}{d\varrho'} + \frac{\sigma'}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho'} . \frac{d . \varrho'\sigma'}{d\varrho'} .$$

Fügt man noch $\frac{du'}{dx'}$ hinzu und substituirt für die Summe $\frac{du'}{dx'}+\frac{dv'}{dy'}+\frac{dw'}{dz'}$ den dafür erhaltenen Werth, in Gleichung (8) des vorhergehenden Artikels, so ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{du'}{dx}+\frac{1}{\varrho'}\cdot\frac{d.\varrho'\sigma'}{d\varrho'}=-\tfrac{1}{2}\frac{d\varepsilon'}{dt}\,. \tag{3}$$

Endlich findet man für die Winkel, welche die nach Innen gerichtete Normale des Oberflächenelements dS' mit der Richtung der drei Coordinatenaxen bildet, folgende Werthe:

$$(N',x')=\frac{\pi}{2}\,,\ (N',y')=\varphi'+\pi\,,\ (N',z')=\varphi'+\frac{\pi}{2}\,;$$

folglich ist

$$u'\cos(N',x')=0\,,\ v'\cos(N',y')=-\sigma'\cos\varphi'^2,\ w'\cos(N',z')=-\sigma'\sin\varphi'^2.$$

Durch Substitution dieser Werthe in Gleichung (9) des vorhergehenden Artikels ergiebt sich dann

$$\sigma'=\tfrac{1}{2}\frac{de'}{dt}\,. \tag{4}$$

Setzt man nun Kürze halber

$$x'-x=\lambda\,,\ \text{also } dx'=d\lambda$$
$$\varrho^2+\varrho'^2-2\varrho\varrho'\cos(\varphi-\varphi')=6^2\,,\ \text{also } r^2=6^2+\lambda^2\,,$$

so ist, wenn l die Länge des Cylinders bezeichnet und der Punkt (x,y,z) in dem diese Länge halbirenden Querschnitt liegt, nach Gleichung (1) und (2)

$$\Omega=\iint\varrho'd\varrho'd\varphi'\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l}\frac{\varepsilon'd\lambda}{\sqrt{(6^2+\lambda^2)}}+\alpha\int d\varphi'\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l}\frac{e'd\lambda}{\sqrt{(6^2+\lambda^2)}}$$

$$U=\iint\varrho'd\varrho'd\varphi'\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l}\frac{u'\lambda^2d\lambda}{(6^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}+\iint\varrho'^2\left(1-\frac{\varrho}{\varrho'}\cos(\varphi-\varphi')\right)d\varrho'd\varphi'\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l}\frac{\sigma'\lambda d\lambda}{(6^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Entwickelt man nun in der erstern Gleichung ε' und e' nach Potenzen von λ, nämlich

$$e'=e\ +\frac{de}{dx}\cdot\lambda+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{d^2e}{dx^2}\cdot\lambda^2+\ldots$$
$$\varepsilon'=\varepsilon'_0+\frac{d\varepsilon'_0}{dx}\cdot\lambda+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{d^2\varepsilon'_0}{dx^2}\cdot\lambda^2+\ldots$$

wo ε'_0, abgesehen von der Zeit, bloss von der Variabelen ϱ' abhängt; so kann für sehr kleine Werthe von $\frac{6^2}{l^2}$, welche, da 6^2 nie grösser als $4\alpha^2$ sein kann, aus kleinen Werthen von $\frac{\alpha}{l}$ nothwendig folgen,

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l}\frac{d\lambda}{\sqrt{(6^2+\lambda^2)}} = 2\log\frac{l}{6}\,,\quad \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l}\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{(6^2+\lambda^2)}} = 0\,,\quad \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l}\frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{(6^2+\lambda^2)}} = \tfrac{1}{4}l^2$$

gesetzt werden, woraus für kleine Werthe von l folgt

$$\Omega = \iint \varrho' d\varrho' d\varphi' \left(2\varepsilon'_0 \log\frac{l}{6} + \tfrac{1}{8}\frac{d^2\varepsilon'_0}{dx^2}l^2\right) + \alpha\int d\varphi' \left(2e\log\frac{l}{6} + \tfrac{1}{8}\frac{d^2 e}{dx^2}l^2\right)$$

Die Integration ist von $\varphi' = 0$ bis $\varphi' = 2\pi$ und von $\varrho' = 0$ bis $\varrho' = \alpha$ zu erstrecken, wonach sich also ergiebt

$$\Omega = 2\pi\int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \left(2\varepsilon'_0 \log l + \tfrac{1}{8}\frac{d^2\varepsilon'_0}{dx^2}l^2\right) + 2\pi\alpha\left(2e\log l + \tfrac{1}{8}\frac{d^2 e}{dx^2}l^2\right)$$

$$- 2\int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \,.\, \varepsilon'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \,.\, \log 6 - 2\alpha e\int_0^{2\pi} d\varphi' \,.\, \log 6$$

Beachtet man nun, dass $\int_0^{2\pi} d\varphi' \,.\, \log 6 = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi' \,.\, \log(\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho'\cos(\varphi - \varphi'))$ entweder $= 2\pi\log\varrho'$ ist, wenn $\varrho' > \varrho$, oder $= 2\pi\log\varrho$ ist, wenn $\varrho > \varrho'$, so erhält man den auf die *Oberfläche* bezüglichen Theil, für welchen $\varrho' = \alpha$ ist,

$$- 2\alpha e\int_0^{2\pi} d\varphi' \,.\, \log 6 = - 4\pi\alpha e \log\alpha\,.$$

Der auf das *Innere* sich beziehende Theil zerfällt in zwei Stücke, nämlich

$$-2\int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \,.\, \varepsilon'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \,.\, \log 6 = - 4\pi\log\varrho\int_0^\varrho \varrho' d\varrho' \,.\, \varepsilon'_0 - 4\pi\int_\varrho^\alpha \varrho' d\varrho' \,.\, \varepsilon'_0 \log\varrho'\,,$$

reducirt sich also in dem einen Grenzfalle, nämlich wenn $\varrho = \alpha$ ist, auf

$$- 4\pi\log\alpha \,.\int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \,.\, \varepsilon'_0\,,$$

in dem andern Grenzfalle, nämlich wenn $\varrho = 0$ ist, auf

$$- 4\pi\int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \,.\, \varepsilon'_0 \log\varrho'\,,$$

die beide desto weniger von einander verschieden sind, je kleiner α *).

---

*) ε'_0 nähert sich bei der angenommenen symmetrischen Vertheilung der freien Elektricität im Drahte mit abnehmenden Werthen von ϱ' der *Constans*. Ist es hienach

so dass man mit hinreichender Genauigkeit für sehr kleine Werthe von α den auf das Innere sich beziehenden Theil

$$2\int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \,.\, \varepsilon'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \,.\, \log 6 = -\, 4\pi \log \alpha \,.\int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \,.\, \varepsilon'_0$$

setzen kann; folglich

$$\Omega = 2\pi \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \left(2\varepsilon'_0 \log l + \tfrac{1}{8}\tfrac{d^2\varepsilon'_0}{dx^2} l^2\right) + 2\pi\alpha \left(2e \log l + \tfrac{1}{8}\tfrac{d^2 e}{dx^2} l^2\right)$$
$$-\, 4\pi \log \alpha \,.\left(\alpha e + \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \,.\, \varepsilon'_0\right)$$

oder kürzer

$$\Omega = 4\pi \log \tfrac{l}{\alpha} \,.\left(\alpha e + \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \,.\, \varepsilon'_0\right) + \tfrac{1}{4}\pi l^2 .\left(\alpha \tfrac{d^2 e}{dx^2} + \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \,.\, \tfrac{d^2\varepsilon'_0}{dx^2}\right).$$

Setzt man endlich hierin

$$2\pi\alpha e + 2\pi \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \,.\, \varepsilon'_0 = E\,,$$

das heisst, bezeichnet man mit Edx die Menge der *freien* Elektricität, die in dem Leiterelemente dx, theils an seiner Oberfläche theils im Innern, enthalten ist, so erhält man durch zweimalige Differentiation

$$2\pi\alpha \,.\, \tfrac{d^2 e}{dx^2} + 2\pi \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \,.\, \tfrac{d^2\varepsilon'_0}{dx^2} = \tfrac{d^2 E}{dx^2}\,,$$

folglich

$$\Omega = 2E \log \tfrac{l}{\alpha} + \tfrac{1}{8}\tfrac{d^2 E}{dx^2} \,.\, l^2\,. \tag{5}$$

Ebenso können nun auch in der oben gefundenen Gleichung für U die Werthe von u' und σ' nach Potenzen von λ entwickelt werden, nämlich

---

für kleine Werthe von α gestattet, ε'_0 für alle Werthe von $\varrho' < \alpha$ *constant* zu setzen, so geht der für den erstern Grenzfall gefundene Werth über in

$$-\, 4\pi\varepsilon'_0 \log \alpha \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' = -\, 2\pi\alpha\alpha\varepsilon'_0 \log \alpha$$

der für den letzteren Grenzfall in

$$-\, 4\pi\varepsilon'_0 \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' \log \varrho' = -\, 2\pi\alpha\alpha\varepsilon'_0 \,(\log \alpha - \tfrac{1}{2})$$

die sich von einander desto weniger unterscheiden, je kleiner α ist.

$$u' = u'_0 + \frac{du'_0}{dx} . \lambda + \frac{1}{1.2} . \frac{d^2u'_0}{dx^2} . \lambda^2 + \ldots$$

$$\sigma' = \sigma'_0 + \frac{d\sigma'_0}{dx} . \lambda + \frac{1}{1.2} . \frac{d^2\sigma'_0}{dx^2} . \lambda^2 + \ldots$$

wo u'_0 und σ'_0 für einen gegebenen Werth von x', abgesehen von der Zeit, bloss von der Variabelen ϱ' abhängen.

Nun kann für sehr kleine Werthe von $\frac{6^2}{l^2}$, wie sie sehr kleinen Werthen von $\frac{\alpha^2}{l^2}$ entsprechen,

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\lambda d\lambda}{(6^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}} = 0 \,, \quad \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\lambda^2 d\lambda}{(6^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\left(\log\frac{l}{6} - 1\right) = 2\log\frac{l}{e6} \,,$$

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\lambda^3 d\lambda}{(6^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \,, \quad \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\lambda^4 d\lambda}{(6^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{1}{4} l^2$$

gesetzt werden, worin e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Hienach ergiebt sich folgende Gleichung für U:

$$U = \iint \varrho' d\varrho' d\varphi' . \left(2u'_0 . \log\frac{l}{e6} + \tfrac{1}{8}\frac{d^2u'_0}{dx^2} . l^2\right) + \iint \varrho'^2 \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho'}\cos(\varphi-\varphi')\right) d\varrho' d\varphi' \left(2\frac{d\sigma'_0}{dx}\log\frac{l}{e6} + \tfrac{1}{24}\frac{d^3\sigma'_0}{dx^3} l^2\right).$$

Der letztere Theil dieses Werthes von U kann, wenn α sehr klein ist, da die Integration nach ϱ' von $\varrho' = 0$ bis $\varrho' = \alpha$ zu erstrecken ist, als verschwindend betrachtet werden, folglich

$$U = \iint \varrho' d\varrho' d\varphi' . \left(2u'_0 \log\frac{l}{e6} + \tfrac{1}{8}\frac{d^2u'_0}{dx^2} l^2\right) ,$$

wo die Integration von $\varphi' = 0$ bis $\varphi' = 2\pi$ und von $\varrho' = 0$ bis $\varrho' = \alpha$ zu erstrecken ist, also

$$U = 2\pi \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . \left(2u'_0 \log\frac{l}{e} + \tfrac{1}{8}\frac{d^2u'_0}{dx^2} . l^2\right) - 2\int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . u'_0 \int_0^{2\pi} d\varphi' \log 6 .$$

Da nun $\int_0^{2\pi} d\varphi' . \log 6 = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi' . \log(\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho'\cos(\varphi-\varphi'))$ entweder $= 2\pi\log\varrho'$ ist, wenn $\varrho' > \varrho$, oder $= 2\pi\log\varrho$ ist, wenn $\varrho > \varrho'$, so ergiebt sich

$$U = 2\pi\int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . \left(2u'_0 \log\frac{l}{e} + \tfrac{1}{8}\frac{d^2u'_0}{dx^2} l^2\right) - 4\pi\log\varrho \int_0^\varrho \varrho' d\varrho' . u'_0 - 4\pi\int_\varrho^\alpha \varrho' d\varrho' . u'_0 \log\varrho' ,$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$U = 4\pi \log \frac{l}{e\alpha} . \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . u'_0 + \tfrac{1}{4}\pi l^2 \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . \frac{d^2 u'_0}{dx^2} + 4\pi \log \frac{\alpha}{\varrho} . \int_0^\varrho \varrho' d\varrho' . u'_0 + 4\pi \int_\varrho^\alpha \varrho' d\varrho' . u'_0 \log \frac{\alpha}{\varrho} .$$

Da nun aber, wenn α sehr klein ist, die beiden letzten Theile dieses Werthes von U gegen den ersten Theil als verschwindend betrachtet werden dürfen, so kann

$$U = 4\pi \log \frac{l}{e\alpha} . \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . u'_0 + \tfrac{1}{4}\pi l^2 . \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . \frac{d^2 u'_0}{dx^2}$$

gesetzt werden.

Setzt man endlich hierin

$$2\pi \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . u'_0 = i ,$$

das heisst, bezeichnet man mit idt die Menge der positiven Elektricität, welche in dem Zeitelemente dt durch den Querschnitt des Leitungsdrahts fliesst, wo also i die Stromintensität nach mechanischem Maasse ausdrückt, so erhält man durch zweimalige Differentiation

$$2\pi \int_0^\alpha \varrho' d\varrho' . \frac{d^2 u'_0}{dx^2} = \frac{d^2 i}{dx^2} ,$$

folglich

$$U = 2i \log \frac{l}{e\alpha} + \tfrac{1}{8} \frac{d^2 i}{dx^2} . l^2 .$$

Hienach wird nun die elektromotorische Kraft, welche von der *freien Elektricität* in einem kleinen, als Cylinder betrachteten, Stücke des Leitungsdrahts auf irgend einen Punkt des mittleren Querschnitts dieses Stückes ausgeübt wird, näher bestimmt, nämlich aus dem Werthe von Ω,

$$-2 \frac{d\Omega}{dx} = -4 \frac{dE}{dx} . \log \frac{l}{\alpha} - \tfrac{1}{4} \frac{d^2 E}{dx^2} . l^2$$

und ebenso die elektromotorische Kraft, welche durch *Induction* von den *elektrischen Bewegungen* in demselben Stücke auf denselben Punkt ausgeübt wird, nämlich aus dem Werthe von U,

$$-\frac{8}{cc} \frac{dU}{dt} = -\frac{16}{cc} . \frac{di}{dt} . \log \frac{l}{e\alpha} - \frac{1}{cc} . \frac{d^2 i}{dx^2 dt} . l^2 .$$

Endlich kann, wenn man mit Kirchhoff für den Werth von $\log \frac{l}{\alpha}$ eine sehr grosse Zahl annimmt,

$$-2\,\frac{d\Omega}{dx} = -4\,\frac{dE}{dx}\cdot\log\frac{l}{\alpha}$$

$$-\frac{8}{cc}\,\frac{dU}{dt} = -\frac{16}{cc}\cdot\frac{di}{dt}\cdot\log\frac{l}{e\alpha}$$

oder auch, wenn 1 gegen $\log\frac{l}{\alpha}$ ganz verschwindet,

$$-\frac{8}{cc}\,\frac{dU}{dt} = -\frac{16}{cc}\cdot\frac{di}{dt}\cdot\log\frac{l}{\alpha}$$

gesetzt werden.

3.

Vereinfachung der allgemeinen Gleichungen.

Nach näherer Bestimmung der auf einen Punkt (x, y, z) des Leitungsdrahts wirkenden elektromotorischen Kräfte, welche theils von der freien Elektricität theils von den elektrischen Bewegungen in dem kleinen, als Cylinder zu betrachtenden Stücke des Leitungsdrahts, zu welchem jener Punkt selbst gehört, herrühren, hat Kirchhoff die Art. 1 aufgestellten allgemeinen Gleichungen unter folgenden Voraussetzungen zu vereinfachen gesucht, nämlich

1) dass der Halbmesser des Leitungsdrahts α im Vergleich mit der Länge seiner als cylindrisch zu betrachtenden Elemente l so klein sei, dass $\log\frac{l}{\alpha}$ eine sehr grosse Zahl darstelle, was schon im vorhergehenden Artikel zur Vereinfachung des Ausdrucks der elektromotorischen Kräfte angenommen wurde;

2) dass in einem solchen dünnen Leitungsdrahte die auf einen Punkt (x, y, z) wirkenden elektromotorischen Kräfte, welche von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen im ganzen Leitungsdrahte mit Ausnahme des einzigen kleinen, als Cylinder zu betrachtenden Stückes, dessen mittelstem Querschnitte der Punkt (x, y, z) angehört, herrühren, verschwindend klein seien gegen diejenigen auf denselben Punkt wirkenden elektromotorischen Kräfte, welche von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen in dem eben bezeichneten kleinen Stücke selbst herrühren. — Hiezu kommt noch die auch der Entwickelung der allgemeinen Gleichungen Art. 1 schon zum Grunde gelegte Voraussetzung, .

3) dass das Ohm'sche Gesetz für alle Stromelemente einzeln gelte, auch wenn die Stromintensitäten in denselben sehr verschieden sind und schnell wechseln.

Ist nun nach der *ersten* Voraussetzung $\log\frac{l}{\alpha}$ eine sehr grosse Zahl, und kommen nach der *zweiten* Voraussetzung die im vorigen Artikel näher bestimmten elektromotorischen Kräfte, gegen welche die übrigen von den ferner liegenden Stücken des Leitungsdrahts herrührenden verschwindend klein sind, allein in Betracht; so findet man nach dem Schlusse des vorigen Artikels den *vollständigen Ausdruck der elektromotorischen Kraft* nach der Richtung der Axe des Leitungsdrahts

$$-2\left(\frac{d\Omega}{dx}+\frac{4}{cc}\frac{dU}{dt}\right)=-4\log\frac{l}{\alpha}\left(\frac{dE}{dx}+\frac{4}{cc}\frac{di}{dt}\right).$$

Ist dieses nun der Ausdruck der ganzen elektromotorischen Kraft, so giebt derselbe nach Art. 1 mit dem specifischen Leitungsvermögen k multiplicirt, der *dritten* Voraussetzung gemäss, die Stromdichtigkeit u nach der Richtung des Leitungsdrahts in dem betrachteten Punkte (x, y, z), nämlich

$$u=-4k\log\frac{l}{\alpha}\cdot\left(\frac{dE}{dx}+\frac{4}{cc}\frac{di}{dt}\right).$$

Beachtet man endlich, dass die Stromdichtigkeit im Punkte (x, y, z) hienach von ϱ unabhängig, folglich für alle Punkte desselben Drahtquerschnitts gleich ist, und daher mit dem Drahtquerschnitt $\pi\alpha\alpha$ multiplicirt die Stromintensität i giebt; so erhält man durch Multiplication der vorhergehenden Gleichung mit $\pi\alpha\alpha$ folgende aus den sieben ersten Art. 1 entwickelten allgemeinen Gleichungen abgeleitete Gleichung:

$$i=-4\pi\alpha\alpha k\log\frac{l}{\alpha}\left(\frac{dE}{dx}+\frac{4}{cc}\frac{di}{dt}\right).$$

Es bleiben also nur noch die beiden letzten von den Art. 1 entwickelten allgemeinen Gleichungen übrig, welche Art. 2 reducirt worden sind auf

$$\frac{du}{dx}+\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d.\varrho\sigma}{d\varrho}=-\frac{1}{2}\frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\sigma=\frac{1}{2}\frac{de}{dt}.$$

Multiplicirt man die erstere mit $\varrho d\varrho d\varphi$ und integrirt sodann über den ganzen Querschnitt des Leitungsdrahts, und zieht endlich die mit $2\pi\alpha$ multiplicirte zweite Gleichung ab, so erhält man

$$\pi\alpha\alpha\cdot\frac{du}{dx}=-\pi\alpha\cdot\frac{de}{dt}-\pi\int_0^\alpha\varrho d\varrho\cdot\frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Da nun aber, nach Art. 2 für $\varrho' = \varrho$,

$$2\pi ae + 2\pi\int_0^a \varrho d\varrho \,.\, \varepsilon = E\,,$$

woraus

$$2\pi a\,.\,\frac{de}{dt} + 2\pi\int_0^a \varrho d\varrho\,.\,\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{dE}{dt}\,,$$

so ergiebt sich, da $\pi aau = i$ war, woraus $\pi aa\,.\,\frac{du}{dx} = \frac{di}{dx}$ folgt, aus den beiden letzten Art. 1 entwickelten Gleichungen folgende:

$$\frac{di}{dx} = -\tfrac{1}{2}\frac{dE}{dt}\,.$$

Nach dieser Reduction der neun allgemeinen Gleichungen auf zwei, nämlich

$$i = -4\pi aak\log\frac{l}{a}\,.\left(\frac{dE}{dx} + \frac{4}{cc}\frac{di}{dt}\right)$$
$$\frac{di}{dx} = -\tfrac{1}{2}\frac{dE}{dt}$$

kann endlich, durch Elimination von i, das Gesetz abgeleitet werden, nach welchem die Vertheilung der freien Elektricität in der Kette E sich für jeden Augenblick bestimmen lässt, nämlich

$$\frac{d^2E}{dt^2} - \frac{cc}{2}\frac{d^2E}{dx^2} + \frac{cc}{16\pi aak\log\frac{l}{a}}\,.\,\frac{dE}{dt} = 0\,,$$

oder es kann, durch Elimination von E, das Gesetz abgeleitet werden, nach welchem die Stromintensität i sich für jeden Punkt der Kette und für jeden Augenblick bestimmen lässt, nämlich

$$\frac{d^2i}{dt^2} - \frac{cc}{2}\frac{d^2i}{dx^2} + \frac{cc}{16\pi aak\log\frac{l}{a}}\,.\,\frac{di}{dt} = 0\,.$$

Die Vertheilung der freien Elektricität, sowie die Stromintensitäten in allen Theilen des Leitungsdrahts würden sich aber, wie man leicht sieht, auch aus den *Bewegungen* aller elektrischen Theilchen im Leitungsdraht von selbst ergeben haben, wenn das Gesetz der letzteren bekannt wäre. Umgekehrt lässt sich nun dieses letztere Gesetz aus dem gefundenen Gesetz der Vertheilung und der Stromintensitäten leicht ableiten, wobei es genügt, dasselbe für die Bewegungen aller *positiv* elektrischen Theilchen im Leitungsdrahte aufzustellen, weil die entgegengesetzt gleichen Bewegungen aller *negativ* elektrischen Theilchen sich daraus von selbst ergeben.

Bezeichnet s irgend einen Punkt des Leitungsdrahts und $\mathfrak{E}ds$ die ganze Menge positiver Elektricität, welche in dem Längenelement des Leitungsdrahts ds enthalten ist, bezeichnet ferner σ die Verschiebung eines Theilchens dieser positiven Elektricität nach der Zeit t von der Stelle seines ursprünglichen Gleichgewichts, also $\frac{d\sigma}{dt}$ die Geschwindigkeit, mit welcher sich dieses Theilchen im Leitungsdrahte bewegt, und $\frac{d\sigma}{ds}$ die Verdünnung der positiven Elektricität im Punkte s des Leitungsdrahts am Ende der Zeit t, der eine ebenso grosse Verdichtung der negativen Elektricität immer entspricht; so ist die Stromintensität i im Punkte des Leitungsdrahts s am Ende der Zeit t dem Producte $\mathfrak{E}\frac{d\sigma}{dt}$ gleich, und die Dichtigkeit E der *freien Elektricität*, d. i. des Ueberschusses der positiven Elektricität über die negative im Elemente ds, am Ende der Zeit t, ist dem doppelten Producte $\mathfrak{E}\frac{d\sigma}{ds}$ negativ genommen gleich, also

$$i = \mathfrak{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt}, \quad E = -2\mathfrak{E} \cdot \frac{d\sigma}{ds}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die vorhergehenden Gleichungen erhält man aber die beiden Gleichungen

$$\frac{d^3\sigma}{dt^3} - \frac{cc}{2}\frac{d^3\sigma}{ds^2dt} + \frac{cc}{16\pi aak\log\frac{l}{\alpha}} \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^3\sigma}{dsdt^2} - \frac{cc}{2}\frac{d^3\sigma}{ds^3} + \frac{cc}{16\pi aak\log\frac{l}{\alpha}} \cdot \frac{d^2\sigma}{dsdt} = 0$$

woraus mit Rücksicht darauf, dass während des ursprünglichen Gleichgewichts der Elektricität σ im ganzen Leitungsdraht überall $= 0$ war, das Gesetz der Bewegung aller *positiv* elektrischen Theilchen im Leitungsdraht folgt, nämlich

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \frac{cc}{2}\frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{cc}{16\pi aak\log\frac{l}{\alpha}} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = 0.$$

4.

Prüfung der im vorigen Artikel gemachten Voraussetzungen.

Im Anfang des vorigen Artikels sind die zur Vereinfachung der Gleichungen gemachten Voraussetzungen zusammengestellt worden, wovon die eine schon der Art. 1 gegebenen Entwickelung zum Grunde gelegt war. Was zunächst nun die erste der Vereinfachung halber neu

hinzugekommene Annahme betrifft, nämlich die Annahme eines sehr feinen Leitungsdrahts, so scheint dieselbe so nahe zu liegen, dass sie kaum einer näheren Prüfung bedürfe, sondern, wenn es sich um Vereinfachung handelt, sich von selbst verstehe; doch näher betrachtet sieht man leicht, dass diese Feinheit des Leitungsdrahts hiebei in solchem Grade in Anspruch genommen wird und werden muss, wie sie wirklich nie statt findet, so dass dadurch alle praktische Anwendbarkeit der daraus abgeleiteten Folgerungen zweifelhaft wird. Es kommt aber dazu noch das besondere Bedenken, ob nicht ausserdem diese Voraussetzung mit der der Entwicklung Art. 1 zum Grunde gelegten, das Ohm'sche Gesetz betreffenden, Voraussetzung in Widerspruch gerathe, weil letztere auf weniger feine Leitungsdrähte beschränkt werden zu müssen scheint.

Findet es nämlich bei linearen Leitern auch kein Bedenken, die Dicke des Leitungsdrahts gegen seine ganze Länge als verschwindend zu betrachten, so sagt es doch schon weit mehr, diese Dicke gegen die Länge eines einzelnen noch als geradlinig zu betrachtenden Elements des Leitungsdrahts als verschwindend zu betrachten, und noch weit mehr heisst es, den Logarithmus des Verhältnisses der Länge eines so kleinen Elements zu jener Dicke als eine grosse Zahl anzunehmen, gegen welche die Einheit als verschwindend zu betrachten sei, wie es in jener Voraussetzung geschieht. Denn nähme man auch z. B. nur die Zahl 20 als eine solche Zahl an, so würde schon ein Draht verlangt werden, dessen kleinstes noch als geradlinig zu betrachtende Stück über 200 Millionen Mal länger als dick sein müsste, was nicht vorkommt.

Noch wichtiger aber ist das andere Bedenken, ob nicht die Annahme eines so feinen Leitungsdrahts, wenn er existirte, mit der das Ohm'sche Gesetz betreffenden Voraussetzung in Widerspruch gerathen würde. Es muss jedenfalls wenigstens als zweifelhaft betrachtet werden, ob diese letztere Voraussetzung *allgemein und streng gültig*, oder ob sie nur *für weniger feine Drähte näherungsweise zulässig ist*, und dieser Zweifel kann, wie man leicht einsieht, nur durch eine von dieser Voraussetzung selbst unabhängige Entwickelung der elektrischen Bewegungsgesetze gehoben werden. Es soll daher eine solche Entwickelung zu geben versucht werden, wenigstens in so weit als es zur Prüfung des angeführten Bedenkens nöthig erscheint, unter vorläufiger Beibehaltung der ersteren Voraussetzung, nämlich eines so feinen Leitungs-

drahts, dass der Logarithmus des Verhältnisses der Länge der noch als geradlinig zu betrachtenden Elemente zu ihrer Dicke so gross sei, dass die Einheit dagegen vernachlässigt werden könne. Diese Entwickelung beruht auf folgender Betrachtung.

Wenn alle Kräfte wirklich bekannt wären, welche auf die elektrischen Theilchen im Leitungsdrahte wirken, und diese Kräfte sämmtlich nach bekannten mechanischen Maassen genau ausgedrückt wären, so würde *die Möglichkeit einer von der Voraussetzung des Ohm'schen Gesetzes ganz unabhängigen Entwickelung der Bewegungsgesetze* dieser elektrischen Theilchen im Leitungsdrahte von selbst einleuchten; denn die Resultante aller auf irgend ein Theilchen wirkenden Kräfte dividirt durch die Beschleunigung des Theilchens in der Richtung der Resultante muss, wie bei allen Körpern, einen stets gleichen Quotienten geben, welcher in der allgemeinen Mechanik als *Masse des Theilchens* bezeichnet wird.

5.

Von der Voraussetzung des Ohm'schen Gesetzes unabhängige Herleitung der Bewegungsgleichung.

Hienach suchen wir also zunächst alle auf ein elektrisches Theilchen im Leitungsdraht wirkenden Kräfte aufzuzählen und nach mechanischem Maasse auszudrücken, nämlich

1) die aus der Nähe wirkenden, schon von Kirchhoff bestimmten elektrischen Kräfte, aus denen, unter der von der Feinheit des Leitungsdrahts gemachten Voraussetzung, für einen Punkt s des Leitungsdrahts die elektromotorische Kraft nach mechanischem Maasse ausgedrückt

$$= -4 \log \frac{l}{\alpha} . \left(\frac{dE}{ds} + \frac{4}{cc}\frac{di}{dt}\right)$$

resultirte. Diese elektromotorische Kraft ist die Differenz der beiden Kräfte, welche auf die positive und auf die negative elektrische Maasseinheit (wie sie in der Elektrostatik definirt wird) wirken würden, wenn sie sich in diesem Punkte befänden. Da diese beiden Kräfte, abgesehen davon dass sie entgegengesetzte Richtung haben, gleich sind, so ergiebt sich dass die Hälfte jener elektromotorischen Kraft, nämlich

$$-2 \log \frac{l}{\alpha} . \left(\frac{dE}{ds} + \frac{4}{cc}\frac{di}{dt}\right)$$

die Kraft ist, welche auf jede positive elektrische Maasseinheit im Punkte s

wirkt. Die Zahl der positiv elektrischen Maasseinheiten, welche in dem Längenelemente des Leitungsdrahts ds enthalten ist, ist aber früher, im dritten Artikel, mit $\mathfrak{E}ds$ bezeichnet worden, wobei zugleich bemerkt worden, dass $\mathfrak{E}\frac{d\sigma}{dt} = i$ und $-2\mathfrak{E}\frac{d\sigma}{ds} = E$ ist. Multiplicirt man daher obige Kraft mit der Zahl $\mathfrak{E}ds$ und substituirt die eben angegebenen Werthe, so erhält man die auf die positive Elektricität im Elemente ds wirkende Kraft nach mechanischem Maasse ausgedrückt

$$= 4\mathfrak{E}\mathfrak{E} \log\frac{l}{\alpha} \cdot \left(\frac{d^2\sigma}{ds^2} - \frac{2}{cc}\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right) \cdot ds\,.$$

Zu diesen schon vorher bestimmten Kräften müssen aber ferner noch

2) die von den ponderabelen Leitertheilchen auf die positive Elektricität im Elemente ds ausgeübten Kräfte hinzugefügt werden, welche wir auf folgende Weise zu bestimmen suchen.

Nach dem Ohm'schen, für *beharrliche* Ströme bewiesenen, Gesetze ist, wie Art. 1 in der Note gezeigt worden, die von den ponderabelen Theilchen des Leitungsdrahtes unabhängige elektromotorische Kraft in einem Punkte der Kette $= \frac{u}{k}$, oder, da nach Art. 3 $\pi\alpha\alpha u = i$ ist, $= \frac{i}{\pi\alpha\alpha k}$. Die *Beharrlichkeit* des Stromes, d. i. die gleichbleibende Geschwindigkeit der elektrischen Theilchen im Leitungsdrahte, beweist aber, dass ausser dieser von den ponderabelen Theilchen unabhängigen elektromotorischen Kraft noch eine zweite an Grösse gleiche, an Richtung entgegengesetzte elektromotorische Kraft vorhanden sein müsse, welche offenbar von der Wirkung der ponderabelen Leitertheilchen auf die Elektricität im Leiter herrühren muss, welche dadurch also

$$= -\frac{i}{\pi\alpha\alpha k}$$

gegeben ist. Die Hälfte dieser elektromotorischen Kraft, nämlich

$$-\frac{i}{2\pi\alpha\alpha k}$$

ist dann, wie aus dem vorher Gesagten einleuchtet, die Kraft, welche von den ponderabelen Leitertheilchen auf jede positiv elektrische Maasseinheit in dem betrachteten Punkte s ausgeübt wird. Multiplicirt man daher diese Kraft mit der Zahl der positiv elektrischen Maasseinheiten $\mathfrak{E}ds$, die im Elemente ds enthalten sind, so findet man die von den ponderabelen Leitertheilchen auf die im Elemente ds enthaltene positive Elektricität ausgeübte Kraft, nach mechanischem Maasse ausgedrückt, nämlich, wenn man auch hier, wie vorher, $\mathfrak{E}\frac{d\sigma}{dt}$ für i substituirt,

$$= -\frac{1}{2\pi aak} . \mathfrak{E}\mathfrak{E} . \frac{d\sigma}{dt} . ds .$$

Beachtet man endlich, dass die Fälle *nicht beharrlicher* Ströme von denen *beharrlicher* Ströme sich nur in solchen Beziehungen unterscheiden, die ihren Grund in Verschiedenheiten der Wechselwirkung *der elektrischen Theilchen unter einander* haben, wovon die aus der Wechselwirkung *der ponderabelen Leitertheilchen auf die elektrischen* herrührenden Kräfte in keiner unmittelbaren Abhängigkeit stehen, so scheint man berechtigt, das angegebene Gesetz zur Bestimmung dieser letzteren Kräfte, wenn es in allen Fällen *beharrlicher* Ströme gilt, als allgemein gültig, auch in den Fällen *nicht beharrlicher* Ströme anzunehmen.

Um alle Kräfte in Rechnung zu bringen, welche auf das betrachtete elektrische Theilchen im Leitungsdrahte wirken, fassen wir endlich

3) alle aus der Ferne wirkenden Kräfte, woher sie rühren mögen, zusammen, und begreifen darunter namentlich auch alle Kräfte, welche von der Wechselwirkung der Elektricität mit Ausnahme der in dem Elemente ds selbst enthaltenen, in welchem der betrachtete Punkt liegt, auf die Elektricität in dem betrachteten Punkte herrühren, welche von Kirchhoff als verschwindend klein angenommen worden sind. Die daraus entspringende elektromotorische Kraft im Punkte s bezeichnen wir, nach mechanischem Maasse, mit S, deren Hälfte dann mit $\mathfrak{E}ds$ multiplicirt die auf die positive Elektricität im Elemente ds ausgeübte Kraft nach mechanischem Maasse ausgedrückt

$$= \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{E}Sds$$

giebt.

Da alle diese Kräfte nach mechanischem Maasse, das heisst in Theilen derjenigen Kraft ausgedrückt sind, welche der ponderabelen Masseneinheit (der Masse eines Milligramms) in der Zeiteinheit (in der Zeit einer Secunde) die Einheit der Geschwindigkeit (ein Millimeter in einer Secunde) ertheilt; so folgt daraus, nach dem bekannten für alle Körper gültigen Bewegungsgesetze, dass der Quotient aus der Summe aller dieser gleichgerichteten Kräfte dividirt durch die Beschleunigung, d. i. durch die Geschwindigkeit, welche diese Summe von Kräften der positiven Elektricität im Elemente ds, auf welche sie wirkt, während der Zeiteinheit ertheilen würde, nämlich

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} ,$$

die Definition der *Masse* der im Elemente *ds* enthaltenen positiven Elektricität, in dem für alle Körper festgesetzten Massenmaasse (Milligramm) ausgedrückt, giebt.

Es ist bemerkenswerth, dass man hiedurch auf eine neue Art *absoluter Bestimmung einer Elektricitätsmenge* geführt wird, worüber folgende Bemerkung, zur Vergleichung dieser neuen Art *absoluter Bestimmung* mit den schon bekannten hier der Anwendung auf vorliegende Betrachtung wegen Platz finden möge.

Ordnet man nämlich die verschiedenen Arten *absoluter Bestimmungen* einer Elektricitätsmenge nach der Genauigkeit, welche sie in der Ausführung gestatten, so sind ohne Zweifel die *absoluten Bestimmungen auf galvanometrischem Wege* obenan zu stellen, durch welche eine als Bestandtheil des *neutralen Fluidums* vorhandene Elektricitätsmenge, die aus einem Raume in einen andern übergegangen ist, in Theilen derjenigen Elektricitätsmenge ausgedrückt erhalten wird, welche bei der *galvanometrisch bestimmten Einheit der Stromintensität* während der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters geht. — Sodann folgen die *absoluten Bestimmungen auf dem Wege der elektrostatischen Messung*, durch welche eine vorhandene Menge *freier* Elektricität in Theilen derjenigen Elektricitätsmenge ausgedrückt erhalten wird, welche auf eine gleiche Menge in der Einheit der Entfernung nach elektrostatischem Gesetze die Einheit der Kraft ausübt. Diese Bestimmung findet nur auf *kleine* Elektricitätsmengen welche *frei* vorkommen, im Vergleich mit den galvanometrisch bestimmten grossen im neutralen Fluidum enthaltenen Elektricitätsmengen, Anwendung. — Besonders wichtig ist die Kenntniss des Verhältnisses der diesen beiden Bestimmungsweisen zum Grunde liegenden *Maasseinheiten*, welche durch doppelte Messung einer und derselben Elektricitätsmenge sowohl auf galvanometrischem als auch auf elektrostatischem Wege gewonnen worden, nämlich des Verhältnisses $155370 \, . \, 10^6 : 1$ (siehe die vorhergehende Abhandlung Bd. V. S. 261). — Diesen beiden *absoluten Bestimmungsweisen* kann man nun noch als *dritte* diejenige hinzufügen, nach welcher eine vorhandene Elektricitätsmenge durch ihre *Masse* in Theilen des für alle Körper festgestellten Massenmaasses (Milligramm) ausgedrückt werden soll; wobei jedoch zu bemerken ist, dass bisher auf diese Weise noch keine vorhandene Elektricitätsmenge hat ausgedrückt werden können, weil noch kein Weg der Messung entdeckt worden ist, welcher auch nur näherungsweise zu

einer solchen Kenntniss führte. In Folge davon mangelt auch noch gänzlich die Kenntniss des *Verhältnisses* der dieser Bestimmungsweise und den vorigen zum Grunde liegenden *Maasseinheiten*, weil keine doppelte Messung einer und derselben Elektricitätsmenge auf diese verschiedenen Weisen ausgeführt werden konnte. Wäre dieses *Verhältniss* $= r:1$ bekannt, so würde aus der Zahl $\mathfrak{E}ds$ der elektrostatischen Maasseinheiten positiver Elektricität, die im Leiterelemente ds enthalten sind, die *Masse* dieser Elektricitätsmenge in *Milligrammen* ausgedrückt $= \frac{1}{r} \cdot \mathfrak{E}ds$ erhalten werden.

Durch Einführung dieses Ausdrucks der *Masse* und Gleichsetzung derselben mit dem oben angegebenen *Quotienten* erhält man dann folgende Gleichung:

$$\frac{1}{\frac{d^2\sigma}{dt^2}} \cdot \left(4\mathfrak{E}\mathfrak{E}\log\frac{l}{\alpha} \cdot \left(\frac{d^2\sigma}{ds^2} - \frac{2}{cc}\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right) ds - \frac{1}{2\pi\alpha\alpha k} \cdot \mathfrak{E}\mathfrak{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} ds + \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}Sds\right) = \frac{1}{r}\mathfrak{E}ds\,,$$

oder, geordnet und $\frac{cc}{8\log\frac{l}{\alpha} \cdot r\mathfrak{E}} = \lambda$ gesetzt,

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \frac{cc}{2(1+\lambda)} \cdot \frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{cc}{16\pi\alpha\alpha k\log\frac{l}{\alpha} \cdot (1+\lambda)} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = \frac{cc}{16\mathfrak{E}\log\frac{l}{\alpha} \cdot (1+\lambda)} \cdot S\,.$$

6.

Vergleichung der Resultate.

In dieser allgemeineren Gleichung, sieht man, ist die Kirchhoff'sche oben entwickelte Gleichung mit enthalten, nämlich unter den beiden Voraussetzungen, dass $S = 0$ und $\lambda = 0$ sei; denn es ist alsdann

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \frac{cc}{2} \cdot \frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{cc}{16\pi\alpha\alpha k\log\frac{l}{\alpha}} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = 0$$

ganz in Uebereinstimmung mit der am Schlusse des dritten Artikels entwickelten Gleichung.

Es darf hiebei bemerkt werden, dass auf diese eben entwickelte allgemeinere Gleichung und deren Uebereinstimmung mit der Kirchhoff'schen, unter den angegebenen Voraussetzungen, sich die von Poggendorff zu Kirchhoffs Abhandlung in den Annalen 1857. Bd. 100. S. 351 hinzugefügte Note bezieht.

Die Voraussetzung, dass $S = 0$ sei, enthält nun aber nicht bloss im Allgemeinen die von Kirchhoff vorausgeschickte Annahme, dass

keine elektromotorische Kraft von Aussen her auf die Elektricität im Leitungsdrahte wirken soll, sondern insbesondre auch die zweite von den im Anfang des dritten Artikels erwähnten Annahmen, dass nämlich alle von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen im ganzen Leitungsdrahte mit Ausnahme des kleinen als Cylinder betrachteten Stücks, in dessen Mitte der betrachtete Punkt liegt, herrührenden elektromotorischen Kräfte verschwindend klein seien gegen diejenigen auf denselben Punkt wirkenden elektromotorischen Kräfte, welche von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen in dem kleinen cylindrischen Stücke selbst herrühren.

Die Voraussetzung, dass $\lambda = 0$ sei, kommt dagegen mit der von Kirchhoff angenommenen allgemeineren Geltung des Ohm'schen Gesetzes überein. Zwar könnte es scheinen, dass $\lambda = \frac{cc}{8\log\frac{l}{\alpha}\cdot r\mathfrak{E}}$ für $\log\frac{l}{\alpha} = \infty$ verschwinde, und dass also die Voraussetzung, dass $\lambda = 0$ sei, näherungsweise schon durch die Kirchhoff'sche Annahme, dass α gegen l verschwinde, erfüllt werde; es ist dies aber nicht der Fall, sondern es wird $\lambda = \infty$ wenn α verschwindet, wie man leicht daraus ersieht, dass die Zahl der positiv elektrischen Maasseinheiten, welche in der Längeneinheit des Leitungsdrahts enthalten ist, $= \mathfrak{E}$, dem Quadrat des Halbmessers α proportional ist und, wenn man die constante Zahl der positiv elektrischen Masseneinheiten, welche in der *Volumeneinheit des Leitungsdrahts* enthalten ist, mit $\mathfrak{E}_0$ bezeichnet, durch

$$\mathfrak{E} = \pi\alpha\alpha\,.\,\mathfrak{E}_0$$

dargestellt wird, woraus folgt, dass das Product $\mathfrak{E}\log\frac{l}{\alpha} = \pi\mathfrak{E}_0\,.\,\alpha\alpha\log\frac{l}{\alpha}$ mit α verschwindet und also $\lambda = \frac{cc}{8r\,.\,\mathfrak{E}\log\frac{l}{\alpha}}$ unendlich wird.

Es geht daraus hervor, dass das Ohm'sche Gesetz zwar näherungsweise bei *stärkeren* Leitungsdrähten, für welche α grössere Werthe hat, die von Kirchhoff angenommene allgemeinere Geltung haben könne, nämlich bei einem sehr kleinen Werthe des constanten Quotienten $\frac{cc}{r\mathfrak{E}_0}$; dass dagegen bei *feineren* Leitungsdrähten, zumal wenn diese Verfeinerung so weit getrieben werden soll, dass $\log\frac{l}{\alpha}$ eine sehr grosse Zahl werde, das Ohm'sche Gesetz diese allgemeinere Geltung verlieren müsse, wonach also das oben ausgesprochene Bedenken über die Unvereinbarkeit der beiden im Anfang des dritten Artikels unter (1) und (3) angeführten Annahmen wohl begründet erscheint.

Es leuchtet dagegen umgekehrt ein, dass wenn auf dem Wege der Beobachtung Fälle von feineren Leitungsdrähten nachgewiesen werden könnten, wo dem Ohm'schen Gesetz diese allgemeinere Geltung nicht zukäme, sondern messbare Abweichungen hervorträten, aus denen λ bestimmbar würde, so würde dadurch eine Kenntniss des constanten Quotienten $\frac{cc}{r\mathfrak{E}_0} = 8\pi\alpha\alpha \log\frac{l}{\alpha} \cdot \lambda$ gewonnen, und die Kenntniss des Verhältnisses $r:1$, d. i. der Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten welche auf 1 Milligramm gehen, würde bloss noch von der Erforschung der Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten $\mathfrak{E}_0$ abhängen, welche in 1 Cubikmillimeter des Leiters enthalten sind.

7.

Entwickelung des Ausdrucks der elektromotorischen Kraft, welche auf einen Punkt eines geschlossenen linearen Leiters von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen im ganzen Leiter, mit Ausnahme desjenigen Elements, in welchem der betrachtete Punkt liegt, ausgeübt wird.

Wenn man die auf einen Punkt s des Leitungsdrahts aus der Ferne wirkenden Kräfte, welche sich nicht bestimmen liessen, sowohl diejenigen welche von entfernteren Theilen des Leitungsdrahts selbst, als auch diejenigen welche von Aussen her wirken, $= 0$ setzte, so ergab sich nach den Entwickelungen der vorhergehenden Artikel übereinstimmend folgende partielle Differentialgleichung für die Verschiebung σ des positiv elektrischen Theilchens im Punkte s:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - a\frac{d^2\sigma}{ds^2} + b\frac{d\sigma}{dt} = 0\,,$$

wobei nur der Unterschied statt fand, dass die Bedeutung der constanten Coefficienten a und b in dieser Gleichung nach Art. 3 von der nach Art. 6 ihnen zukommenden etwas verschieden war, ein Unterschied, der möglicher Weise aber gar nicht in Betracht kommt, wenn nämlich die Erfahrung ergeben sollte, dass der im vorigen Artikel mit $\frac{cc}{r\mathfrak{E}_0}$ bezeichnete Quotient für alle Arten von Leitern einen verschwindend kleinen Werth hätte.

Diese Uebereinstimmung macht aber obige Gleichung noch keineswegs geeignet, die Bewegungen der Elektricität in einem Leitungsdrahte wirklich zu bestimmen; denn wenn es auch Fälle geben kann, wo keine elektromotorischen Kräfte von Aussen her auf die Elek-

tricität im Leitungsdrahte wirken, so kann es doch keinen Fall geben, wo auch keine elektromotorischen Kräfte von den ferner liegenden Theilen des Leitungsdrahts selbst ausgeübt würden, wenn darin irgend eine Störung des Gleichgewichts der Elektricität statt gefunden hat. Um daher zu einer Gleichung zu gelangen die zur Bestimmung der Bewegungen der Elektricität in einem Leitungsdrahte wirklich dienen kann, reicht die Art. 2 gegebene Entwickelung der elektromotorischen Kräfte, welche auf einen Punkt s des Leitungsdrahts von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen des einzigen Elements ds, zu welchem der Punkt s gehört, ausgeübt werden, nicht hin, sondern es müssen auch diejenigen elektromotorischen Kräfte noch entwickelt werden, welche auf den Punkt s von der freien Elektricität und von den elektrischen Bewegungen in allen übrigen Theilen des Leitungsdrahts ausgeübt werden. Es bedürfen daher die aus obiger Gleichung von Kirchhoff abgeleiteten Folgerungen noch einer Prüfung in Beziehung auf den Einfluss dieser letzteren Kräfte.

Für die Entwickelung dieser Kräfte genügt es nun zwar, da es sich um Elemente ds, ds' des Leitungsdrahts handelt, deren Dimensionen gegen ihre Entfernung verschwindet, die Dichtigkeiten der freien Elektricität und die Stromintensitäten in denselben bloss nach ihren Gesammtwerthen für den ganzen Querschnitt E, E', i, i' zu betrachten, die blosse Functionen von s und t oder von s' und t sind. Es lassen sich diese Functionen aber in Beziehung auf s oder s', wie von selbst einleuchtet, nicht wie die in Art. 2, nach dem Taylor'schen Lehrsatze in Reihen entwickeln, da dieselben im ersten Augenblick $t = 0$ ganz willkührlich gegeben sein können, sondern man muss dieselben in Sinus- und Cosinusreihen darzustellen suchen.

Setzt man also für einen geschlossenen Leitungsdraht von der Länge $2\pi a$

$$E' = \Sigma \left(a_n \sin \frac{ns'}{a} + b_n \cos \frac{ns'}{a}\right)$$
$$i' = \Sigma \left(c_n \sin \frac{ns'}{a} + \partial_n \cos \frac{ns'}{a}\right)$$

worin für n der Reihe nach alle ganzen Zahlen zu setzen sind, so ergiebt sich nach Art. 1, wenn man die Entfernung der Punkte s und s' von einander mit r bezeichnet, und die Winkel, welche ds und ds' mit der Richtung von r bilden, mit θ und θ',

$$\Omega = \int \frac{E'ds'}{r} = \int \frac{ds'}{r} \,\Sigma \left(a_n \sin \frac{ns'}{a} + b_n \cos \frac{ns'}{a}\right)$$

$$U = \int \frac{ds'}{r} \cos\theta \cos\theta' . i' = \int \frac{ds'}{r} \cos\theta \cos\theta' . \,\Sigma \left(c_n \sin \frac{ns'}{a} + \partial_n \cos \frac{ns'}{a}\right).$$

Ausserdem hat man noch die Art. 3 gefundene Gleichung

$$\frac{di'}{ds'} = -\tfrac{1}{2} \frac{dE'}{dt},$$

oder, durch Sinus- und Cosinusreihen ausgedrückt,

$$\frac{1}{a} \Sigma n \left(c_n \cos \frac{ns'}{a} - \partial_n \sin \frac{ns'}{a}\right) = -\tfrac{1}{2} \Sigma \left(\frac{da_n}{dt} . \sin \frac{ns'}{a} + \frac{db_n}{dt} \cos \frac{ns'}{a}\right).$$

Es folgt hieraus, da diese Gleichung für alle Werthe von s' gelten soll,

$$c_n = -\frac{a}{2n} . \frac{db_n}{dt}, \quad \partial_n = +\frac{a}{2n} . \frac{da_n}{dt}.$$

Soll nun aus den gefundenen Ausdrücken für Ω und U die elektromotorische Kraft bestimmt werden, welche auf den Punkt s des geschlossenen Leitungsdrahts wirkt, so setze man $s' - s = \sigma$, und substituire $s + \sigma$ für s' und $d\sigma$ für ds' in den Ausdrücken von Ω und U. Man erhält alsdann

$$\Omega = \Sigma \int \frac{d\sigma}{r} \left(a_n \sin\left(\frac{n\sigma}{a} + \frac{ns}{a}\right) + b_n \cos\left(\frac{n\sigma}{a} + \frac{ns}{a}\right)\right)$$

$$U = \Sigma \int \frac{d\sigma}{r} \cos\theta \cos\theta' . \left(c_n \sin\left(\frac{n\sigma}{a} + \frac{ns}{a}\right) + \partial_n \cos\left(\frac{n\sigma}{a} + \frac{ns}{a}\right)\right).$$

Entwickelt man hierin den Sinus und Cosinus der Summe, so erhält man

$$\Omega = \Sigma \left(a_n \cos\frac{ns}{a} - b_n \sin\frac{ns}{a}\right) . \int \frac{\sin\frac{n\sigma}{a} . d\sigma}{r} + \Sigma \left(a_n \sin\frac{ns}{a} + b_n \cos\frac{ns}{a}\right) . \int \frac{\cos\frac{n\sigma}{a} . d\sigma}{r}$$

$$U = \Sigma \left(c_n \cos\frac{ns}{a} - \partial_n \sin\frac{ns}{a}\right) . \int \frac{\cos\theta \cos\theta' \sin\frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} + \Sigma \left(c_n \sin\frac{ns}{a} + \partial_n \cos\frac{ns}{a}\right) . \int \frac{\cos\theta \cos\theta' \sin\frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}.$$

Hierin sind r, $\cos\theta$ und $\cos\theta'$ Functionen von σ, welche sich aus der Gleichung der Curve des Leitungsdrahts ergeben. Es folgt daraus, dass für jede Stellenzahl n die vier zwischen den Grenzen von $\sigma = \frac{1}{2} l$ bis $\sigma = 2\pi a - \frac{1}{2} l$ (wenn l die Länge desselben Stücks des Leitungsdrahts wie Art. 2 bezeichnet) zu nehmenden Integrale

$$\int \frac{\sin\frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}, \quad \int \frac{\cos\frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}, \quad \int \frac{\cos\theta \cos\theta' \sin\frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}, \quad \int \frac{\cos\theta \cos\theta \cos\frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r}$$

durch die Gestalt der Leitercurve gegeben und bestimmt sind, deren Werthe daher kurz mit

$$N, N', M, M'$$

bezeichnet werden sollen. Man hat alsdann

$$\Omega = \Sigma\left((a_n N' - b_n N)\sin\frac{ns}{a} + (a_n N + b_n N')\cos\frac{ns}{a}\right)$$
$$U = \Sigma\left((c_n M' - \partial_n M)\sin\frac{ns}{a} + (c_n M + \partial_n M')\cos\frac{ns}{a}\right),$$

woraus nun die elektromotorischen Kräfte bestimmt werden können, nämlich

$$-2\frac{d\Omega}{ds} = -\frac{2}{a}\Sigma n\left((a_n N' - b_n N)\cos\frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N')\sin\frac{ns}{a}\right)$$
$$-\frac{8}{cc}\cdot\frac{dU}{dt} = -\frac{8}{cc}\Sigma\left(\left(\frac{dc_n}{dt}.M' - \frac{d\partial_n}{dt}.M\right)\sin\frac{ns}{a} + \left(\frac{dc_n}{dt}.M + \frac{d\partial_n}{dt}.M'\right)\cos\frac{ns}{a}\right)$$

oder, wenn in der letzteren Gleichung die oben gefundenen Werthe von c_n und ∂_n substituirt werden,

$$-\frac{8}{cc}\cdot\frac{dU}{dt} = +\frac{4a}{cc}\Sigma\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}.M' + \frac{d^2a_n}{dt^2}.M\right)\sin\frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2b_n}{dt^2}.M - \frac{d^2a_n}{dt^2}.M'\right)\cos\frac{ns}{a}\right).$$

8.

Bewegungsgleichung der Elektricität in einem geschlossenen Leiter.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung der Elektricität in einem geschlossenen Leiter auf dem Art. 4—5 bezeichneten Wege sind zunächst alle Kräfte aufzuzählen, welche auf die positive Elektricität in einem Elemente ds des Leitungsdrahts wirken und die Grösse dieser Kräfte nach mechanischem Maasse auszudrücken.

1) Die *aus der Nähe* auf den Punkt s des Leitungsdrahts wirkenden elektromotorischen Kräfte sind am Schlusse von Art. 2 gefunden worden:

$$-2\frac{d\Omega}{ds} = -4\frac{dE}{ds}.\log\frac{l}{\alpha} - \frac{1}{4}\frac{d^3E}{ds^3}.l^2$$
$$-\frac{8}{cc}\frac{dU}{dt} = -\frac{16}{cc}\frac{di}{dt}.\log\frac{l}{e\alpha} - \frac{1}{cc}\frac{d^3i}{ds^2dt}.l^2.$$

Hierin kann nun aber nach dem vorhergehenden Artikel

$$E = \Sigma\left(a_n\sin\frac{ns}{a} + b_n\cos\frac{ns}{a}\right)$$
$$i = -\frac{a}{2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}.\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}.\cos\frac{ns}{a}\right)$$

substituirt werden, folglich

$$-2\frac{d\Omega}{ds} = -\frac{4}{a}\Sigma\left(n\log\frac{l}{\alpha} - \frac{1}{16}\frac{n^3l^2}{a^2}\right)\left(a_n\cos\frac{ns}{a} - b_n\sin\frac{ns}{a}\right)$$
$$-\frac{8}{cc}\frac{dU}{dt} = \frac{8}{cc}\Sigma\left(\frac{a}{n}\log\frac{l}{e\alpha} - \frac{1}{16}\frac{nl^2}{a}\right)\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}.\sin\frac{ns}{a} - \frac{d^2a_n}{dt^2}.\cos\frac{ns}{a}\right).$$

2) Die *aus der Ferne* auf den Punkt s des Leitungsdrahts wirkenden elektromotorischen Kräfte sind am Schlusse des vorhergehenden Artikels gefunden worden:

$$-2\frac{d\Omega}{ds} = -\frac{2}{a}\Sigma n\left((a_n N' - b_n N)\cos\frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N')\sin\frac{ns}{a}\right)$$

$$-\frac{8}{cc}\frac{dU}{dt} = +\frac{4a}{cc}\Sigma\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2 b_n}{dt^2}.M' + \frac{d^2 a_n}{dt^2}.M\right)\sin\frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2}.M - \frac{d^2 a_n}{dt^2}.M'\right)\cos\frac{ns}{a}\right).$$

Aus der Nähe und aus der Ferne zusammen genommen sind also die elektromotorischen Kräfte, wenn

$$N' + 2\log\frac{l}{\alpha} - \frac{1}{8}\frac{n^2 l^2}{a^2} = N''$$

$$M' + 2\log\frac{l}{e\alpha} - \frac{1}{8}\frac{n^2 l^2}{a^2} = M''$$

gesetzt wird,

$$-2\frac{d\Omega}{ds} = -\frac{2}{a}\Sigma n\left((a_n N'' - b_n N)\cos\frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N'')\sin\frac{ns}{a}\right)$$

$$-\frac{8}{cc}\frac{dU}{dt} = +\frac{4a}{cc}\Sigma\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2 b_n}{dt^2}.M'' + \frac{d^2 a_n}{dt^2}.M\right)\sin\frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2}.M - \frac{d^2 a_n}{dt^2}.M''\right)\cos\frac{ns}{a}\right).$$

Diese elektromotorischen Kräfte sind nun die Differenzen derjenigen Kräfte, welche auf die positive und negative elektrische Maasseinheit in dem Punkte s wirken. Da aber die auf die positive Maasseinheit wirkende Kraft der auf die negative Maasseinheit wirkenden, abgesehen von ihrer entgegengesetzten Richtung, gleich ist, so folgt hieraus, dass die Hälfte jener elektromotorischen Kräfte diejenigen Kräfte sind, welche auf jede positive elektrische Maasseinheit im Punkte s wirken. Die Zahl der positiv elektrischen Maasseinheiten, welche in dem Längenelemente ds des Leitungsdrahts enthalten sind, ist aber Art. 3 mit $\mathfrak{E}ds$ bezeichnet worden; multiplicirt man daher die Hälfte der obigen elektromotorischen Kräfte mit $\mathfrak{E}ds$, so findet man die Kräfte, welche auf die positive Elektricität im Elemente ds wirken, nach mechanischem Maasse ausgedrückt,

$$= -\frac{\mathfrak{E}ds}{a}\Sigma n\left((a_n N'' - b_n N)\cos\frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N'')\sin\frac{ns}{a}\right)$$

$$+\frac{2a\mathfrak{E}ds}{cc}\Sigma\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2 b_n}{dt^2}.M'' + \frac{d^2 a_n}{dt^2}.M\right)\sin\frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2 b_n}{dt^2}.M - \frac{d^2 a_n}{dt^2}.M''\right)\cos\frac{ns}{a}\right).$$

3) Die von den *ponderabelen Leitertheilchen* herrührende Widerstandskraft, welche auf die positive Elektricität im Elemente ds wirkt, war Art. 5 nach mechanischem Maasse ausgedrückt gefunden worden

$$= -\frac{1}{2\pi\alpha\alpha k}.\mathfrak{E}\mathfrak{E}.\frac{d\sigma}{dt}ds,$$

worin

$$\frac{\mathfrak{E}d\sigma}{dt} = i = -\frac{a}{2}\Sigma'\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}.\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}.\cos\frac{ns}{a}\right),$$

wonach diese Kraft erhalten wird:

$$= +\frac{a\mathfrak{E}ds}{4\pi aak}.\Sigma'\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}.\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}.\cos\frac{ns}{a}\right).$$

Hiezu kommt endlich

4) die *von Aussen* her auf die positive Elektricität im Elemente ds wirkende Kraft, welche nach Art. 5 (3)

$$= +\tfrac{1}{2}\mathfrak{E}Sds$$

erhalten wird, wenn S hierin nur die von Aussen auf den Punkt s ausgeübte elektromotorische Kraft bezeichnet. Wird nun S in Sinus- und Cosinusreihen entwickelt

$$S = \Sigma'\left(f_n\sin\frac{ns}{a} + g_n\cos\frac{ns}{a}\right)$$

so wird diese Kraft dargestellt

$$= +\tfrac{1}{2}\mathfrak{E}ds.\Sigma'\left(f_n\sin\frac{ns}{a} + g_n\cos\frac{ns}{a}\right).$$

Da nun alle diese Kräfte nach *mechanischem Maasse*, d. h. in Theilen derjenigen Kraft ausgedrückt sind, welche der ponderabelen Masseneinheit (Milligramm) in der Zeiteinheit (Secunde) die Einheit der Geschwindigkeit ertheilt, so folgt daraus nach dem bekannten für alle Körper gültigen Bewegungsgesetze, dass der Quotient aus der Summe aller dieser Kräfte dividirt durch die von ihnen der positiven Elektricität im Elemente ds, auf die sie wirken, ertheilte Beschleunigung, $= \frac{d^2\sigma}{dt^2}$, die Definition der *Masse* dieser Elektricitätsmenge, in dem für alle Körper festgesetzten Massenmaasse (Milligramm) ausgedrückt, ist, welche Art. 5 durch $\frac{1}{r}\mathfrak{E}ds$ Milligramm bezeichnet worden. Multiplicirt man die so erhaltene Gleichung mit $\frac{1}{\mathfrak{E}ds}.\frac{d^2\sigma}{dt^2}$ und setzt

$$\mathfrak{E}\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{di}{dt} = -\frac{a}{2}\Sigma'\frac{1}{n}\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\sin\frac{ns}{a} - \frac{d^2a_n}{dt^2}\cos\frac{ns}{a}\right)$$

so erhält man die gesuchte Bewegungsgleichung der Elektricität in einem geschlossenen Leitungsdrahte in folgender Gestalt:

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{a}\Sigma n\left((a_nN'' - b_nN)\cos\frac{ns}{a} - (a_nN + b_nN'')\sin\frac{ns}{a}\right) \\ +\frac{2a}{cc}\Sigma'\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}.M'' + \frac{d^2a_n}{dt^2}.M\right)\sin\frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2b_n}{dt^2}.M - \frac{d^2a_n}{dt^2}.M''\right)\cos\frac{ns}{a}\right) \\ +\frac{a}{4\pi aak}\Sigma'\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right) + \frac{1}{2}\Sigma'\left(f_n\sin\frac{ns}{a} + g_n\cos\frac{ns}{a}\right) \end{array}\right\} = -\frac{a}{2r\mathfrak{E}}.\Sigma'\frac{1}{n}\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\sin\frac{ns}{a} - \frac{d^2a_n}{dt^2}\cos\frac{ns}{a}\right).$$

Da N, N'', M, M'' bloss von der Gleichung der Leitercurve abhängen, so können sie als Functionen von s dargestellt werden. In dem einzigen Falle, wenn jene Curve ein *Kreis* ist, hat jede von diesen Grössen einen für alle Punkte s *gleichen Werth* und es lässt sich dann die obige Gleichung in die folgenden beiden einfacheren Gleichungen auflösen, nämlich, wenn $\frac{cc}{4M''r\mathfrak{E}} = \lambda$ gesetzt wird,

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi\alpha\alpha kM''(1+\lambda)} \cdot \frac{da_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2aaM''(1+\lambda)} \cdot a_n - \frac{ncc}{4aM''(1+\lambda)} \cdot \mathfrak{g}_n = \frac{M}{M''(1+\lambda)} \cdot \frac{d^2b_n}{dt^2} + \frac{n^2c^2N}{2aaM''(1+\lambda)} \cdot b_n$$

$$\frac{d^2b_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi\alpha\alpha kM''(1+\lambda)} \cdot \frac{db_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2aaM''(1+\lambda)} \cdot b_n + \frac{ncc}{4aM''(1+\lambda)} \cdot \mathfrak{f}_n = -\frac{M}{M''(1+\lambda)} \cdot \frac{d^2a_n}{dt^2} - \frac{n^2c^2N}{2aaM''(1+\lambda)} \cdot a_n .$$

Es wird hiedurch die Betrachtung des Falls einer *kreisförmigen Leitercurve* sehr vereinfacht und verdient deshalb besondre Berücksichtigung. In allen andern Fällen würden, bei weiterer Entwickelung, N, N'', M, M'' als Functionen von s ebenfalls in Sinus- und Cosinusreihen dargestellt werden müssen, wodurch die Gleichungen sehr an Einfachheit verlören.

9.

Gleichung für die Mittelwerthe der elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten in geschlossenen Leitern von beliebiger Gestalt.

Es kommen häufig Betrachtungen und Anwendungen geschlossener Ketten vor, für welche die Kenntniss der elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten in einzelnen Punkten der Kette nicht erfordert wird, sondern die Kenntniss ihres *Mittelwerths* für die ganze Länge des Leitungsdrahts genügt. Bevor daher auf eine speciellere Entwickelung der Bewegungsgesetze der Elektricität in einem *kreisförmigen* Leitungsdrahte eingegangen wird, sollen die eben gefundenen angewendet werden, um die Gleichung für die *Mittelwerthe* der elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten in geschlossenen Leitern *von beliebiger Gestalt* daraus abzuleiten.

Diese Gleichung ergiebt sich, wenn man die Glieder der im vorigen Artikel gefundenen allgemeinen Gleichung mit ds multiplicirt und sie sodann von $s = 0$ bis $s = 2\pi a$ integrirt. Sie vereinfacht sich aber wesentlich dadurch, dass *erstens* der Integralwerth der elektromotorischen Kräfte, welche von der freien Elektricität im Leitungsdrahte herrühren, nach einem bekannten Theoreme stets Null ist, und dass *zweitens* der Integralwerth der von Aussen herrührenden elektromotorischen Kräfte

in der Regel als gegeben betrachtet werden darf. Man erhält hienach *erstens*

$$\int_0^{2\pi a}\frac{ds}{a}\,\Sigma n\left((a_n N'' - b_n N)\cos\frac{ns}{a} - (a_n N + b_n N'')\sin\frac{ns}{a}\right) = 0$$

zweitens, wenn der gegebene Integralwerth der von Aussen herrührenden elektromotorischen Kräfte mit S bezeichnet wird,

$$\int_0^{2\pi a} ds\,\Sigma\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right) = S\,.$$

Da nun ferner, wenn

$$i_n = -\frac{a}{2n}\left(\frac{db_n}{dt}\,.\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\,.\cos\frac{ns}{a}\right)$$

gesetzt wird, $i = \Sigma i_n$ war; so ergiebt sich

$$\int ds\,.\frac{2a}{cc}\,\Sigma\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}M'' + \frac{d^2a_n}{dt^2}M\right)\sin\frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2b_n}{dt^2}M - \frac{d^2a_n}{dt^2}M''\right)\cos\frac{ns}{a}\right)$$
$$= -\frac{4}{cc}\int ds\,\Sigma M''\frac{di_n}{dt} - \frac{4a}{cc}\,\Sigma\frac{1}{n}\int\frac{d^2i_n}{dsdt}Mds\,.$$

Nun ist

$$\int\frac{d^2i_n}{dsdt}Mds = M\frac{di_n}{dt} - \int\frac{di_n}{dt}\,.\frac{dM}{ds}ds\,;$$

folglich

$$\int_0^{2\pi a}\frac{d^2i_n}{dsdt}Mds = -\int_0^{2\pi a}\frac{di_n}{dt}\,.\frac{dM}{ds}ds$$

wonach also

$$\int_0^{2\pi a} ds\,.\frac{2a}{cc}\,\Sigma\frac{1}{n}\left(\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}M'' + \frac{d^2a_n}{dt^2}M\right)\sin\frac{ns}{a} + \left(\frac{d^2b_n}{dt^2}M - \frac{d^2a_n}{dt^2}M''\right)\cos\frac{ns}{a}\right)$$
$$= -\frac{4}{cc}\int_0^{2\pi a} ds\,\Sigma M''\frac{di_n}{dt} + \frac{4a}{cc}\,\Sigma\frac{1}{n}\int_0^{2\pi a}\frac{di_n}{dt}\,.\frac{dM}{ds}ds\,.$$

Fügt man endlich hinzu, dass

$$\int\frac{ads}{4\pi aak}\,\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right) = -\frac{1}{2\pi aak}\,.\int ids$$

$$\int\frac{ads}{2r\mathfrak{C}}\,\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\sin\frac{ns}{a} - \frac{d^2a_n}{dt^2}\cos\frac{ns}{a}\right) = -\frac{1}{r\mathfrak{C}}\,.\int\frac{di}{dt}ds\,,$$

so erhält man folgende Gleichung für die Mittelwerthe der elektromotorischen Kräfte und Stromintensitäten $\frac{1}{2\pi a}\,.\,S$ und $\frac{1}{2\pi a}\,.\int_0^{2\pi a} ids$:

$$S = \frac{1}{\pi aak} \cdot \int_0^{2\pi a} i ds + \frac{8}{cc}\int_0^{2\pi a} ds \Sigma M'' \frac{di_n}{dt} - \frac{8a}{cc}\Sigma \frac{1}{n}\int_0^{2\pi a} \frac{di_n}{dt} \cdot \frac{dM}{ds} ds + \frac{2}{r\mathfrak{E}}\int_0^{2\pi a} \frac{di}{dt} ds .$$

Diese Mittelwerthe kommen nun offenbar dann vorzüglich in Betracht, wenn in den verschiedenen Elementen des Leitungsdrahts entweder gar keine Verschiedenheit der elektrischen Bewegung statt findet, oder eine so geringe, dass sie ganz vernachlässigt werden kann. In allen diesen Fällen sind also i und $\frac{di}{dt}$ von s unabhängige Grössen, und es kann $i = i_0$, $\frac{di}{dt} = \frac{di_0}{dt}$, folglich, für $n > 0$, $\frac{di_n}{dt} = 0$ gesetzt werden, wonach

$$S = \frac{2\pi a}{\pi aak} i_0 + \left(\frac{8}{cc}\int_0^{2\pi a} M''_0 ds + \frac{4\pi a}{r\mathfrak{E}}\right)\frac{di_0}{dt} ,$$

wo $\frac{2\pi a}{\pi aak} = w$ der Widerstand der ganzen Kette ist. Setzt man hierin

$$\frac{8}{cc}\int_0^{2\pi a} M''_0 ds + \frac{4\pi a}{r\mathfrak{E}} = p$$

und schreibt i für i_0, so erhält man

$$S = wi + p\frac{di}{dt} ,$$

worin S, i und $\frac{di}{dt}$ bloss Functionen der Zeit t sind. Durch Integration erhält man daraus

$$i = \frac{1}{p} e^{-\frac{w}{p}t} . \int e^{\frac{w}{p}t} . Sdt .$$

10.

Bewegungsgesetze der Elektricität in einem kreisförmigen Leitungsdrahte.

Wenn die Form eines geschlossenen Leiters gegeben ist, so lassen sich die Werthe von N, N', M, M', d. h. die Werthe der bestimmten Integrale

$$\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\sin\frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} , \quad \int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\cos\frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} , \quad \int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\cos\theta\cos\theta' \sin\frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} , \quad \int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\cos\theta\cos\theta' \cos\frac{n\sigma}{a} d\sigma}{r} ,$$

für jeden Punkt s des Leiters bestimmen. Zum Beispiel diene nun ein Leiter von der Form eines Kreises, dessen Halbmesser $= a$ ist.

Bei dieser Kreisform ist der Abstand r zweier Punkte s und s' gleich der Sehne des Bogens $\frac{s'-s}{a} = \frac{\sigma}{a}$; es ist also

$$r = 2a \sin \frac{\sigma}{2a}.$$

Ferner ist der Winkel θ, welchen das Element ds mit r bildet, dem Winkel θ' gleich, welchen das Element ds' mit r bildet, und beide sind dem Winkel gleich, welchen die Tangente des Kreises im Punkte s mit der Sehne des Bogens $\frac{\sigma}{a}$ bildet, d. i.

$$\theta = \theta' = \frac{\sigma}{2a}.$$

Hieraus ergiebt sich also

$$N = \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\sin\frac{n\sigma}{a}\,d\sigma}{\sin\frac{\sigma}{2a}}, \qquad N' = \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\cos\frac{n\sigma}{a}\,d\sigma}{\sin\frac{\sigma}{2a}},$$

$$M = \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\left(\cos\frac{\sigma}{2a}\right)^2.\sin\frac{n\sigma}{a}\,d\sigma}{\sin\frac{\sigma}{2a}} = N - \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \sin\frac{n\sigma}{a}\sin\frac{\sigma}{2a}\,d\sigma$$

$$M' = \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \frac{\left(\cos\frac{\sigma}{2a}\right)^2.\cos\frac{n\sigma}{a}\,d\sigma}{\sin\frac{\sigma}{2a}} = N' - \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi a - \frac{1}{2}l} \cos\frac{n\sigma}{a}\sin\frac{\sigma}{2a}\,d\sigma.$$

Setzt man nun $\frac{\sigma}{2a} = z$, also

$$N = \int_{\frac{l}{4a}}^{\pi - \frac{l}{4a}} \frac{\sin 2nz.dz}{\sin z}, \quad N' = \int_{\frac{l}{4a}}^{\pi - \frac{l}{4a}} \frac{\cos 2nz.dz}{\sin z}, \quad M = N - \int_{\frac{l}{4a}}^{\pi - \frac{l}{4a}} \sin 2nz.\sin z dz, \quad M' = N' - \int_{\frac{l}{4a}}^{\pi - \frac{l}{4a}} \cos 2nz.\sin z dz,$$

und beachtet dabei, dass

$$\int\frac{\sin 2nz.dz}{\sin z} = 2\int\cos(2n-1)z.dz + 2\int\cos(2n-3)z.dz + \ldots + 2\int\cos z dz$$

$$\int\frac{\cos 2nz.dz}{\sin z} = -2\int\sin(2n-1)z.dz - 2\int\sin(2n-3)z.dz - \ldots - 2\int\sin z dz + \int\frac{dz}{\sin z}$$

ist, so findet man, wenn man alle Integrale zwischen den Grenzen von $z = \frac{l}{4a}$ bis $z = \pi - \frac{l}{4a}$ nimmt,

$$N = 0$$

$$N' = -4\left(\cos\frac{l}{4a} + \frac{1}{3}\cos\frac{3l}{4a} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\,l}{4a}\right) - 2\log\operatorname{tang}\frac{l}{8a}\,.$$

Ferner findet man, da

$$\int \sin 2nz\,.\,\sin z\,dz = \frac{1}{2\,(2n-1)}\sin(2n-1)\,z - \frac{1}{2\,(2n+1)}\sin(2n+1)\,z$$

$$\int \cos 2nz\,.\,\sin z\,dz = \frac{1}{2\,(2n-1)}\cos(2n-1)\,z - \frac{1}{2\,(2n+1)}\cos(2n+1)\,z\,,$$

wenn auch diese Integrale zwischen den Grenzen von $z = \frac{l}{4a}$ bis $z = \pi - \frac{l}{4a}$ genommen werden,

$$M = 0$$

$$M' = N' + \frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)\frac{l}{4a} - \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)\frac{l}{4a}\,.$$

Hieraus folgt endlich nach Art. 8

$$N'' = -4\left(\cos\frac{l}{4a} + \frac{1}{3}\cos\frac{3l}{4a} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)\frac{l}{4a}\right) - 2\log\operatorname{tang}\frac{l}{8a} + 2\log\frac{l}{\alpha} - \frac{1}{8}\frac{n^2l^2}{a^2}$$

$$M'' = -4\left(\cos\frac{l}{4a} + \frac{1}{3}\cos\frac{3l}{4a} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)\frac{l}{4a}\right) - 2\log\operatorname{tang}\frac{l}{8a} + 2\log\frac{l}{e\alpha} - \frac{1}{8}\frac{n^2l^2}{a^2}$$
$$+ \frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)\frac{l}{4a} - \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)\frac{l}{4a}\,.$$

Es bezeichnet aber hierin l die Länge des als geradlinig betrachteten Leiterelements ds, in dessen Mitte der betrachtete Punkt s liegt. Diese Länge ist innerhalb gewisser Grenzen willkührlich, nur ist die Wahl derselben dadurch beschränkt, dass sowohl $\frac{\alpha}{l}$ als auch $\frac{l}{a}$ als verschwindend kleine Brüche müssen betrachtet werden können, was der Fall sein muss, wenn der Leiter als ein *linearer* betrachtet werden soll. Die Verschiedenheit der Werthe von l, die innerhalb dieser Grenzen möglich sind, haben auf die Werthe von N'' und M'' keinen merklichen Einfluss. Es kann daher

$$l = \sqrt{a\alpha}$$

gesetzt werden, da dieser Werth bei jedem als *linear* zu betrachtenden Leiter innerhalb der angegebenen Grenzen liegen muss. Zugleich leuchtet ein, dass alsdann auch $\frac{l}{8a}$ für $\operatorname{tang}\frac{l}{8a}$ gesetzt werden kann. Setzt man noch Kürze halber

$$\frac{n^2\alpha}{8a} = 2\log\nu$$

$$\frac{n^2\alpha}{8a} + \frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} - \frac{1}{2n+1}\cos\frac{2n+1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} = 2\log\mu$$

so ergiebt sich

$$N''' = -4\left(\cos\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \frac{1}{3}\cos\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\right) + 2\log\frac{8a}{\nu\alpha}$$

$$M''' = -4\left(\cos\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \frac{1}{3}\cos\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\right) + 2\log\frac{8a}{\mu e\alpha}\,.$$

Substituirt man nun die hier für einen kreisförmigen Leiter gefundenen Werthe von N, N'', M, M'' in die Gleichungen am Schlusse des 8ten Artikels, so erhält man für die Bewegungen der Elektricität in einem kreisförmigen Leiter folgende beiden Gleichungen

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi aakM''(1+\lambda)} \cdot \frac{da_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2aaM''(1+\lambda)} \cdot a_n - \frac{ncc}{4aM''(1+\lambda)} \cdot g_n = 0$$

$$\frac{d^2b_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi aakM''(1+\lambda)} \cdot \frac{db_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2aaM''(1+\lambda)} \cdot b_n + \frac{ncc}{4aM''(1+\lambda)} \cdot f_n = 0$$

worin N'' und M'' die eben angegebenen Werthe haben.

11.

Gleichgewicht der Elektricität in einem kreisförmigen Leiter.

Für den Fall des Gleichgewichts der Elektricität hat man in allen Theilen des Leiters

$$i = 0 \quad \text{und} \quad \frac{di}{dt} = 0\,.$$

Setzt man für i seinen Werth aus Art. 8 (3), so erhält man

$$-\frac{a}{2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right) = 0$$

$$-\frac{a}{2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\sin\frac{ns}{a} - \frac{d^2a_n}{dt^2}\cos\frac{ns}{a}\right) = 0$$

woraus folgt

$$\frac{da_n}{dt} = 0\,, \quad \frac{db_n}{dt} = 0\,, \quad \frac{d^2a_n}{dt^2} = 0\,, \quad \frac{d^2b_n}{dt^2} = 0\,,$$

wozu noch hinzuzufügen ist, dass $\frac{1}{n}\frac{da_n}{dt} = \frac{1}{n}\frac{d^2a_n}{dt^2} = 0$ sein müsse auch für $n = 0$.

Die am Schlusse des vorhergehenden Artikels aufgestellten Bewegungsgleichungen gehen dann in folgende *Gleichgewichtsgleichungen* über, nämlich, wenn $n > 0$ ist,

$$\frac{nN''}{a} \cdot a_n - \tfrac{1}{2}g_n = 0$$

$$\frac{nN''}{a} \cdot b_n + \tfrac{1}{2}f_n = 0$$

wozu noch $g_0 = 0$ hinzukommt. Es folgt hieraus als Bedingung des Gleichgewichts der Elektricität, dass die Summe aller auf den kreisförmigen Leiter von Aussen wirkenden elektromotorischen Kräfte, nämlich

$$S = \int ds\,\Sigma\left(f_n\sin\frac{ns}{a} + g_n\cos\frac{ns}{a}\right) = 0$$

sein müsse, ganz in Uebereinstimmung mit dem bekannten Ohm'schen Gesetze, wonach die Stromintensität der Summe dieser Kräfte proportional ist und daher nur zugleich mit dieser Summe Null werden kann.

12.

Beharrliche Strömungen der Elektricität in einem kreisförmigen Leiter.

Eine *beharrliche* Strömung wird die Bewegung der Elektricität in einem Leiter genannt, wenn sie in jedem Punkte des Leiters immer gleich bleibt. Sie ist nur in einem geschlossenen Leiter möglich. Findet also eine solche *beharrliche* Strömung statt, so hat man für alle Punkte des geschlossenen Leiters

$$i = \text{Const},$$

folglich

$$\frac{di}{dt} = -\frac{a}{2}\Sigma'\frac{1}{n}\left(\frac{d^2b_n}{dt^2}\sin\frac{ns}{a} - \frac{d^2a_n}{dt^2}\cos\frac{ns}{a}\right) = 0,$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2b_n}{dt^2} = 0,$$

wozu noch hinzuzufügen ist, dass $\frac{1}{n}\frac{d^2a_n}{dt^2} = 0$, auch für $n = 0$, sein müsse.

Die am Schlusse von Art. 10 angeführten Bewegungsgleichungen gehen dann in folgende Bedingungsgleichungen für *beharrliche* Strömungen über, nämlich, wenn $n > 0$ ist,

$$\frac{1}{4\pi aak}\cdot\frac{da_n}{dt} + \frac{n^2N''}{aa}\cdot a_n - \frac{n}{2a}g_n = 0$$

$$\frac{1}{4\pi aak}\cdot\frac{db_n}{dt} + \frac{n^2N''}{aa}\cdot b_n + \frac{n}{2a}f_n = 0$$

wozu noch $\frac{1}{n}\frac{da_n}{dt} = \text{Const}$ für $n = 0$, folglich $a_0 = \text{Const}$ hinzukommt. Hieraus folgt, dass bei *beharrlicher* Strömung die Summe aller auf den kreisförmigen Leiter von Aussen wirkenden elektromotorischen Kräfte

$$S = \int ds\Sigma\left(f_n\sin\frac{ns}{a} + g_n\cos\frac{ns}{a}\right) = \frac{2}{a}\int ds\Sigma nN''\left(a_n\cos\frac{ns}{a} - b_n\sin\frac{ns}{a}\right)$$
$$- \frac{a}{2\pi aak}\int ds\Sigma'\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)$$

sein soll; folglich, da

$$-\frac{a}{2}\Sigma'\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{o} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right) = i$$

und da

$$\int ds \Sigma n N'' \left(a_n \cos\frac{ns}{a} - b_n \sin\frac{ns}{a}\right) = 0$$

ist, wie man leicht sieht wenn man beachtet, dass a_0 einen constanten Werth hat und folglich $na_n = 0$ ist für $n = 0$,

$$S = \frac{1}{\pi aak} \cdot \int ids\ .$$

Nun ist aber $\frac{1}{2\pi a} \cdot \int ids = J$ der *Mittelwerth der Stromintensität im ganzen Leiter*, und $\frac{2\pi a}{\pi aak} = w$ ist der *Widerstand des ganzen Leiters;* folglich $S = Jw$, d. i. die Summe der äusseren elektromotorischen Kräfte im ganzen Leiter soll dem Producte des Widerstands in die mittlere Stromintensität des ganzen Leiters gleich sein, ganz in Uebereinstimmung mit dem Ohm'schen Gesetze, dass das Product des Widerstands in die Stromstärke die elektromotorische Kraft der Kette giebt, was mit obigem Resultate identisch ist, wenn man dabei voraussetzt, dass gar keine Verschiedenheiten der Stromintensitäten in verschiedenen Punkten des Leiters statt finden. Dies braucht nun zwar nach obiger Theorie nicht nothwendig der Fall zu sein; soll aber eine Verschiedenheit der Stromintensitäten in verschiedenen Punkten mit der Beharrlichkeit des Stroms in jedem einzelnen Punkte bestehen, so müssen nach obiger Theorie die von Aussen wirkenden elektromotorischen Kräfte *mit der Zeit proportional* sich ändern, ein Fall der in der Wirklichkeit nicht vorkommt und daher bei dem auf die Erfahrung begründeten Ohm'schen Gesetze ausser Betracht geblieben ist. Es leuchtet nämlich ein, dass wenn

$$i = -\frac{a}{2} \Sigma \frac{1}{n} \left(\frac{db_n}{dt} \sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos\frac{ns}{a}\right)$$

in verschiedenen Punkten des Leiters verschiedene Werthe haben soll, wenigstens für einen von Null verschiedenen Werth von n entweder $\frac{da_n}{dt}$ oder $\frac{db_n}{dt}$ einen von Null verschiedenen Werth $= A$ haben müsste, woraus entweder $a_n = At + B$ oder $b_n = At + B$ folgte. Substituirt man nun im einen Falle $At + B$ für a_n in der ersten von den beiden oben gefundenen Bedingungsgleichungen beharrlicher Strömung, so erhält man

$$\frac{1}{4\pi aak} \cdot A + \frac{n^2 N''}{aa}(At + B) - \frac{n}{2a} g_n = 0\ ,$$

woraus folgt, dass g_n *mit der Zeit proportional* sich ändert. Substituirt man im andern Falle $At + B$ für b_n in der zweiten Bedingungsgleichung,

so folgt auf gleiche Weise, dass f_n *mit der Zeit proportional* sich ändert. In beiden Fällen würde also auch die von Aussen wirkende elektromotorische Kraft

$$S_n = f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}$$

mit der Zeit proportional sich ändern.

13.

Bewegungsgesetze der nach beliebiger Störung des Gleichgewichts sich selbst überlassenen Elektricität in einem kreisförmigen Leiter.

Die Theorie der Bewegung der nach beliebiger Störung des Gleichgewichts sich selbst überlassenen Elektricität in einem Leiter umfasst die wichtige Lehre von der *Fortpflanzung*, insbesondre die Fragen, ob die Bewegungsfortpflanzung durch die Elektricität in Leitern, ebenso wie die durch den Lichtäther oder durch die Luft, von *Wellen* vermittelt werde, ferner welche *Geschwindigkeit* diese Wellen besitzen, und endlich überhaupt welche *Gesetze* von dieser Wellenverbreitung gelten. Die ursprüngliche Störung des Gleichgewichts kann nämlich auf einen kleinen Theil des Leiters beschränkt sein, und wenn darauf, ohne äussere Einwirkung, *ähnliche* Störungen des Gleichgewichts *successiv* in allen übrigen Theilen des Leiters von selbst eintreten, so bezeichnet man diese Uebertragung mit dem Namen *Fortpflanzung*, und das Fortgepflanzte mit dem Namen *Welle*.

Soll die Elektricität im Leiter sich selbst überlassen bleiben, so sind *alle von Aussen her stammenden Kräfte*, welche auf die Elektricität im Leiter wirken würden, $= 0$ zu setzen. Man erhält daher die Bewegungsgleichungen für diesen Fall, wenn man in den Gleichungen am Schlusse von Art. 10

$$f_n = 0 \quad \text{und} \quad g_n = 0$$

setzt, nämlich folgende:

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi\alpha\alpha k M''(1+\lambda)} \cdot \frac{da_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2\alpha\alpha M''(1+\lambda)} \cdot a_n = 0$$

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi\alpha\alpha k M''(1+\lambda)} \cdot \frac{db_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2\alpha\alpha M''(1+\lambda)} \cdot b_n = 0\,.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man nun durch Integration, wenn

$$\frac{cc}{16\pi\alpha\alpha k M''(1+\lambda)} = \varepsilon$$

$$\frac{n^2 c^2 N''}{2\alpha\alpha M''(1+\lambda)} = m^2 + \varepsilon^2$$

gesetzt wird,

$$a_n = Ae^{-\varepsilon t}.\ \sin m\,(t - A')$$
$$b_n = Be^{-\varepsilon t}.\ \sin m\,(t - B')\ ,$$

wo A, A', B, B' die Integrationsconstanten sind, welche aus der gegebenen ursprünglichen Störung des Gleichgewichts zu bestimmen sind.

Ist nämlich die ursprüngliche Vertheilung der freien Elektricität im Leiter durch folgende Gleichung gegeben, wenn E_0 den Werth der Dichtigkeit E für $t = 0$ bezeichnet,

$$E_0 = \Sigma\left(a^0_n \sin\frac{ns}{a} + b^0_n \cos\frac{ns}{a}\right)$$

und die ursprünglichen Strömungen in allen Theilen des Leiters durch folgende Gleichung, wenn i_0 den Werth der Stromintensität i für $t = 0$ bezeichnet,

$$i_0 = -\frac{a}{2}\,\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db^0_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da^0_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)\ ,$$

worin a^0_n, b^0_n, $\frac{da^0_n}{dt}$, $\frac{db^0_n}{dt}$ bekannte Werthe haben, so erhält man durch Einsetzen dieser Werthe in obige Gleichung für $t = 0$

$$a^0_n = -A\sin mA'$$
$$b^0_n = -B\sin mB'$$

und, nachdem man obige Gleichungen differentiirt hat,

$$\frac{da^0_n}{dt} = mA\cos mA' - \varepsilon a^0_n$$
$$\frac{db^0_n}{dt} = mB\cos mB' - \varepsilon b^0_n\ .$$

Aus diesen vier Gleichungen ergeben sich folgende Werthe der Integrationsconstanten:

$$A = \sqrt{\left(a^{0\,2}_n + \frac{1}{m^2}\left(\varepsilon a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right)^2\right)}$$
$$B = \sqrt{\left(b^{0\,2}_n + \frac{1}{m^2}\left(\varepsilon b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right)^2\right)}$$
$$A' = -\frac{1}{m}\,\text{arc}\sin\frac{a^0_n}{A}$$
$$B' = -\frac{1}{m}\,\text{arc}\sin\frac{b^0_n}{B}\ .$$

Setzt man die beiden letzteren Werthe in die obigen Gleichungen ein, so erhält man

$$a_n = Ae^{-\varepsilon t} \sin\left(mt + \text{arc} \sin \frac{a^0_n}{A}\right)$$

$$b_n = Be^{-\varepsilon t} \sin\left(mt + \text{arc} \sin \frac{b^0_n}{B}\right)$$

und hiemit das Gesetz der *Vertheilung der freien Elektricität* im Leiter:

$$E = \Sigma e^{-\varepsilon t}.\left(A \sin\frac{ns}{a} \sin\left(mt + \text{arc} \sin\frac{a^0_n}{A}\right) + B \cos\frac{ns}{a} \sin\left(mt + \text{arc} \sin\frac{b^0_n}{B}\right)\right),$$

oder, wenn der Sinus der Summe zweier Bögen entwickelt wird,

$$E = \Sigma e^{-\varepsilon t}.\left(a^0_n \sin\frac{ns}{a} \cos mt + \sqrt{(B^2 - b^0_n{}^2)} \cos\frac{ns}{a} \sin mt + b^0_n \cos\frac{ns}{a} \cos mt + \sqrt{(A^2 - a^0_n{}^2)} \sin\frac{ns}{a} \sin mt\right).$$

Setzt man nun

$$a^0_n = p + q \qquad b^0_n = p' + q'$$

$$\sqrt{(B^2 - b^0_n{}^2)} = p - q \qquad \sqrt{(A^2 - a^0_n{}^2)} = p' - q'$$

wodurch p, q, p', q' bestimmt werden, nämlich

$$p = \tfrac{1}{2}\left(a^0_n + \frac{1}{m}\left(\varepsilon b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right)\right)$$

$$q = \tfrac{1}{2}\left(a^0_n - \frac{1}{m}\left(\varepsilon b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right)\right)$$

$$p' = \tfrac{1}{2}\left(b^0_n + \frac{1}{m}\left(\varepsilon a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right)\right)$$

$$q' = \tfrac{1}{2}\left(b^0_n - \frac{1}{m}\left(\varepsilon a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right)\right),$$

so erhält man

$$E = \Sigma e^{-\varepsilon t}.\left(q \sin\left(\frac{ns}{a} - mt\right) + p' \cos\left(\frac{ns}{a} - mt\right)\right) + \Sigma e^{-\varepsilon t}.\left(p \sin\left(\frac{ns}{a} + mt\right) + q' \cos\left(\frac{ns}{a} + mt\right)\right),$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$E = \Sigma \sqrt{(p'p' + qq)}\,.\,e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{ns}{a} - mt + \text{arc tg}\,\frac{p'}{q}\right) + \Sigma \sqrt{(pp + q'q')}\,.\,e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{ns}{a} + mt + \text{arc tg}\,\frac{q'}{p}\right).$$

Auf gleiche Weise findet man das Gesetz der *Strömung der Elektricität* im Leiter, nämlich:

$$i = \Sigma \sqrt{(P'P' + QQ)}\,.\,e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{ns}{a} - mt + \text{arc tg}\,\frac{P'}{Q}\right) + \Sigma \sqrt{(PP + Q'Q')}\,.\,e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{ns}{a} + mt + \text{arc tg}\,\frac{Q'}{P}\right)$$

worin P, Q, P', Q' folgende Werthe haben:

$$P = -\frac{a}{4n}\left(\frac{db^0_n}{dt} + \frac{1}{m}\left((m^2 + \varepsilon^2)\, a^0_n + \varepsilon \frac{da^0_n}{dt}\right)\right)$$

$$Q = -\frac{a}{4n}\left(\frac{db^0_n}{dt} - \frac{1}{m}\left((m^2 + \varepsilon^2)\, a^0_n + \varepsilon \frac{da^0_n}{dt}\right)\right)$$

$$P' = +\frac{a}{4n}\left(\frac{da^0_n}{dt} + \frac{1}{m}\left((m^2 + \varepsilon^2)\, b^0_n + \varepsilon \frac{db^0_n}{dt}\right)\right)$$

$$Q' = +\frac{a}{4n}\left(\frac{da^0_n}{dt} - \frac{1}{m}\left((m^2 + \varepsilon^2)\, b^0_n + \varepsilon \frac{db^0_n}{dt}\right)\right).$$

14.

Vergleichung mit dem Ohm'schen Gesetze.

Es ist schon Art. 6 erörtert worden, wovon es abhänge, ob das von Ohm für *beharrliche* Ströme aufgestellte Gesetz auch auf *veränderliche* Ströme angewendet werden dürfe. Es hing dies von der Grösse $\lambda = \frac{cc}{8 \log \frac{l}{a} \cdot r\mathfrak{E}}$ ab; überall wo diese Grösse in Betracht kommt und ihr Werth nicht verschwindet, findet das Ohm'sche Gesetz entweder gar keine oder nur eine approximative Anwendung. Diese Grösse λ ist Art. 8, mit Rücksicht auf den Art. 6 noch nicht berücksichtigten Einfluss, welchen entferntere Theile der Kette darauf haben, genauer bestimmt worden, nämlich $\lambda = \frac{cc}{4M'' r\mathfrak{E}}$, wo der für $2 \log \frac{l}{a}$ in Art. 6 gesetzte Werth M'' genau definirt und Art. 10 für einen kreisförmigen Leiter bestimmt worden ist. Diese Grösse λ, oder, da der Werth des Factors $\frac{cc}{4M''}$ als bekannt betrachtet werden darf, die Grösse des Products $r\mathfrak{E}$, erlangt dadurch, dass sie über die Anwendbarkeit des Ohm'schen Gesetzes entscheidet, in der Lehre von der Bewegung der Elektricität in Leitern eine besondere Wichtigkeit, deren Grund sich aus der *physischen Bedeutung* des Products $r\mathfrak{E}$ leicht erkennen lässt.

Die in der Längeneinheit des Leiters enthaltene positive Elektricitätsmenge ist nämlich, in der nach elektrostatischem Gesetze festgesetzten Maasseinheit ausgedrückt, mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet und ihre *Masse in Milligrammen* $= \frac{1}{r}\mathfrak{E}$ gesetzt worden. Aus der Definition der nach elektrostatischem Gesetze festgesetzten Maasseinheit (wonach nämlich diejenige Elektricitätsmenge zur Maasseinheit genommen wird, welche auf eine gleiche in der Einheit der Entfernung nach elektrostatischem Gesetze die Einheit der Kraft ausübt, d. i. eine Kraft, welche der Masse eines Milligramms in der Zeiteinheit die Einheit der Geschwindigkeit ertheilt) geht aber hervor, dass rr die Kraft ist, welche *ein Milligramm* positiver oder negativer Elektricität auf ein gleiches Milligramm Elektricität in der Einheit der Entfernung ausübt. Hieraus folgt, dass das Product $r\mathfrak{E}$ die Kraft bedeutet, welche *die in der Längeneinheit des Leiters enthaltene positive Elektricität*, wenn sie in einem Punkte concentrirt wäre, auf *ein Milligramm* positiver Elektricität in der Einheit der Entfernung ausüben würde.

Durch die Art. 8ff. gegebene Entwickelung der Bewegungsgesetze der Elektricität in einem geschlossenen Leiter wird nun der Einfluss dieser Grösse λ oder des Products $r\mathfrak{E}$ näher bestimmt. Aus Art. 11 und 12 geht zunächst hervor, dass die Gesetze des *Gleichgewichts* und der *beharrlichen Ströme* der Elektricität in Leitern ganz in Uebereinstimmung mit dem Ohm'schen Gesetze sind, weil die Grösse λ oder $r\mathfrak{E}$ dabei gar nicht in Betracht kommt, während aus Art. 13 hervorgeht, dass die Gesetze der *Fortpflanzung*, oder im Allgemeinen die Gesetze aller nach Störung des Gleichgewichts eintretenden *Bewegungsänderungen*, zunächst von den Werthen m und ε und dadurch mittelbar von λ oder $r\mathfrak{E}$ wesentlich abhängig sind. Es folgt daraus, dass von der Grösse λ oder dem Producte $r\mathfrak{E}$ (und dadurch also mittelbar, wenn die in der Längeneinheit eines Leiters enthaltene Elektricitätsmenge nach *elektrostatischer Maasseinheit* bekannt wäre, von der ganzen *Masse* der im Leiter vorhandenen Elektricität in Milligrammen) nur aus solchen Beobachtungen Kenntniss erlangt werden kann, welche bestimmte *Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze* in den nach Störung des Gleichgewichts eintretenden *Bewegungsänderungen* der Elektricität in Leitern nachweisen.

Es leuchtet ein, welche Wichtigkeit *genauere Beobachtungen über Bewegungsänderungen oder über Bewegungsfortpflanzungen durch die Elektricität in Leitern* hiedurch gewinnen; denn gelänge es aus solchen Beobachtungen irgend eine *Abweichung vom Ohm'schen Gesetze* wirklich nachzuweisen, so würde dieses Resultat zur Kenntniss des Werths des Products $r\mathfrak{E}$ führen, das heisst zur Kenntniss der Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten, welche auf *ein Milligramm* Elektricität gehen, wenn die in der Längeneinheit des Leiters enthaltene Zahl *elektrostatischer Maasseinheiten* bekannt ist.

Es sollen zunächst die Gesetze *elektrischer Wellenbewegungen* in kreisförmigen Leitern nach Art. 13 näher entwickelt werden, um zu prüfen, ob daraus ein bestimmter Leitfaden für die *Ausführung solcher Beobachtungen* entnommen werden könne; sodann, wenn dies nicht der Fall wäre, soll geprüft werden, worin der Grund davon liege, und ob es andere elektrische Bewegungen in kreisförmigen Leitern gebe, die sich besser als die *Wellenbewegung* dazu eigneten.

15.

Elektrische Wellenbewegungen in einem kreisförmigen Leiter.

Aus den Art. 13 entwickelten Gesetzen ergiebt sich, dass alle Bewegungen der in einem kreisförmigen Leiter sich selbst überlassenen Elektricität nach einer beliebigen Störung des Gleichgewichts zu einer Reihe *vorwärts*, und zu einer Reihe *rückwärts* schreitender *Wellenzüge* sich gestalten, von denen der *erste Wellenzug* jeder der beiden Reihen aus zwei Wellen besteht, nämlich aus einer positiven und aus einer negativen, die zusammen die ganze Kreisperipherie einnehmen; der *zweite Wellenzug* jeder Reihe besteht aus vier abwechselnd positiven und negativen Wellen, die zusammen den ganzen Kreis einnehmen; der *dritte Wellenzug* aus sechs Wellen u. s. w.

Löst man nämlich die Summen, durch welche Art. 13 die Dichtigkeit der freien Elektricität E und die Stromintensität i dargestellt worden sind, in ihre Glieder auf und bezeichnet diese Glieder nach ihrer Stellenzahl n mit E_n und i_n, so ist

$$E_1 = \sqrt{(p'p' + qq)} \,.\, e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{s}{a} - mt + \operatorname{arc\,tg}\frac{p'}{q}\right) + \sqrt{(pp + q'q')} \,.\, e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{s}{a} + mt + \operatorname{arc\,tg}\frac{q'}{p}\right)$$

$$i_1 = \sqrt{(P'P' + QQ)} \,.\, e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{s}{a} - mt + \operatorname{arc\,tg}\frac{P'}{Q}\right) + \sqrt{(PP + Q'Q')} \,.\, e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{s}{a} + mt + \operatorname{arc\,tg}\frac{Q'}{P}\right)$$

wovon die ersteren Theile, welche den Sinus eines Bogens der sich mit $(s - amt)$ proportional ändert enthalten, den *ersten vorwärts* schreitenden *Wellenzug*, die letzteren Theile, welche den Sinus eines Bogens der sich mit $(s + amt)$ proportional ändert enthalten, den *ersten rückwärts* schreitenden *Wellenzug* darstellen. Der erste vorwärts schreitende Wellenzug besteht aber aus einer *positiven Welle*, welche im Augenblicke $t = \frac{1}{m}$ arc tang $\frac{p'}{q}$ von $s = 0$ bis $s = \pi a$ sich erstreckt, wo die Welle eine Ladung des Leiters mit freier positiver Elektricität hervorbringt, und aus einer *negativen Welle*, welche im nämlichen Augenblicke von $s = \pi a$ bis $s = 2\pi a$ sich erstreckt, wo die Welle eine Ladung des Leiters mit freier negativer Elektricität hervorbringt. Beide Wellen zusammen nehmen aber die ganze Kreisperipherie ein. Dasselbe gilt von dem ersten rückwärts schreitenden Wellenzuge, welcher aus einer *positiven Welle* besteht, welche im Augenblicke $t = -\frac{1}{m}$ arc tang $\frac{q'}{p}$ von $s = 0$ bis $s = \pi a$ sich erstreckt, und aus einer *negativen Welle*, welche im nämlichen Augenblicke von $s = \pi a$ bis $s = 2\pi a$ sich erstreckt.

Ferner ist

$$E_2 = \sqrt{(p'p' + qq)} \, . \, e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{2s}{a} - mt + \operatorname{arc\,tg}\frac{p'}{q}\right) + \sqrt{(pp + q'q')} \, . \, e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{2s}{a} + mt + \operatorname{arc\,tg}\frac{q'}{p}\right)$$

$$i_2 = \sqrt{(P'P' + QQ)} \, . \, e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{2s}{a} - mt + \operatorname{arc\,tg}\frac{P'}{Q}\right) + \sqrt{(PP + Q'Q')} \, . \, e^{-\varepsilon t} \sin\left(\frac{2s}{a} + mt + \operatorname{arc\,tg}\frac{Q'}{P}\right) .$$

wovon die ersteren Theile, welche den Sinus eines Bogens der sich mit $(s - \frac{1}{2} amt)$ proportional ändert enthalten, den *zweiten vorwärts* schreitenden *Wellenzug*, die letzteren Theile, welche den Sinus eines Bogens der sich mit $(s + \frac{1}{2} amt)$ proportional ändert enthalten, den *zweiten rückwärts* schreitenden *Wellenzug* darstellen. Jener vorwärts schreitende Wellenzug besteht aus 4 Wellen, von denen im Augenblicke $t = \frac{1}{m} \operatorname{arc\,tang} \frac{p'}{q}$ die erste positive von $s = 0$ bis $s = \frac{1}{2}\pi a$, die zweite negative von $s = \frac{1}{2}\pi a$ bis $s = \pi a$, die dritte positive von $s = \pi a$ bis $s = \frac{3}{2}\pi a$, die vierte negative von $s = \frac{3}{2}\pi a$ bis $s = 2\pi a$ sich erstreckt. Dasselbe gilt von den 4 Wellen des rückwärts schreitenden Wellenzugs im Augenblicke $t = -\frac{1}{m} \operatorname{arc\,tang} \frac{q'}{p}$.

Auf gleiche Weise ergeben sich die dritten Wellenzüge beider Reihen aus E_3 und i_3 u. s. f.

Die *Intensitäten* dieser verschiedenen Wellenzüge, welche nach den Regeln der Wellenlehre proportional mit ii zu setzen sind, nehmen während der Fortpflanzung ab und zwar jeder Wellenzug in der Zeit t im Verhältniss

$$1 : e^{-2\varepsilon t} .$$

Diese Abnahme ist nach der Stellenzahl n der Wellenzüge verschieden, weil der Werth von ε mit dem Werthe von n sich ändert; denn es war

$$\varepsilon = \frac{cc}{16\pi\alpha\alpha k M''(1+\lambda)}$$

$$\lambda = \frac{cc}{4M''r\mathfrak{C}}$$

und hierin war nach Art. 10

$$M'' = -4\left(\cos\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\right) + 2\log\frac{8a}{e\alpha} - \tfrac{1}{8}\frac{nn\alpha}{a}$$
$$+ \frac{1}{2n+1}\cos\frac{2n+1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} - \frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} ,$$

woraus, wenn $\frac{\alpha}{a}$ sehr klein ist,

für $n = 1$, $M'' = 2\log\frac{8a}{\alpha} - 6.666\ldots$

für $n = 2$, $M'' = 2\log\frac{8a}{\alpha} - 7,466\ldots$

u. s. w. folgt. Bezeichnet w' den Widerstand der Längeneinheit des Leiters $= \frac{1}{\pi \alpha \alpha k}$, und wird $\lambda = 0$ gesetzt, d. h. beschränkt man sich auf diejenigen Fälle, wo das Ohm'sche Gesetz Anwendung findet, so ergiebt sich in der Zeiteinheit eine Intensitätsabnahme in einem Verhältnisse, welches für die ersten Wellenzüge, für welche $n = 1$,

$$= 1 : e^{-\frac{w'cc}{16 \log \frac{8a}{\alpha} - 53,33\,..}}$$

für die zweiten Wellenzüge, für welche $n = 2$,

$$= 1 : e^{-\frac{w'cc}{16 \log \frac{8a}{\alpha} - 59,738\,..}}$$

ist, u. s. w. Man sieht hieraus, dass eine desto schnellere Abnahme statt findet, je grösser der Widerstand der Längeneinheit des Leiters, je dicker der Leiter im Vergleich zu seiner Länge und je grösser die Stellenzahl n des Wellenzugs ist, das heisst, je kleiner die Wellen sind.

16.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenzüge in einem kreisförmigen Leiter.

Es ergiebt sich, wie oben gezeigt, aus Art. 13, dass die Bewegungen der Elektricität in einem kreisförmigen Leiter nach jeder Störung des Gleichgewichts sich in Wellenzüge, deren Fortpflanzung durch einfache Gesetze bestimmt ist, auflösen lassen, ebenso, wie dies bei vielen andern Körpern der Fall ist. Bei manchen Körpern, wie z. B. bei der Luft in einer kreisförmigen Röhre, kommt aber noch hinzu, dass diese Wellenzüge durch die Fortpflanzung gar nicht verändert werden, dass namentlich keine Intensitätsabnahme statt findet, und dass ausserdem sämmtliche Wellenzüge *mit gleicher Geschwindigkeit* fortgepflanzt werden, woraus folgt, dass sämmtliche vorwärts schreitende, oder sämmtliche rückwärts schreitende Wellenzüge sich zu einem einzigen Wellenzuge *zusammensetzen*, der ebenfalls unverändert und mit der nämlichen Geschwindigkeit, wie die einzelnen Wellenzüge aus denen er besteht, fortgepflanzt wird. Ein solcher zusammengesetzter Wellenzug besteht aber aus *zusammengesetzten Wellen*, die an Grösse, Form und Intensität von einander sehr verschieden sein können. Solche *zusammengesetzte Wellen*, welche in Folge gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit aller ihrer Bestandtheile immer auf gleiche Weise zusammengesetzt bleiben, haben

als *Beobachtungsobject* eine besondre physische Bedeutung und werden *Wellen im engeren Sinne* genannt.

In diesem *engeren* Sinne würden also elektrische Wellen in einem kreisförmigen Leiter, in welchem das elektrische Gleichgewicht gestört worden ist, schon wegen der verschiedenen Intensitätsabnahme der verschiedenen elementaren Wellenzüge nicht statt finden, noch weniger aber, wenn den verschiedenen elementaren Wellenzügen auch noch *verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten* zukommen.

Da die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit*, wo Wellen im engern Sinne statt finden, für die Kenntniss des *Fortpflanzungsmediums* von grösster Wichtigkeit ist, hat die Frage danach in Betreff der *Elektricität* besonderes Interesse erweckt, und es sollen daher die aus Art. 13 sich darüber ergebenden Resultate näher betrachtet werden.

Die *Fortpflanzungsgeschwindigkeiten* der verschiedenen elementaren Wellenzüge werden aus den Art. 13 entwickelten Formeln gleich der Zunahme oder Abnahme gefunden, welche s erhalten muss, wenn in den Werthen von E_n und i_n beim Wachsthum der Zeit t um 1 die Bogenwerthe unter dem Sinuszeichen unverändert bleiben sollen, d. i.

$$= \frac{ma}{n},$$

oder, wenn man für m seinen Werth aus Art. 13

$$m = \sqrt{\left(\frac{n^2c^2N''}{2aaM''(1+\lambda)} - \left(\frac{cc}{16\pi aakM''(1+\lambda)}\right)^2\right)}$$

setzt,

$$= \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{N''}{M''(1+\lambda)} - \frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2(1+\lambda)^2}\right)},$$

worin, wie oben, $w' = \frac{1}{\pi aak}$ gesetzt ist. Beschränkt man sich auf die Fälle, wo $\lambda = 0$ gesetzt werden kann, das heisst wo das Ohm'sche Gesetz Anwendung findet, so reducirt sich der Ausdruck dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf

$$\frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{N''}{M''} - \frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2}\right)},$$

worin die Werthe von N'' und M'' auf folgende Weise bestimmt werden:

$$N'' = 2\log\frac{8a}{\alpha} - 4\left(\cos\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\right) - \frac{n^2\alpha}{8a}$$

$$M'' = 2\log\frac{8a}{\alpha} - 4\left(\cos\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\right) - \frac{n^2\alpha}{8a}$$
$$-2 - \frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \frac{1}{2n+1}\cos\frac{2n+1}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}.$$

Hieraus ergiebt sich also, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die verschiedenen Wellenzüge nach Verschiedenheit ihrer Stellenzahl n verschieden ist, und es würde nur noch die Frage sein, ob die Differenzen dieser verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten nicht unter gewissen Verhältnissen so klein wären, dass sie näherungsweise als verschwindend betrachtet werden dürften, und welches der Grenzwerth sei, dem sich dann alle diese Fortpflanzungsgeschwindigkeiten näherten.

Aus den angeführten Werthen ergiebt sich nun wirklich, dass so lange die Stellenzahl n nicht über diejenigen Werthe hinausgeht, für welche $\frac{nn\alpha}{a}$ gegen 1 als verschwindend betrachtet werden kann,

$$\frac{N''}{M''} = 1 + \frac{8nn}{(4nn-1)M''}$$

gesetzt werden darf. Für grosse Werthe von M'', für welche der Bruch $\frac{8nn}{(4nn-1)M''}$ gegen 1 verschwindet, und für kleine Werthe des Widerstands des ganzen Leiters, für welche der Bruch $\frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2}$ gegen 1 verschwindet*), ist daher $\frac{c}{\sqrt{2}}$ der gesuchte Grenzwerth, dem sich alle Fortpflanzungsgeschwindigkeiten nähern, und dieser Grenzwerth ist, für den gegebenen Werth $c = 439450 \,.\, 10^6 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$,

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = 310740 \,.\, 10^6 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$$

d. i. eine Geschwindigkeit von 41950 Meilen in der Secunde.

Diese Geschwindigkeit hat schon Kirchhoff für die Fortpflanzung elektrischer Wellen gefunden und bemerkt: »dass sie sowohl unabhängig von dem Querschnitt, als auch von der Leitungsfähigkeit des Drahts, als auch endlich von der Dichtigkeit der Elektricität wäre; auch dass ihr Werth von 41950 Meilen in einer Secunde sehr nahe dem der Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume gleichkommt.« Könnte diese nahe Uebereinstimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen mit der des Lichtes als eine Andeutung eines inneren Zusammenhangs beider Lehren angesehen werden, so würde sie bei der

---

*) Der Bruch $\frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2}$ kann gegen 1 als verschwindend betrachtet werden, wenn für grosse Werthe von M'' diejenige Geschwindigkeit, welche nach *absolutem magnetischen Widerstandsmaasse* den Widerstand des ganzen Leiters ausdrückt, d. i. $\frac{\pi c}{4}acw'$, im Verhältniss zur Geschwindigkeit c sehr klein ist.

grossen Wichtigkeit, welche die Erforschung eines solchen Zusammenhangs hat, das grösste Interesse in Anspruch nehmen. Es leuchtet aber ein, dass dabei vor Allem die wahre Bedeutung, die in Beziehung auf die Elektricität jener Geschwindigkeit zukommt, in Betracht gezogen werden muss, welche nicht der Art zu sein scheint, dass sich grosse Erwartungen daran knüpfen liessen.

Denn die Annäherung der wahren Fortpflanzungsgeschwindigkeit an jenen Grenzwerth, der mit der Geschwindigkeit des Lichts übereinstimmt, setzt, wie eben gezeigt worden, nicht bloss einen im Vergleich zu seiner Länge sehr dünnen Leitungsdraht voraus, sondern auch, dass dieser lange und dünne Leitungsdraht einen sehr kleinen Widerstand besitze. Es leuchtet hieraus ein, dass grössere Annäherung an jenen Grenzwerth nur selten, grössere Abweichungen davon sehr häufig vorkommen werden. Hierüber lässt sich am leichtesten eine Uebersicht durch Beispiele gewinnen.

Wir wählen zu Beispielen drei kreisförmige Kupferdrähte, deren Kreishalbmesser der Reihe nach

$$a = 1000\ ,\qquad 1000000\ ,\qquad 1000000 \text{ Millimeter}$$

und deren Querschnitt der Reihe nach

$$\pi\alpha\alpha = 1\ ,\qquad 1\ ,\qquad \tfrac{1}{16} \text{ Quadratmillimeter}$$

gross sei. Der Widerstand dieser Drähte, wie er durch Messung *nach absolutem magnetischen Widerstandsmaasse* gefunden wird, kann (siehe Abhandlungen d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen Bd. 5 Art. 9) in runder Zahl $W = \frac{2\pi a}{\pi\alpha\alpha} . 2 . 10^6$ gesetzt werden. Nach bekannter Relation zwischen magnetischem und mechanischem Widerstandsmaasse ist aber $W = \frac{1}{4}\pi ccaw'$, oder $\frac{1}{128} a^2c^2w'^2 = \frac{W^2}{8\pi^2c^2}$, wonach

$$\frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{N''}{M''} - \frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2}\right)} = \frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{N''}{M''} - \frac{W^2}{8\pi^2c^2n^2M''^2}\right)} = \frac{c'}{\sqrt{2}}\ .$$

Hienach ist folgende Tafel berechnet.

n		1. Draht $a = 1000$ $\pi \alpha \alpha = 1$ $W = 4 . 10^9 . \pi$	2. Draht. $a = 1000000$ $\pi \alpha \alpha = 1$ $W = 4 . 10^{12} . \pi$	3. Draht. $a = 1000000$ $\pi \alpha \alpha = \frac{1}{10}$ $W = 4 . 10^{13} . \pi$
1	N''	$= 15,119$	$= 28,935$	$= 31,605$
	M''	$= 12,452$	$= 25,268$	$= 28,938$
	$\frac{N''}{M''}$	$= 1,214$	$= 1,145$	$= 1,092$
	$\frac{W^2}{8\pi^2 c^2 n^2 M''^2}$	$= \frac{1}{11970000}$	$= 0,0166$	$= 1,2364$
	$\frac{c'c'}{cc}$	$= 1,214$	$= 1,128$	$= -0,0443$
2	N''	$= 13,786$	$= 27,601$	$= 31,062$
	M''	$= 11,652$	$= 25,468$	$= 28,928$
	$\frac{N''}{M''}$	$= 1,183$	$= 1,084$	$= 1,074$
	$\frac{W^2}{8\pi^2 c^2 n^2 M''^2}$	$= \frac{1}{52450000}$	$= 0,00408$	$= 0,3093$
	$\frac{c'c'}{cc}$	$= 1,183$	$= 1,080$	$= 0,7644$
3	N''	$= 12,986$	$= 26,801$	$= 30,262$
	M''	$= 10,929$	$= 24,747$	$= 28,205$
	$\frac{N''}{M''}$	$= 1,188$	$= 1,083$	$= 1,073$
	$\frac{W^2}{8\pi^2 c^2 n^2 M''^2}$	$= \frac{1}{103800000}$	$= 0,00192$	$= 0,1446$
	$\frac{c'c'}{cc}$	$= 1,188$	$= 1,081$	$= 0,9283$
4	N''	$= 12,414$	$= 26,230$	$= 29,690$
	M''	$= 10,383$	$= 24,198$	$= 27,659$
	$\frac{N''}{M''}$	$= 1,196$	$= 1,084$	$= 1,073$
	$\frac{W^2}{8\pi^2 c^2 n^2 M''^2}$	$= \frac{1}{166200000}$	$= 0,00113$	$= 0,0846$
	$\frac{c'c'}{cc}$	$= 1,197$	$= 1,083$	$= 0,9889$
5	N''	$= 11,970$	$= 25,785$	$= 29,246$
	M''	$= 9,950$	$= 23,765$	$= 27,226$
	$\frac{N''}{M''}$	$= 1,203$	$= 1,085$	$= 1,074$
	$\frac{W^2}{8\pi^2 c^2 n^2 M''^2}$	$= \frac{1}{239000000}$	$= 0,00075$	$= 0,0559$
	$\frac{c'c'}{cc}$	$= 1,203$	$= 1,084$	$= 1,0183$

Aus den Werthen von $\frac{c'c'}{cc}$ in dieser Tafel, welche die Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $\frac{c'}{\sqrt{2}}$ in Theilen des Quadrats des Grenzwerths $\frac{c}{\sqrt{2}}$ angeben, stellen sich beträchtliche Verschiedenheiten schon unter den ersten 5 Wellenzügen, auf welche die Tafel beschränkt ist, dar; bei dem dritten Draht hat $\frac{c'c'}{cc}$ für $n = 1$ sogar einen *negativen* Werth, es wird hier also der Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ersten Wellenzugs *imaginär* und es lassen sich daher die Gesetze der Bewegungsänderungen in diesem Drahte nach einer Störung des Gleichgewichts gar nicht in Form fortgepflanzter Wellenzüge auffassen, sondern bedürfen einer andern Form, welche die Bewegungsänderungen als eine blosse Annäherung an den Gleichgewichtszustand darstellt, die mit dem Namen *Absorption* bezeichnet werden kann, und da sie für lange und dünne Leitungsdrähte von grossem Widerstande, namentlich also für Telegraphendrähte, von besonderer Wichtigkeit ist, nähere Betrachtung verdient.

17.

Absorption elektrischer Bewegungen in einem kreisförmigen Leiter.

Bei der Art. 13 gegebenen Integration der beiden partiellen Differentialgleichungen für die Bewegung der in einem kreisförmigen Leiter sich selbst überlassenen Elektricität, nämlich der Gleichungen

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{da_n}{dt} + (m^2 + \varepsilon^2)\,a_n = 0$$

$$\frac{d^2b_n}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{db_n}{dt} + (m^2 + \varepsilon^2)\,b_n = 0\,,$$

ist in den für a_n und b_n aufgestellten Ausdrücken

$$a_n = Ae^{-\varepsilon t}\sin m\,(t - A')$$
$$b_n = Be^{-\varepsilon t}\sin m\,(t - B')$$

vorausgesetzt worden, dass m einen reellen Werth erhielte, was aber nicht immer der Fall ist. Es lässt sich nämlich diese Voraussetzung, da, $\frac{1}{\pi aak} = w'$ gesetzt,

$$m = \frac{n}{a}\cdot\frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{N''}{M''(1+\lambda)} - \frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2(1+\lambda)^2}\right)}$$

war, auch so aussprechen, dass

$$\frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2(1+\lambda)^2} < \frac{N''}{M''(1+\lambda)}$$

sein solle, oder wenn $\lambda = 0$

$$\frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2} < \frac{N''}{M''}.$$

Das Beispiel des dritten Drahts im vorigen Artikel zeigt dagegen, dass bei langen und dünnen Leitungsdrähten auch der Fall vorkommen kann, dass

$$\frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2} > \frac{N''}{M''}$$

ist, woraus einleuchtet, dass alsdann die Integration obiger Differentialgleichungen unter der angeführten Form illusorisch wird und daher unter einer andern Form gesucht werden muss.

Setzt man alsdann zu diesem Zwecke

$$m = \frac{n}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2(1+\lambda)^2} - \frac{N''}{M''(1+\lambda)}\right)},$$

so erhalten die beiden Differentialgleichungen folgende Form, nämlich

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{da_n}{dt} + (\varepsilon^2 - m^2)\,a_n = 0$$

$$\frac{d^2b_n}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{db_n}{dt} + (\varepsilon^2 - m^2)\,b_n = 0,$$

aus denen durch Integration

$$a_n = Ae^{-\varepsilon t}\cdot\left(e^{m(t-A')} - e^{-m(t-A')}\right)$$

$$b_n = Be^{-\varepsilon t}\cdot\left(e^{m(t-B')} - e^{-m(t-B')}\right)$$

hervorgeht. Die Integrationsconstanten A, A', B, B' werden hierin auf gleiche Weise, wie es Art. 13 geschehen, aus den für $t = 0$ gegebenen Werthen von a^0_n, b^0_n, $\frac{da^0_n}{dt}$, $\frac{db^0_n}{dt}$, durch welche die ursprüngliche Vertheilung der freien Elektricität im Leiter und die ursprünglichen Strömungen ausgedrückt werden, gefunden. Man erhält auf diese Weise

$$Ae^{-mA'} = \frac{1}{2m}\left((\varepsilon + m)\,a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right)$$

$$Ae^{+mA'} = \frac{1}{2m}\left((\varepsilon - m)\,a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right)$$

$$Be^{-mB'} = \frac{1}{2m}\left((\varepsilon + m)\,b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right)$$

$$Be^{+mB'} = \frac{1}{2m}\left((\varepsilon - m)\,b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right).$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man folgende beiden Gleichungen:

$$a_n = \frac{1}{2m}\left[\left((\varepsilon+m)\,a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon-m)t} - \left((\varepsilon-m)\,a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon+m)t}\right]$$
$$b_n = \frac{1}{2m}\left[\left((\varepsilon+m)\,b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon-m)t} - \left((\varepsilon-m)\,b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right)e^{-(\varepsilon+m)t}\right].$$

Setzt man endlich diese Werthe von a_n und b_n in die Gleichungen

$$E = \Sigma\left(a_n \sin\frac{ns}{a} + b_n \cos\frac{ns}{a}\right)$$
$$i = -\frac{a}{2}\,\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)$$

so findet man die Gesetze der Vertheilung der freien Elektricität und der Strömungen im kreisförmigen Leiter für die hier betrachteten Fälle.

Ein solcher Fall kommt nun bei jedem kreisförmigen Leiter vor, wenn nämlich die gegebene ursprüngliche Vertheilung der freien Elektricität und der Strömungen darin so beschaffen ist, dass der Werth von b^0_n oder $\frac{1}{n}\frac{da^0_n}{dt}$ für $n = 0$ nicht Null ist, und es ist daher dieser Fall von der Betrachtung Art. 15 ausgeschlossen worden, wo nur diejenigen Werthe von E_n und i_n erörtert wurden, welche für $n = 1, 2, 3 \ldots$ gelten. Ist nämlich $n = 0$, so leuchtet von selbst ein, dass

$$\frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2(1+\lambda)^2} > \frac{N''}{M''(1+\lambda)}$$

ist und dass alsdann

$$m = \frac{1}{a}\cdot\frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a^2c^2w'^2}{128M''^2(1+\lambda)^2}}$$

zu setzen ist. Nun war aber

$$\varepsilon = \frac{ccw'}{16M''(1+\lambda)},$$

woraus folgt, dass für $n = 0$

$$m = \varepsilon$$

zu setzen ist.

Substituirt man nun diesen Werth von m in den oben angeführten Werthen von a_n und b_n, so erhält man

$$a_0 = a^0_0 + \frac{1}{2\varepsilon}\,\frac{da^0_0}{dt} - \frac{1}{2\varepsilon}\,\frac{da^0_0}{dt}\,.\,e^{-2\varepsilon t}$$
$$b_0 = b^0_0 + \frac{1}{2\varepsilon}\,\frac{db^0_0}{dt} - \frac{1}{2\varepsilon}\,\frac{db^0_0}{dt}\,.\,e^{-2\varepsilon t}$$

und hieraus durch Differentiation

$$\frac{da_0}{dt} = \frac{da^0_0}{dt}\,.\,e^{-2\varepsilon t}$$
$$\frac{db_0}{dt} = \frac{db^0_0}{dt}\,.\,e^{-2\varepsilon t}.$$

Setzt man nun diese Werthe in die Gleichungen

$$E_n = a_n \sin\frac{ns}{a} + b_n \cos\frac{ns}{a}$$

$$i_n = -\frac{a}{2n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)$$

für $n = 0$, ein, so findet man

$$E_0 = b^0_0 + \frac{1}{2\varepsilon}\frac{db^0_0}{dt}\left(1 - e^{-2\varepsilon t}\right)$$

$$i_0 = -\frac{s}{2}\frac{db^0_0}{dt}e^{-2\varepsilon t} + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{n}\frac{da_n}{dt}\right)_0$$

wo $\left(\frac{1}{n}\frac{da_n}{dt}\right)_0$ den Werth von $\left(\frac{1}{n}\frac{da_n}{dt}\right)$ für $n = 0$ bezeichnet; folglich, da $\left(\frac{1}{n}\frac{da_n}{dt}\right)_0 = \left(\frac{1}{n}\frac{da^0_n}{dt}\right)_0 . e^{-2\varepsilon t}$ ist, und da in der Gleichung

$$i_n = -\frac{a}{2n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)$$

die Coefficienten von $\sin\frac{ns}{a}$ und $\cos\frac{ns}{a}$ stets endliche Werthe haben sollen, wonach für $n = 0$

$$\frac{da_0}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{db_0}{dt} = 0$$

sein müsse,

$$E_0 = b^0_0$$

$$i_0 = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{n}\frac{da^0_n}{dt}\right)_0 . e^{-2\varepsilon t} .$$

Hieraus ergiebt sich also, dass, wenn ein kreisförmiger Leiter ursprünglich seiner ganzen Länge nach gleichförmig mit freier Elektricität geladen ist, so dass jede Längeneinheit dieselbe Menge freier Elektricität $= b^0_0$ enthält, diese Ladung mit der Zeit t keine Aenderung erleidet, was auch von selbst unmittelbar einleuchtet. Ausserdem ergiebt sich aber, dass, wenn in demselben Leiter eine in allen Theilen gleiche Strömung ursprünglich vorhanden ist, diese vorhandene Strömung in dem Augenblicke, von dem an die Elektricität im Leiter sich selbst überlassen bleibt, nicht verschwindet, sondern mit arithmetisch wachsender Zeit t nach dem Gesetz einer geometrischen Reihe allmählig abnimmt. Leuchtet auch die Nothwendigkeit des allmähligen Verschwindens hiebei a priori ein, so liess sich doch a priori nicht übersehen, wie schnell es erfolgen müsse und welche Verschiedenheiten in dieser Schnelligkeit zwischen verschiedenen Leitern statt finden.

Es ist für manche praktische Fragen von Interesse, zu bestimmen, — wenn ein Strom von bestimmter Intensität i in einem geschlossenen Leiter in demjenigen Augenblicke vorhanden ist, von dem an die Elek-

tricität im Leiter sich ganz selbst überlassen bleibt, weil von Aussen keine elektromotorische Kraft darauf wirkt, wie es z. B. der Fall ist, wenn ein gegen den Leiter bewegter inducirender Magnet durch Anstossen in seiner Bewegung plötzlich gehemmt wird, — wie gross die positive oder negative Elektricitätsmenge sei, welche von dem angegebenen Augenblicke an durch jeden Querschnitt des Leiters noch hindurchgeht; so wie ferner zu bestimmen, wie lang die Zeit ist, welche von demselben Augenblicke an verfliessen muss, bis die Stromintensität vom Werthe i bis $\frac{1}{2}i$ abgenommen habe.

Ist $i = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{n}\frac{da^{\circ}{}_{n}}{dt}\right)_0$ für jenen Augenblick $t = 0$ gegeben, so ist die Stromintensität nach Verlauf der Zeit t

$$= i \, . \, e^{-2\varepsilon t} ,$$

was, nach mechanischem Maasse ausgedrückt, die Menge der positiven Elektricität bezeichnet, welche bei dieser Stromintensität in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters gehen würde. Die Menge der positiven Elektricität, welche im Zeitelemente dt durch den Querschnitt des Leiters geht, ist hienach

$$= i \, . \, e^{-2\varepsilon t} \, dt ,$$

und der von $t = 0$ bis $t = \infty$ hievon genommene Integralwerth giebt die ganze positive Elektricitätsmenge, welche von dem betrachteten Augenblicke an überhaupt noch durch jeden Querschnitt des Leiters hindurchgeht, nämlich

$$i \int_0^\infty e^{-2\varepsilon t} \, dt = \frac{1}{2\varepsilon} \, . \, i \, .$$

Die in entgegengesetzter Richtung durch den Querschnitt gehende negative Elektricität ist eben so gross.

Ferner ergiebt sich zur Bestimmung der Zeit t, in welcher die Stromintensität auf die Hälfte ihres Werths herabsinkt, folgende Gleichung:

$$e^{-2\varepsilon t} = \frac{1}{2} ,$$

folglich $t = \frac{1}{2\varepsilon} \log \text{nat} \, 2$.

Nun war $\varepsilon = \frac{ccw'}{16M''(1+\lambda)}$, worin, für $n = 0$, $M'' = 2 \log \frac{8a}{\alpha}$ zu setzen ist; folglich ist, $\lambda = 0$ gesetzt, jene durch den Querschnitt des Leiters gehende Elektricitätsmenge

$$\frac{1}{2\varepsilon} \cdot i = \frac{16}{ccw'} \cdot \log \frac{8a}{\alpha} \cdot i = \frac{2}{W'} \log \frac{8a}{\alpha} \cdot i \; ,$$

wenn $W' = \frac{cc}{8} w'$ den Widerstand der Längeneinheit des Leiters nach magnetischem Maasse bezeichnet.

Die Zeit, in welcher die Stromintensität auf die Hälfte ihres Werthes herabsinkt, ist dann, in Secunden ausgedrückt,

$$\frac{1}{2\varepsilon} \cdot \log 2 = \frac{16}{ccw'} \cdot \log \frac{8a}{\alpha} \cdot \log 2 = \frac{2}{W'} \cdot \log \frac{8a}{\alpha} \cdot \log 2 \; .$$

Für die Art. 16 als Beispiele angeführten Drähte ergeben sich hienach folgende Werthe:

	1. Draht	2. Draht	3. Draht
$\frac{1}{2\varepsilon}$	$\frac{1}{104607}$	$\frac{1}{60726}$	$\frac{1}{567581}$
$\frac{\log 2}{2\varepsilon}$	$\frac{1}{150916}$	$\frac{1}{87609}$	$\frac{1}{818846}$

So klein hienach auch der Bruchtheil $\frac{1}{2\varepsilon}$ ist, den die von dem verschwindenden Strome durch den Querschnitt des Leiters geführte positive Elektricitätsmenge von derjenigen bildet, welche bei der ursprünglichen Stromintensität in der Zeiteinheit durch den Querschnitt gehen würde, so könnte doch jene Elektricitätsmenge eine sehr starke *Ladung* des Leiters hervorbringen, wenn sie dazu verwendet würde. Denn wäre z. B. die ursprünglich vorhandene Stromintensität gleich der *magnetischen Maasseinheit* (bei welcher 1 Milligramm Wasser in $106\frac{2}{3}$ Secunde zersetzt wird), so würde die bei diesem Strome in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters gehende positive Elektricitätsmenge $155370 \cdot 10^6$ *elektrostatische Maasseinheiten* betragen, und es würden, während der Strom im 1. Drahte verschwände, noch $\frac{155370}{104607} \cdot 10^6$ d. i. fast $1\frac{1}{2}$ Million *elektrostatischer Maasseinheiten* positiver Elektricität durch jeden Querschnitt des Leiters geführt werden, d. i. etwa der 24. Theil der schwächsten, oder der 33. Theil der stärksten Ladung der kleinen *Leidener Flasche*, welche zu dem in der vorigen Abhandlung, im 5. Bande, beschriebenen Versuche gebraucht worden, wo jene Ladungen S. 254 näher bestimmt sind.

Man sieht leicht ein, dass ein ähnliches Verschwinden des in einem geschlossenen Leiter vorhandenen Stromes in dem Augenblicke eintritt, wo die Kette eines galvanischen Stroms gelöst wird, und dass dann die von dem verschwindenden Strome durch den mittelsten Querschnitt des

Leiters geführte positive Elektricitätsmenge wirklich zur *Ladung* der einen Hälfte des Leiters, sowie die in entgegengesetzter Richtung durch denselben Querschnitt geführte negative Elektricitätsmenge zur Ladung der andern Hälfte des Leiters verwendet wird, und dass durch diese entgegengesetzten Ladungen an der Stelle, wo die Kette durchbrochen wurde, der *Lösungsfunke* hervorgebracht wird, wo es von Interesse ist, die durch den *Lösungsfunken* entladenen *Elektricitätsmengen* kennen zu lernen.

Ebenso leuchtet die Wichtigkeit einer weiter auszuführenden Entwickelung der Gesetze des Stromverschwindens für die Bestimmung der dadurch auf andere Leiter ausgeübten Inductionskräfte ein, zumal für die Theorie der darauf gebauten *Ruhmkorff'schen* und anderer ähnlichen *Inductions-Maschinen*, für welche hiedurch eine Grundlage gegeben ist.

18.

Beziehung zur Wärmeleitung.

Die beiden im vorhergehenden Artikel für a_n und b_n gefundenen Gleichungen, nämlich

$$a_n = \frac{1}{2m}\left[\left((\varepsilon + m)\, a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right) e^{-(\varepsilon - m)\, t} - \left((\varepsilon - m)\, a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right) e^{-(\varepsilon + m)\, t}\right]$$
$$b_n = \frac{1}{2m}\left[\left((\varepsilon + m)\, b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right) e^{-(\varepsilon - m)\, t} - \left((\varepsilon - m)\, b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right) e^{-(\varepsilon + m)\, t}\right]$$

gehen für wachsende Werthe von t, wo endlich e^{-2mt} gegen 1 verschwindet, in die einfacheren Gleichungen über:

$$a_n = \frac{1}{2m}\left((\varepsilon + m)\, a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right) e^{-(\varepsilon - m)\, t}$$
$$b_n = \frac{1}{2m}\left((\varepsilon + m)\, b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right) e^{-(\varepsilon - m)\, t},$$

und setzt man diese Werthe von a_n und b_n in die Gleichungen

$$E = \Sigma \left(a_n \sin\frac{ns}{a} + b_n \cos\frac{ns}{a}\right)$$
$$i = -\frac{a}{2}\Sigma\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\sin\frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt}\cos\frac{ns}{a}\right)$$

ein, so ergeben sich folgende Gesetze der Vertheilung der freien Elektricität und der Strömungen im kreisförmigen Leiter:

$$E = \Sigma \frac{1}{2m} \left[\left((\varepsilon + m)\, a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right) \sin \frac{ns}{a} + \left((\varepsilon + m)\, b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right) \cos \frac{ns}{a}\right] e^{-(\varepsilon - m)t}$$

$$i = \frac{a}{4} \Sigma \frac{\varepsilon - m}{mn} \left[\left((\varepsilon + m)\, b^0_n + \frac{db^0_n}{dt}\right) \sin \frac{ns}{a} - \left((\varepsilon + m)\, a^0_n + \frac{da^0_n}{dt}\right) \cos \frac{ns}{a}\right] e^{-(\varepsilon - m)t}.$$

Man erkennt hieraus leicht, dass in denjenigen Fällen, wo $\frac{\varepsilon - m}{nn} = 6$ ein von n unabhängiger Coefficient ist,

$$i = -\frac{aa6}{2} \cdot \frac{dE}{ds}$$

$$\frac{di}{ds} = -\tfrac{1}{2} \frac{dE}{dt}$$

erhalten wird, woraus durch Elimination von i

$$\frac{dE}{dt} = aa6 \frac{d^2E}{ds^2}$$

folgt, eine Gleichung von der nämlichen Form wie die Gleichung für die Wärmeleitung in festen Körpern.

Nun war aber im vorigen Artikel

$$m = \frac{n}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{a^2c^2w'^2}{128n^2M''^2(1+\lambda)^2} - \frac{N''}{M''(1+\lambda)}\right)}$$

gesetzt worden, worin $\frac{ccw'}{16M''(1+\lambda)} = \varepsilon$ war, wonach also

$$m = \varepsilon \sqrt{\left(1 - \frac{128N''M''(1+\lambda)}{a^2c^2w'^2} \cdot nn\right)}.$$

In allen Fällen nun, wo die Werthe von $\frac{nn}{a^2c^2w'^2}$ und von $\frac{\alpha}{a}$ sehr klein sind, kann hiefür gesetzt werden

$$m = \varepsilon \left(1 - \frac{256\left(\log \frac{8a}{\alpha}\right)^2 \cdot (1+\lambda)}{a^2c^2w'^2} \cdot nn\right)$$

woraus $\varepsilon - m = \frac{8}{aaw'} \log \frac{8a}{\alpha} \cdot nn$, folglich

$$6 = \frac{8}{aaw'} \cdot \log \frac{8a}{\alpha}$$

ein von n unabhängiger Coefficient ist.

Es ergeben sich hienach also für die Ladungsänderungen der Elektricität in den eben bezeichneten Fällen ähnliche Gesetze wie für die Wärmeleitung in festen Körpern, was schon von Thomson und Kirchhoff nachgewiesen worden ist. Es verdient jedoch dabei besonders hervorgehoben zu werden, dass, wenn auch der Ausdruck der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die grösseren Wellenzüge, d. i. für kleinere Werthe von n, imaginär wird, und daher für diesen Theil der Bewegung andere Gesetze eintreten, die sich mehr oder weniger den

Gesetzen der Wärmeleitung in festen Körpern nähern, doch ein anderer Theil der Bewegung stets übrig bleibt, welcher kleinere Wellenzüge giebt, für welche grössere Werthe von n gelten, für die der Ausdruck der Fortpflanzungsgeschwindigkeit reell bleibt und also die Art. 13 entwickelten Gesetze Gültigkeit behalten. Es finden also in einem solchen Leiter nach Störung des Gleichgewichts immer *Wellenzüge* statt, die mit bestimmten *Geschwindigkeiten* fortgepflanzt werden, aber es ist keine *reine Wellenbewegung* vorhanden, sondern sie ist mit andern Bewegungen vermischt, welche den der geleiteten Wärme ähnlichen Gesetzen unterworfen sind.

Beachtet man nun alle Verhältnisse, welche aus einer solchen Vermischung von Bewegungen hervorgehen, die ganz verschiedenen Gesetzen unterworfen sind, so leuchtet von selbst ein, dass die von Wheatstone beobachtete *Ungleichzeitigkeit der Funken* an zwei von einander sehr entfernten Unterbrechungsstellen eines solchen langen Leitungsdrahts durchaus keinen Schluss auf eine bestimmte Fortpflanzungsgeschwindigkeit gestattet, dass überhaupt die Wheatstone'sche Beobachtungsmethode, so sinnreich sie auch ist, und so werthvoll die damit erhaltenen Resultate in andern Beziehungen sein würden, wenn sie wirklich genau verbürgt werden könnten, doch unmittelbar zu dem vorliegenden Zwecke gar nicht geeignet ist, wie es überhaupt in keiner Weise gelingen wird, solche Beobachtungsmethoden ausfindig zu machen, mit denen die Gesetze aller Bewegungsänderungen der Elektricität in einem Leiter nach gestörtem Gleichgewichte *rein erfahrungsmässig* begründet werden könnten. Der Zweck der *Beobachtungen* wird daher hier darauf zu beschränken sein, die aus unserer bisherigen Kenntniss von der Elektricität abgeleiteten Gesetze zu *prüfen*. Deshalb war es nöthig, wie es in den vorhergehenden Artikeln versucht worden ist, diese Ableitung der Gesetze den zu ihrer Prüfung auszuführenden Beobachtungen vorauszuschicken, um so mehr, als die so aufgestellten Gesetze selbst *als Leitfaden* beim Suchen der zu ihrer Prüfung anzuwendenden *zweckmässigsten Beobachtungsmethoden* benutzt werden müssen.

19.

Schwingungen der Elektricität in einem kreisförmigen Leiter.

Was nun die *zweckmässigsten Beobachtungsmethoden* zur Prüfung der elektrischen Bewegungsgesetze betrifft, so leuchtet aus den bisher entwickelten Gesetzen zunächst von selbst ein, dass bei der ausserordentlich grossen *Geschwindigkeit*, mit der sich nach diesen Gesetzen die meisten *elektrischen Wellenzüge* in guten Leitern fortpflanzen sollen, und bei der aus denselben Gesetzen sich ergebenden schnellen *Dämpfung* dieser Wellenzüge genaue *Beobachtungen und Messungen zu directer Prüfung dieser Gesetze* auszuführen bei den durch die Sinneswerkzeuge allen Beobachtungen gesetzten Schranken kaum möglich sein dürfte. Eine genaue Ausführung von Messungen nimmt immer eine gewisse Zeit in Anspruch, die bei so flüchtigen Erscheinungen nicht dazu gestattet ist. Beachtet man daher, dass die feinsten Messungen in der Physik diejenigen sind, welche entweder *Gleichgewichtserscheinungen*, oder *beharrliche Bewegungen*, oder *periodisch regelmässig wiederkehrende Erscheinungen*, wie z. B. die Pendelschwingungen sind, betreffen; so liegt es sehr nahe, auch zur Prüfung der Gesetze der Bewegung der Elektricität in Leitern, abgesehen von *constanten Strömen*, eine Prüfungsmethode dieser Gesetze auf Beobachtungen *periodisch regelmässig wiederkehrender Bewegungen der Elektricität in Leitern* zu begründen, vorausgesetzt, dass sich Mittel zu feiner Ausführung solcher Beobachtungen finden lassen.

Periodisch regelmässig wiederkehrende Bewegungen der Elektricität können aber in einem Leiter nicht von selbst, sondern nur unter fortgesetzter Anregung äusserer elektromotorischer Kräfte, bestehen, und es bietet sich zu ihrer Hervorbringung die einfachste und für feinere Beobachtungen und Messungen zweckmässigste Methode in der schnellen Umdrehung eines kleinen Magnets um eine gegen seine magnetische Axe rechtwinkelige Drehungsaxe dar. Um aber einen Leitfaden zu zweckmässigen Einrichtungen für genaue Beobachtungen der so hervorgebrachten periodisch wiederkehrenden Bewegungen oder *Schwingungen* der Elektricität in einem Leiter zu gewinnen, soll zuvor versucht werden, die Gesetze solcher elektrischen Schwingungen in einem kreisförmigen Leiter aus den Art. 10 aufgestellten partiellen Differentialgleichungen zu entwickeln.

20.

Schwingungen durch Induction eines rotirenden Magnets.

Die elektromotorische Kraft, welche durch schnelle Umdrehung eines kleinen Magnets in der Nähe des kreisförmigen Leiters auf irgend einen Punkt des Leiters *s in einem bestimmten Augenblicke* ausgeübt wird, kann, wenn a den Halbmesser bezeichnet, dargestellt werden durch

$$\Sigma'\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right),$$

wo f_n und g_n nur von der Stellenzahl n abhängig sind. Alle diese auf verschiedene Punkte des Leiters s wirkenden Kräfte sind aber bei gleichförmiger Drehung des Magnets einem gleichen periodischen Wechsel unterworfen, und zwar sind sie bei zweckmässiger Anordnung dem Sinus eines mit der Zeit gleichförmig wachsenden Winkels proportional. Alle diese Kräfte können *für einen beliebigen Augenblick*, am Ende der Zeit t, dargestellt werden durch

$$\sin\mu t\,.\,\Sigma'\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right).$$

Hiemit erhält man, wenn man in den beiden partiellen Differentialgleichungen am Schlusse von Art. 10 für f_n und g_n, welche dort beliebige Functionen der Zeit bezeichneten, $f_n \sin\mu t$ und $g_n \sin\mu t$, worin f_n und g_n bestimmte von der Zeit unabhängige Werthe haben, einsetzt, die folgenden beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2a_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi aakM''(1+\lambda)}\cdot\frac{da_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2aaM''(1+\lambda)}\cdot a_n - \frac{ncc}{4aM''(1+\lambda)}\cdot g_n \sin\mu t = 0$$

$$\frac{d^2b_n}{dt^2} + \frac{cc}{8\pi aakM''(1+\lambda)}\cdot\frac{db_n}{dt} + \frac{n^2c^2N''}{2aaM''(1+\lambda)}\cdot b_n + \frac{ncc}{4aM''(1+\lambda)}\cdot f_n \sin\mu t = 0\,.$$

Nun sieht man leicht, dass wenn

$$a_n = p\sin(\mu t + \varrho)$$
$$b_n = q\sin(\mu t + \varrho)$$

gesetzt wird, p, q, ϱ sich so bestimmen lassen, dass die damit erhaltenen Werthe von a_n und b_n den beiden partiellen Differentialgleichungen genügen. Setzt man nämlich die obigen Werthe von a_n und b_n und die daraus abgeleiteten Werthe

$$\frac{da_n}{dt} = p\mu \cos(\mu t + \varrho)$$

$$\frac{db_n}{dt} = q\mu \cos(\mu t + \varrho)$$

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} = -\, p\mu\mu \sin(\mu t + \varrho)$$

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2} = -\, q\mu\mu \sin(\mu t + \varrho)$$

in die angeführten Gleichungen ein, so erhält man, wenn man Kürze halber $\frac{1}{\pi aak} = w'$, und entweder, nach dem Ohm'schen Gesetze, $\lambda = 0$ setzt, oder M'' für $M''(1+\lambda)$ schreibt,

$$-\, p\mu\mu \sin(\mu t+\varrho) + \frac{p\mu ccw'}{8M''}\cos(\mu t+\varrho) + \frac{pn^2c^2N''}{2aaM''}\,.\,\sin(\mu t+\varrho) - \frac{ccn}{4aM''}\,.\,g_n \sin\mu t = 0$$

$$-\, q\mu\mu \sin(\mu t+\varrho) + \frac{q\mu ccw'}{8M''}\cos(\mu t+\varrho) + \frac{qn^2c^2N''}{2aaM''}\,.\,\sin(\mu t+\varrho) + \frac{ccn}{4aM''}\,.\,f_n \sin\mu t = 0$$

Entwickelt man hierin Sinus und Cosinus der Summe nach Sinus und Cosinus der Theile, so erhält man

$$\left(\frac{\mu ccw'}{8M''}\,.\,p\sin\varrho + \left(\mu\mu - \frac{n^2c^2N''}{2aaM''}\right).\,p\cos\varrho + \frac{ccn}{4aM''}\,.\,g_n\right)\sin\mu t$$
$$+ \left(\left(\mu\mu - \frac{n^2c^2N''}{2aaM''}\right).\,p\sin\varrho - \frac{\mu ccw'}{8M''}\,.\,p\cos\varrho\right)\cos\mu t = 0$$

$$\left(\frac{\mu ccw'}{8M''}\,.\,q\sin\varrho + \left(\mu\mu - \frac{n^2c^2N''}{2aaM''}\right).\,q\cos\varrho - \frac{ccn}{4aM''}\,.\,f_n\right)\sin\mu t$$
$$+ \left(\left(\mu\mu - \frac{n^2c^2N''}{2aaM''}\right).\,q\sin\varrho - \frac{\mu ccw'}{8M''}\,.\,q\cos\varrho\right)\cos\mu t = 0\,.$$

Sollen nun diese beiden Gleichungen für jeden Werth von t gelten, so erhält man für $\cos\mu t = 0$ die beiden Gleichungen

$$\frac{\mu ccw'}{8M''}\,.\,p\sin\varrho + \left(\mu\mu - \frac{n^2c^2N''}{2aaM''}\right).\,p\cos\varrho + \frac{ccn}{4aM''}\,.\,g_n = 0$$

$$\frac{\mu ccw'}{8M''}\,.\,q\sin\varrho + \left(\mu\mu - \frac{n^2c^2N''}{2aaM''}\right).\,q\cos\varrho - \frac{ccn}{4aM''}\,.\,f_n = 0$$

und für $\sin\mu t = 0$ noch die dritte Gleichung, nämlich

$$\left(\mu\mu - \frac{n^2c^2N''}{2aaM''}\right)\sin\varrho - \frac{\mu ccw'}{8M''}\,.\,\cos\varrho = 0\,,$$

aus denen p, q, ϱ so bestimmt werden, dass den beiden partiellen Differentialgleichungen durch die darnach bestimmten Werthe von a_n und b_n genügt wird. Man erhält nämlich

$$\varrho = \text{arc tang}\,\frac{\mu a^2c^2w'}{4(2\mu^2a^2M'' - n^2c^2N'')}$$

$$p = -\frac{accn}{2(2\mu^2a^2M''-n^2c^2N'')}\cdot g_n\cos\varrho = -\frac{2accn}{\sqrt{(16(2\mu^2a^2M''-n^2c^2N'')^2+\mu^2a^4c^4w'^2)}}\cdot g_n$$

$$q = +\frac{accn}{2(2\mu^2a^2M''-n^2c^2N'')}\cdot f_n\cos\varrho = +\frac{2accn}{\sqrt{(16(2\mu^2a^2M''-n^2c^2N'')^2+\mu^2a^4c^4w'^2)}}\cdot f_n\,.$$

Fügt man zu den hiedurch bestimmten particularen Werthen von a_n und b_n, welche den partiellen Differentialgleichungen Genüge leisten, noch die Art. 13 für a_n und b_n, für den Fall wo $f_n = 0$ und $g_n = 0$ war, gefundenen Werthe hinzu, so geben die beiden Summen die vollständigen Integralwerthe von a_n und b_n, nämlich

$$a_n = p \sin(\mu t + \varrho) + Ae^{-\varepsilon t} . \sin\left(mt + \text{arc} \sin \frac{a^0{}_n}{A}\right)$$

$$b_n = q \sin(\mu t + \varrho) + Be^{-\varepsilon t} . \sin\left(mt + \text{arc} \sin \frac{b^0{}_n}{B}\right)$$

worin A und B sowie ε und m die Art. 13 angegebene Bedeutung haben. Wenn m einen imaginären Werth hat, treten für die hinzugefügten Glieder die Art. 17 entwickelten Werthe von a_n und b_n ein. Es leuchtet aber ein, dass für wachsende Werthe von t die hinzugefügten Glieder abnehmen, und dass sie, wie Art. 17 gezeigt worden, schon nach Verlauf eines sehr kleinen Bruchtheils einer Secunde als verschwindend betrachtet werden können, von wo an also die Bewegung der Elektricität im kreisförmigen Leiter eine gleichförmige periodisch wiederkehrende wird, deren Hervorbringung der Zweck der beschriebenen Methode mit dem rotirenden Magnete war.

Setzt man diese Werthe von a_n und b_n, mit Weglassung der mit der Zeit verschwindenden Glieder in die Gleichungen

$$E = \Sigma\left(a_n \sin \frac{ns}{a} + b_n \cos \frac{ns}{a}\right)$$

$$i = -\frac{a}{2} \Sigma \frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt} \sin \frac{ns}{a} - \frac{da_n}{dt} \cos \frac{ns}{a}\right)$$

ein, so ergeben sich für die regelmässig fortdauernde elektrische Schwingung folgende Gesetze der Vertheilung der freien Elektricität und der Strömungen im kreisförmigen Leiter:

$$E = \Sigma \sin(\mu t + \varrho)\left(p \sin \frac{ns}{a} + q \cos \frac{ns}{a}\right)$$

$$i = -\frac{a\mu}{2} \Sigma \frac{1}{n} \cos(\mu t + \varrho)\left(q \sin \frac{ns}{a} - p \cos \frac{ns}{a}\right)$$

worin p, q, ϱ die oben angeführten Werthe haben. Nun ergiebt sich aber aus jenen Werthen

$$p = -\frac{2n}{\mu a w'} \sin \varrho \,.\, g_n$$

$$q = +\frac{2n}{\mu a w'} \sin \varrho \,.\, f_n \,.$$

Werden diese Werthe von p und q in beiden Gleichungen substituirt, so wird

$$E = \frac{2}{\mu a w'} \Sigma n \sin \varrho \sin (\mu t + \varrho) \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a}\right)$$

$$i = -\frac{1}{w'} \Sigma \sin \varrho \cos (\mu t + \varrho) \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right)$$

oder, wenn $\sin (\mu t + \varrho)$ und $\cos (\mu t + \varrho)$ entwickelt werden,

$$E = \frac{2}{\mu a w'} \sin \mu t \,.\, \Sigma n \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a}\right)$$
$$+ \frac{2}{\mu a w'} \cos \mu t \,.\, \Sigma n \sin \varrho^2 \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a}\right)$$

$$i = \frac{1}{w'} \sin \mu t \,.\, \Sigma' \sin \varrho^2 \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right)$$
$$- \frac{1}{w'} \cos \mu t \,.\, \Sigma' \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right).$$

Wenn man hierin endlich

$$\frac{\Sigma' \sin \varrho^2 \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right)}{\Sigma' \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right)} = \operatorname{tang} \gamma$$

$$\frac{\Sigma n \sin \varrho^2 \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a}\right)}{\Sigma n \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a}\right)} = \operatorname{tang} \gamma'$$

$$\left(\Sigma' \sin \varrho^2 \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right)\right)^2 + \left(\Sigma' \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right)\right)^2 = k$$

$$\left(\Sigma n \sin \varrho^2 \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a}\right)\right)^2 + \left(\Sigma n \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \cos \frac{ns}{a} - g_n \sin \frac{ns}{a}\right)\right)^2 = k'$$

setzt, so erhält man

$$E = \frac{2}{\mu a w'} \,.\, k' \sin (\mu t + \gamma')$$

$$i = -\frac{1}{w'} \,.\, k \cos (\mu t + \gamma) \,.$$

Setzt man aber

$$\Sigma' \sin \varrho^2 \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right) = f$$

$$\Sigma' \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right) = g$$

$$\frac{df}{ds} = f' \quad , \qquad \frac{dg}{ds} = g'$$

so erhält man

$$E = \frac{2}{\mu w'} \sqrt{(f'f' + g'g')} \,.\, \sin \left(\mu t + \operatorname{arc\,tg} \frac{f'}{g'}\right)$$

$$i = -\frac{1}{w'} \sqrt{(ff + gg)} \,.\, \cos \left(\mu t + \operatorname{arc\,tg} \frac{f}{g}\right)$$

woraus die Gleichung $\frac{di}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{dE}{dt}$ leicht abgeleitet werden kann.

21.

Gleichheit der Phasen und Amplituden elektrischer Schwingungen in kreisförmigen Leitern.

Beachtet man, dass die von dem rotirenden Magnet auf den *ganzen* Leitungsdraht ausgeübte elektromotorische Kraft durch

$$\sin \mu t \,.\int ds \,.\, \Sigma \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right)$$

dargestellt wird, und dass, wenn diese ganze Kraft nicht $= 0$ sein soll, g_0 einen bestimmten endlichen Werth haben müsse; so lässt sich der gefundene Werth von i übersichtlicher darstellen, wenn man in den angegebenen Werthen von tang γ und kk die ersten Glieder der als Summen dargestellten Reihen, nämlich die Glieder welche der Stellenzahl $n = 0$ entsprechen, auf folgende Weise absondert, indem man mit ϱ_0 den Werth von ϱ für $n = 0$ bezeichnet:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{g_0 \sin \varrho_0^2 + \sum_1^\infty \sin \varrho^2 \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right)}{g_0 \sin \varrho_0 \cos \varrho_0 + \sum_1^\infty \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right)}$$

$$\begin{aligned} kk = g_0 g_0 \sin \varrho_0^2 &+ 2 g_0 \sin \varrho_0 \cos \varrho_0 \,.\, \sum_1^\infty \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right) \\ &+ 2 g_0 \sin \varrho_0^2 \,.\, \sum_1^\infty \sin \varrho^2 \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right) \\ &+ \left(\sum_1^\infty \sin \varrho \cos \varrho \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right)\right)^2 \\ &+ \left(\sum_1^\infty \sin \varrho^2 \left(f_n \sin \frac{ns}{a} + g_n \cos \frac{ns}{a}\right)\right)^2 . \end{aligned}$$

Da nun hierin

$$\sin \varrho = \frac{\mu a^2 c^2 w'}{\sqrt{(16\,(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')^2 + \mu^2 a^4 c^4 w'^2)}}$$

$$\cos \varrho = \frac{4\,(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')}{\sqrt{(16\,(2\mu^2 a^2 M'' - n^2 c^2 N'')^2 + \mu^2 a^4 c^4 w'^2)}}$$

war, so ergeben sich die Werthe von $\sin \varrho_0$ und $\cos \varrho_0$, wenn der Werth von M'' für $n = 0$ mit M_0'' bezeichnet wird,

$$\sin \varrho_0 = \frac{ccw'}{\sqrt{(64\mu^2 M_0'' M_0'' + c^4 w'^2)}}\,, \qquad \cos \varrho_0 = \frac{8\mu M_0''}{\sqrt{(64\mu^2 M_0'' M_0'' + c^4 w'^2)}}\,.$$

Bedenkt man ausserdem, dass auch für sehr lange und dünne Leiter und für die grössten darstellbaren Rotationsgeschwindigkeiten des kleinen Magnets die Quotienten $\frac{\mu aaw'}{N''}$ und $\frac{\mu a}{c}$ sehr kleine Brüche sind, so leuchtet ein, dass mit hinreichender Näherung für alle Werthe von $n > 0$

$$\sin\varrho = \frac{\mu a a w'}{4n^2 N''}\,, \qquad \cos\varrho = 1$$

gesetzt werden kann. Hieraus leuchtet ein, dass, da schon $\frac{\mu a a w'}{N''}$ ein sehr kleiner Bruch ist, $\sin\varrho = \frac{\mu a a w'}{4n^2 N''}$ um so mehr als verschwindend betrachtet werden darf, je grösser die Stellenzahl n ist. Es wird daher meist auch für sehr lange und dünne Leiter und bei sehr grossen Rotationsgeschwindigkeiten des kleinen Magnets näherungsweise

$$\gamma = \varrho_0 \quad \text{und} \quad k = g_0 \sin\varrho_0$$

angenommen werden können, wonach

$$i = -\frac{g_0}{w'}\sin\varrho_0\cos(\mu t + \varrho_0)$$

gefunden wird.

Da $\frac{g_0}{w'}$ und ϱ_0 von s unabhängige constante Werthe haben, so geht daraus hervor, dass die elektrischen Schwingungen in allen Theilen eines kreisförmigen Leiters gleichzeitig gleiche *Phase* und gleiche *Amplitude* haben, auch wenn die von dem rotirenden Magnet ausgeübten elektromotorischen Kräfte auf die verschiedenen Theile des Leiters sehr ungleich vertheilt sind.

Aus dieser Gleichheit der Schwingungsphasen und Schwingungsamplituden in allen Theilen des kreisförmigen Leiters geht hervor, dass die Stromintensität in irgend einem Punkte stets der mittleren Stromintensität im ganzen Leiter gleich ist. Das Gesetz für die Mittelwerthe der Stromintensitäten in geschlossenen Leitern in ihrer Abhängigkeit von den Mittelwerthen der elektromotorischen Kräfte ist aber schon Art. 9 entwickelt worden, wo sich ergab, wenn der Mittelwerth der von Aussen herrührenden elektromotorischen Kräfte mit $\frac{1}{2\pi a}\,.\,S$ bezeichnet und

$$\frac{8}{cc}\int M_0'' ds + \frac{4\pi a}{r\mathfrak{C}} = p\,, \quad \frac{2\pi a}{\pi a a k} = w = 2\pi a w'$$

gesetzt wird, dass

$$i = \frac{1}{p}\, e^{-\frac{wt}{p}}\,.\int e^{\frac{wt}{p}}\,.\, S dt$$

ist. Wendet man nun dieses Gesetz auf unsern Fall an, wo in einem Leiter elektrische Schwingungen von einem rotirenden Magnet hervorgebracht werden, und wo der Mittelwerth der vom rotirenden Magnet auf den Leiter ausgeübten elektromotorischen Kräfte

$$\frac{1}{2\pi a}\,.\, S = g_0 \sin\mu t$$

war, so erhält man

$$i = \frac{2\pi a g_0}{p} e^{-\frac{pt}{w}} \cdot \int e^{\frac{pt}{w}} . \sin \mu t . dt = \frac{2\pi a g_0}{p} \cdot \frac{\frac{w}{p}\sin \mu t - \mu \cos \mu t}{\frac{ww}{pp} + \mu\mu}$$

$$= - \frac{2\pi a g_0}{\mu p \sqrt{\left(\left(\frac{w}{\mu p}\right)^2 + 1\right)}} . \cos\left(\mu t + \text{arc tg}\,\frac{w}{\mu p}\right) .$$

Da nun $p = \frac{8}{cc}\int M_0'' ds + \frac{4\pi a}{r\mathfrak{E}} = \frac{8}{cc}\int M_0''(1+\lambda)\, ds$, und $w = 2\pi a w'$ ist, so erhält man, wenn auch hier wie Art. 20 zur Vereinfachung M_0'' statt $M_0''(1+\lambda)$ geschrieben wird,

$$\frac{w}{\mu p} = \frac{\pi a c c w'}{4\mu \int M_0'' ds} = \text{tg}\, \varrho_0 , \qquad \frac{w}{\mu p \sqrt{\left(\left(\frac{w}{\mu p}\right)^2 + 1\right)}} = \frac{2\pi a w'}{\mu p \sqrt{\left(\left(\frac{w}{\mu p}\right)^2 + 1\right)}} = \sin \varrho_0 ,$$

folglich übereinstimmend mit dem oben für *kreisförmige* Leiter gefundenen Resultate,

$$i = - \frac{g_0 \sin \varrho_0}{w'} . \cos(\mu t + \varrho_0) .$$

Da nun aber das obige Gesetz, für die Mittelwerthe der Stromintensitäten in geschlossenen Leitern in ihrer Abhängigkeit von den Mittelwerthen der elektromotorischen Kräfte, Art. 9 nicht bloss auf *kreisförmige* Leiter beschränkt, sondern unabhängig von der Betrachtung der Gestalt des geschlossenen Leiters gefunden worden war, so ergiebt sich daraus, dass das daraus für den Fall, wo die von einem rotirenden Magnet herrührenden elektromotorischen Kräfte gegeben sind, abgeleitete Gesetz ebenfalls für geschlossene Leiter von beliebiger Gestalt gilt.

Das angeführte Resultat, dass *Phasen* und *Amplituden* elektrischer Schwingungen in kreisförmigen Leitern überall gleich seien, beruht auf der Voraussetzung, dass die Quotienten $\frac{\mu a a w'}{N''}$ und $\frac{\mu a}{c}$ sehr kleine Brüche sind. Da nun diese Quotienten mit der Länge und Feinheit des Leiters und mit der Rotationsgeschwindigkeit des kleinen Magnets wachsen, so ist es von Interesse die Werthe derselben für einige Beispiele von langen und feinen Leitern bei grossen Rotationsgeschwindigkeiten des kleinen Magnets wirklich zu berechnen. Werden dazu die drei schon Art. 16 als Beispiele gebrauchten Leitungsdrähte gewählt, so ergeben sich die in folgender Tafel berechneten Werthe.

	1. Draht	2. Draht	3. Draht
a	1000	1000000	1000000
w'	$\frac{1}{120697 \,.\, 10^{12}}$	$\frac{1}{120697 \,.\, 10^{12}}$	$\frac{1}{12070 \,.\, 10^{12}}$
N'' (für $n = 1$)	15,119	28,935	31,237
$100 \frac{aaw'}{N''}$	$\frac{1}{18248 \,.\, 10^{6}}$	$\frac{1}{34989}$	$\frac{1}{3770}$
$100 \frac{a}{c}$	$\frac{1}{4394500}$	$\frac{1}{4394}$	$\frac{1}{4394}$

Die beiden letzten Reihen dieser Tafel enthalten die Werthe der beiden Quotienten für die drei zum Beispiel genommenen Drähte, wenn $\mu = 100$, d. i. bei 15,965 Umdrehungen des Magnets in 1 Secunde. Man sieht, dass in allen diesen Fällen die Werthe dieser beiden Quotienten sehr kleine Brüche sind, indessen erkennt man daraus auch, da diese Werthe bei 159,65 Umdrehungen in 1 Secunde 10 Mal grösser, bei 1596,5 Umdrehungen in 1 Secunde 100 Mal grösser sein würden, dass doch wirklich Fälle vorkommen können, wo jene Quotienten Brüche von erheblicher Grösse werden, und wo also das Gesetz der Gleichheit der *Phasen* und *Amplituden* in allen Theilen des kreisförmigen Leiters nicht mehr gelten würde.

22.

Vertheilung der freien Elektricität während der elektrischen Schwingung in einem kreisförmigen Leiter.

Das Gesetz der Vertheilung der freien Elektricität während der elektrischen Schwingung in einem kreisförmigen Leiter ist in dem Art. 20 gefundenen Ausdruck für die Dichtigkeit E enthalten, nämlich

$$E = \frac{2}{\mu a w'} \,.\, k' \sin(\mu t + \gamma')$$

worin der Coefficient k' durch die Gleichung

$$k'k' = \left(\Sigma n \sin\varrho^2 \left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)\right)^2 + \left(\Sigma n \sin\varrho \cos\varrho \left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)\right)^2$$

bestimmt war.

Man sieht hieraus, dass auch die Stärke der Ladung mit freier Elektricität in jedem Punkte des kreisförmigen Leiters proportional dem Sinus

eines mit t proportional wachsenden Bogens wechselt, dass aber das Ladungsmaximum $= \frac{2k'}{\mu a w'}$, welches für den Sinus $= 1$ statt findet, in verschiedenen Punkten des Leiters verschieden ist, und zwar dass näherungsweise in denjenigen Punkten die Aenderung von Element zu Element am grössten ist, wo die von dem rotirenden Magnet ausgeübte elektromotorische Kraft von ihrem Mittelwerthe am meisten abweicht; wo diese elektromotorische Kraft ihrem Mittelwerthe gleich ist, ist näherungsweise auch die Ladung gleich, und zwar $= 0$. Es würde also in dem ganzen kreisförmigen Leiter nirgends freie Elektricität vorhanden sein, wenn der rotirende Magnet auf alle Punkte desselben gleich wirkte, wobei vorausgesetzt ist, dass der kreisförmige Leiter, unabhängig vom rotirenden Magnet, keine Ladung von freier Elektricität besitze.

Da nämlich nach dem vorhergehenden Artikel $\sin\varrho$ und $\cos\varrho$ für $n = 0$ endliche Werthe behalten, so leuchtet ein, dass für obigen Werth von $k'k'$ geschrieben werden kann

$$k'k' = \left(\sum_1^\infty n \sin\varrho^2 \left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)\right)^2 + \left(\sum_1^\infty n \sin\varrho\cos\varrho \left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)\right)^2.$$

Ferner kann, unter den im vorigen Artikel angeführten Voraussetzungen,

$$\sin\varrho = \frac{\mu a a w'}{4n^2 N''}, \quad \cos\varrho = 1$$

gesetzt, und, wenn $\sin\varrho$ einen sehr kleinen Werth hat, der erste Theil von $k'k'$, welcher unter dem Summenzeichen den Faktor $\sin\varrho^2$ enthält, gegen den zweiten vernachlässigt werden, wonach also

$$k' = \frac{\mu a a w'}{4} \sum_1^\infty \frac{1}{nN''} \left(f_n \cos\frac{ns}{a} - g_n \sin\frac{ns}{a}\right)$$

erhalten wird. Hieraus ergiebt sich nun

$$\frac{dk'}{ds} = -\frac{\mu a w'}{4} \sum_1^\infty \frac{1}{N''} \left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right).$$

Ist endlich $\log\frac{8a}{\alpha}$ eine sehr grosse Zahl und convergirt ferner die Reihe $\Sigma'\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right)$ so rasch, dass alle Glieder der Reihe für $n > \nu$ vernachlässigt werden können, während $2\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{2\nu - 1}\right) + \frac{\nu^2\alpha}{8a}$ gegen $\log\frac{8a}{\alpha}$ verschwindet, so darf $N'' = 2\log\frac{8a}{\alpha}$ und

$$\frac{dk'}{ds} = -\frac{\mu a w'}{8\log\frac{8a}{\alpha}} \left(\sum_0^\nu \left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right) - g_0\right)$$

gesetzt werden.

Nun ist aber der Faktor

$$\sum_{0}^{\nu}\left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right) - g_0$$

die Differenz der im Punkte s von dem rotirenden Magnet ausgeübten elektromotorischen Kraft von ihrem Mittelwerthe in der ganzen Länge des Leiters; also ist $\frac{dk'}{ds}$, oder die Aenderung von k' im Verhältniss zur Aenderung von s, jener Differenz proportional.

Von der Stärke dieser Ladungen hängt, wie man leicht sieht, das Ueberspringen elektrischer Funken und der Grad der nothwendigen *Isolirung* des Leiters ab, wenn solches Ueberspringen vermieden werden soll, ein Gegenstand, der einer ausführlicheren Erörterung bedarf, aber erst dann, wenn es sich um Leiter handelt, die nicht bloss einen einfachen Kreis, sondern ein System sehr nahe aneinander liegender Spiralwindungen bilden, ein Fall, der von der Betrachtung hier ausgeschlossen worden ist.

23.

Leitfaden für die Beobachtungen.

Es bleibt noch übrig, die Resultate der vorhergehenden Entwickelung als Leitfaden zu den *Beobachtungen* zu benutzen, durch welche jene Resultate an der Erfahrung geprüft werden sollen. Eines solchen Leitfadens bedarf es besonders, wenn keine Analogien mit andern Bewegungserscheinungen vorliegen, welche dazu benutzt werden können, und es geht aus dem Vorhergehenden hervor, dass solche Analogien in vielen Beziehungen hier fehlen.

Es kommt nämlich bei mangelnden Analogien mit andern schon bekannten und erforschten Bewegungserscheinungen vor Allem auf Bestimmung von *Beobachtungsobjecten* an, die besonders wichtig und *genauerer Bestimmung durch Beobachtungen* fähig sind. Ferner kommt es auf die nähere Kenntniss der *Verhältnisse* an, unter welchen über diese Beobachtungsobjecte die genauesten Bestimmungen zu erlangen sind. Es leuchtet nun ein, dass die genauere Erörterung dieser *Verhältnisse* am zweckmässigsten mit der Erörterung der *Hülfsmittel* zu ihrer wirklichen Darstellung und mit der *Ausführung der Beobachtungen* selbst verbunden wird, was zusammen den Gegenstand des folgenden Abschnitts dieser Abhandlung bilden wird. Am Schlusse dieses Abschnitts sollen

daher nur kurz diejenigen *Beobachtungsobjecte* bezeichnet werden, die nach der vorhergehenden Entwickelung als besonders *wichtig und einer genaueren Bestimmung durch Beobachtungen fähig* erscheinen.

Die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit*, die bei andern Bewegungserscheinungen von so grosser Wichtigkeit ist, scheint nach dem, was schon Art. 18 darüber bemerkt worden, hier nicht dazu gerechnet werden zu können, es bieten sich dafür aber verschiedene andere Gegenstände der Beobachtung dar.

Es sind hauptsächlich *drei* Gegenstände, welche sich nach den entwickelten Gesetzen als besonders zur Prüfung der aufgestellten Gesetze geeignete Beobachtungsgegenstände herausstellen, nämlich *erstens* die Vergleichung der Schwingungsphasen und der Schwingungsamplituden der Elektricität an verschiedenen Stellen eines langen geschlossenen Leiters, auf welchen ein rotirender Magnet inducirend wirkt; *zweitens* das Gesetz der Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets; *drittens* endlich bietet sich noch ein wichtiger Gegenstand für Beobachtungen in der *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude* der durch einen rotirenden Magnet in einem geschlossenen Leitungsdraht hervorgebrachten elektrischen Schwingungen von der diesem Leitungsdrahte gegebenen *Gestalt* dar.

Die *Gleichheit der Schwingungsphase und der Schwingungsamplitude*, welche nach den entwickelten Gesetzen auch in sehr langer geschlossener Kette und bei grosser Rotationsgeschwindigkeit in allen Theilen statt finden soll, ist ein Gegenstand, der zur Prüfung an der Erfahrung sich um so mehr eignet, je unerwarteter dieses Resultat erscheint. Denn ohne genauere Entwickelung der Verhältnisse würde wohl bei einer sehr langen Kette, wo alle Bewegungen von einer Stelle ausgehen und bei ihrer Verbreitung einer sehr starken Dämpfung oder Absorption unterworfen sind, erwartet werden, dass auch bei fortgesetzter Erregung von Schwingungen alle Bewegungen immer nur sehr geschwächt zu den entferntesten Theilen der Kette gelangten. Da ferner die Verbreitung von der Erregungsstelle nach beiden Seiten geschieht, dürfte man erwarten, dass bei dem Wechsel positiver und negativer Schwingungen durch das Zusammentreffen von entgegengesetzten Seiten an einigen Stellen *Verstärkung* an anderen *Aufhebung* statt finden werde, wie bei Interferenzerscheinungen. Endlich, wenn auch in Folge solcher Begegnung Schwingungen, die in allen Theilen der Kette vollkommen

synchron sind, *möglich* wären, so dürfte man doch erwarten, dass dieser *mögliche* Fall an besondre Bedingungen z. B. an bestimmte Rotationsgeschwindigkeiten geknüpft wäre, nicht aber, dass in allen Theilen der Kette solche synchronische Schwingungen stets, *bei jeder Rotationsgeschwindigkeit*, sich bildeten. Das angeführte Resultat ist daher nach allen Analogien, welche die Verbreitung von Bewegung in anderen bekannten Fällen bietet, höchst unerwartet, und eignet sich daher besonders zur Prüfung der Resultate der auf unsere bisherige Kenntniss von der Elektricität gebaueten Theorie an der Erfahrung.

Die *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit* des Magnets eignet sich ferner von einer andern Seite dazu, nämlich von Seiten der *quantitativen Prüfung* des entwickelten Gesetzes, durch Beobachtungen und Messungen, die nach wachsender Rotationsgeschwindigkeit in Reihen geordnet werden.

Endlich, wenn es auch noch gelänge, über die *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Gestalt der Kette* feinere Bestimmungen durch genaue Beobachtungen und Messungen zu gewinnen, so würde dadurch nicht bloss eine neue Prüfung der entwickelten Gesetze, sondern auch eine wesentliche Ergänzung unserer bisherigen Kenntniss von der Elektricität selbst, aus der diese Gesetze abgeleitet worden, erlangt werden. Nach unserer bisherigen Kenntniss muss zwar der Elektricität als einem Körper eine *Masse* zugeschrieben werden, und diese Masse übt auf eine andere ähnliche Masse eine *Kraft* aus; es fehlt aber noch an der Kenntniss des *Verhältnisses* jener Masse zu dieser Kraft. Die Kenntniss dieses *Verhältnisses* war nun auch nicht nöthig, so lange es sich um *Gleichgewichtserscheinungen* oder um *beharrliche Bewegungen* handelte, wo die Kenntniss der *Kräfte* genügte; die verschiedenen Elektricitätsmengen konnten dabei, statt nach ihren Massen, nach der Grösse der *Kräfte* unterschieden werden, die sie auf eine und dieselbe Elektricitätsmenge in der Einheit der Entfernung ausübten, und diese letztere Elektricitätsmenge konnte durch die *Kraft* bestimmt werden, die sie auf eine *gleiche* Elektricitätsmenge in der Einheit der Entfernung ausübte. Eine so bestimmte Elektricitätsmenge war nun wirklich die sogenannte *elektrostatische Maasseinheit*. Handelt es sich aber nicht um blosses *Gleichgewicht* oder um blosse *Erhaltung einer schon vorhandenen Bewegung*, sondern soll einer Elektricitätsmenge *neue Bewegung* ertheilt werden, welche sie vorher nicht besass, so reicht die blosse Kenntniss der Kräfte

nicht aus, sondern es bedarf auch der Kenntniss der *Masse* der in Bewegung zu setzenden Elektricität, oder des *Verhältnisses* dieser Masse zu der von ihr auf die elektrostatische Maasseinheit in der Einheit der Entfernung ausgeübten Kraft, d. i. der Kenntniss der *Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten, welche auf die Masseneinheit* (Milligramm) *Elektricität gehen*. Diese Zahl ist oben mit r bezeichnet worden und die *Masse* jeder in *elektrostatischen Maasseinheiten* bestimmten Elektricitätsmenge $\mathfrak{E}$ wird damit $= \frac{1}{r}\mathfrak{E}$ gefunden. Es leuchtet ein, dass wenn nun auf diese *Masse* irgend eine *Kraft* f wirkt, der *Quotient* dieser Kraft durch die Masse $\frac{1}{r}\mathfrak{E}$, auf welche sie wirkt, die *Geschwindigkeit* der von der Kraft der Masse in der Zeiteinheit ertheilten Bewegung $= \frac{fr}{\mathfrak{E}}$ giebt.

Unsere Kenntniss vorhandener Elektricitätsmengen nach *elektrostatischen Maasseinheiten* ist nun aber in der That durch die Beobachtungen auf die in den Körpern vertheilten *freien* Elektricitätsmengen beschränkt und erstreckt sich nicht auf die im *neutralen* Fluidum enthaltenen Elektricitätsmengen. Ebenso ist unsere Kenntniss der Kräfte f auf solche beschränkt, welche auf *freie* Elektricitätsmengen wirken; während von denjenigen Kräften, welche auf das *neutrale* Fluidum wirken, durch die Beobachtungen nur die Kenntniss des mit dem Namen *elektromotorischer Kraft* bezeichneten Coefficienten f' erlangt wird, welcher mit der unbekannten *Zahl der im neutralen Fluidum enthaltenen elektrostatischen Maasseinheiten* $\mathfrak{E}$ multiplicirt werden muss, um f zu erhalten, also $f = f' . \mathfrak{E}$. Dagegen brauchen wir auch in der ganzen Elektrodynamik nicht die *Geschwindigkeit* selbst, sondern nur die *Stromdichtigkeit* und deren Aenderungen zu erforschen, d. i. das Product der in der strömenden Elektricität enthaltenen *Zahl elektrostatischer Maasseinheiten* $\mathfrak{E}$ in jene *Geschwindigkeit* $\frac{rf}{\mathfrak{E}}$, d. i. $rf = f' . r\mathfrak{E}$, wo die *elektromotorische Kraft* f' aber schon bekannt, also bloss das Product $r\mathfrak{E}$ zu bestimmen ist.

Ist hienach, in Uebereinstimmung mit der vorhergegangenen Entwickelung zur Bestimmung der *Stromdichtigkeiten*, und deren Aenderungen, nicht die Kenntniss der Zahl der elektrostatischen Maasseinheiten r, welche auf die Masseneinheit (Milligramme) gehen, selbst nöthig, sondern bloss die Kenntniss des Products $r\mathfrak{E}$, so leuchtet ein, dass umgekehrt *aus Beobachtungen der Stromdichtigkeiten*, und deren Aenderungen, auch nur die Kenntniss dieses Products $r\mathfrak{E}$ erworben werden kann; es leuchtet aber zugleich auch die Wichtigkeit von der Kenntniss dieses

Products $r\mathfrak{C}$ ein, deren Erwerbung, nach dem durch die entwickelten Gesetze gegebenen Leitfaden, durch feine und genaue Beobachtungen über die *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Gestalt der Kette* zu versuchen, sich als das Zweckmässigste herausstellt.

Hiezu ist aber die genaueste Kenntniss der *Verhältnisse*, unter welchen über diese Abhängigkeit sichere Bestimmungen zu erlangen sind, nothwendig, deren Erörterung, wie schon bemerkt, im folgenden Abschnitte dieser Abhandlung mit der Erörterung der Mittel zur wirklichen Darstellung verbunden werden soll.

II.

SCHWINGUNGSBEOBACHTUNGEN.

24.

Methode der Beobachtung.

Nach dem im vorigen Abschnitte für die Beobachtungen gegebenen Leitfaden sollen hauptsächlich die *Amplituden-* und *Phasendifferenzen elektrischer Schwingungen* in geschlossenen Leitern beobachtet und gemessen werden. Zu diesen Beobachtungen und Messungen lassen sich nun aber keine *Galvanometer*, wie zur Beobachtung und Messung der *Intensitäten beharrlicher Ströme* gebrauchen. Denn ist im Multiplicator eines Galvanometers eine *elektrische Schwingung*, statt eines beharrlichen Stromes, vorhanden, so kann die Galvanometernadel nicht in Ruhe und Gleichgewicht bleiben, sondern muss gleichfalls Schwingungen machen, die desto kleiner werden, je kleiner der Bruchtheil ist, welchen die elektrische Schwingungsdauer von der Schwingungsdauer der Magnetometernadel bildet; würden nun aber diese Schwingungen verschwindend klein, so würde sich die Galvanometernadel ganz ebenso verhalten, wie wenn gar keine elektrische Schwingung im Multiplicator vorhanden wäre, sie würde ohne irgend eine Ablenkung in derselben Gleichgewichtslage verharren, so dass aus der Beobachtung des Galvanometers über das Vorhandensein einer elektrischen Schwingung im Multiplicator gar nichts bestimmt werden könnte. Die Beobachtung *elektrischer Schwingungen*, und namentlich die Messung ihrer *Amplituden-* und *Phasendifferenzen*, fordert daher, dass der geschlossene Leiter, in welchem die

Schwingungen statt finden, nicht bloss einen *Multiplicator*, wie zu einem *Galvanometer*, sondern auch ein als Drehwage aufgehangenes *Solenoid* bildet, welches zusammen mit dem *Multiplicator* ein *Elektrodynamometer* darstellt, dessen Construction schon in der ersten Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen (Abh. bei Begründung der K. S. Ges. d. Wiss. Leipzig 1846) beschrieben, und dessen Gebrauch zur Beobachtung *elektrischer Schwingungen* daselbst im Allgemeinen erörtert und an einem Beispiele erläutert worden ist.

Es soll nun hier im Besondern die Methode, aus Dynamometerbeobachtungen *Amplituden-* und *Phasendifferenzen elektrischer Schwingungen* in geschlossenen Leitern zu bestimmen, näher betrachtet werden, wobei zur Vereinfachung der Betrachtung vorausgesetzt werden möge, dass der vom Leiter, in welchem die Elektricität schwingt, gebildete *Multiplicator*, gleich dem Multiplicator einer Tangentenboussole, einen verticalen Ring von grösserem Halbmesser bilde, in dessen Mittelpunkte das in einem möglichst kleinen Raume concentrirte, von demselben Leiter gebildete, *Solenoid*, welches an die Stelle der drehbaren *Nadel* im Galvanometer tritt, aufgehangen sei.

Zwischen dieser *Nadel* und jenem vom Leiter, in welchem die elektrische Schwingung statt findet, gebildeten *Solenoide* findet nun aber der wesentliche Unterschied statt, dass die *Nadel* ein *constantes magnetisches Moment* besitzt, auf welches der beharrliche Strom im Multiplicator wirkt, während das *Solenoid* ein *galvanisches Moment* besitzt, was zwar nach dem Ampère'schen Gesetze, bei gleicher Grösse, dem magnetischen Nadelmomente ganz *äquivalent* sein würde, das aber bei einer *elektrischen Schwingung* im Solenoide nicht constant, sondern mit der Phase der elektrischen Schwingung *variabel* ist. Auf dieses *variabele galvanische Moment* des Solenoids wirkt nun ferner vom Multiplicator aus kein beharrlicher Strom, sondern die im Multiplicator vorhandene *elektrische Schwingung*, deren Einwirkung auf das Solenoid ebenfalls mit der Schwingungsphase *variabel* ist.

Bezeichnet man mit a und n den mittleren Halbmesser und die Zahl der Umwindungen des *Multiplicators*, und ebenso mit a' und n' die des *Solenoids*, ferner mit i und i' die Strömungsintensitäten im Multiplicator und Solenoide, nach dem in der Galvanometrie gebrauchten *absoluten magnetischen Maasse* ausgedrückt, wonach $\frac{c}{\sqrt{8}}\,idt$ und $\frac{c}{\sqrt{8}}\,i'dt$ die Menge positiver Elektricität ist, welche während des Zeitelements dt durch den

Querschnitt des Leiters geht; so sind $n\pi aai$ und $n'\pi a'a'i'$ die *galvanischen Momente* des Multiplicators und Solenoids. Das doppelte Product dieser beiden galvanischen Momente dividirt durch den Cubus des Abstands des im Mittelpunkte concentrirten Solenoids vom Multiplicatorringe a giebt die vom Multiplicator auf das Solenoid ausgeübte *Directionskraft*, welche mit dem Sinus des Winkels, den die Solenoidaxe mit der Multiplicatoraxe bildet, multiplicirt, oder, was dasselbe ist, mit dem Cosinus des Ablenkungswinkels φ multiplicirt, den die Solenoidaxe mit der Ringebene des Multiplicators bildet, das vom Multiplicator auf das Solenoid ausgeübte *Drehungsmoment* darstellt, nämlich

$$= 2\,\frac{n\pi aai\,.\,n'\pi a'a'i'}{a^3}\,.\cos\varphi\,.$$

Bei der vollkommenen Analogie, die hierin zwischen der Theorie des *Elektrodynamometers* mit der des *Galvanometers* statt findet, bedarf es keiner weiteren Erörterung hierüber, sondern wir können sogleich, bei Betrachtung des Gebrauchs des Instruments, auf den Fall übergehen, wenn in dem Leitungsdrahte, zu dem auch der Multiplicator und das Solenoid gehören, *elektrische Schwingungen* vorhanden sind, wo also die *Strömungsintensitäten* i und i' mit dem Sinus eines mit der Zeit t proportional wachsenden Winkels wechseln.

Bezeichnen in diesem Falle i und i' die grössten Strömungsintensitäten, welche den grössten Sinuswerthen entsprechen, so können die Strömungsintensitäten für irgend einen Augenblick am Ende der Zeit t durch $i\sin(\mu t+\gamma)$ und $i'\sin(\mu t+\gamma')$ dargestellt werden. Die Entfernung eines schwingenden Theilchens im Multiplicator oder Solenoid von seiner Gleichgewichtslage während dieser Schwingung wird hienach für denselben Augenblick, wenn $\mathfrak{E}$ die Menge positiver Elektricität, welche in der Längeneinheit des Leiters enthalten ist, bezeichnet, durch $\frac{i}{\mu\mathfrak{E}}\cos(\mu t+\gamma)$ und $\frac{i'}{\mu\mathfrak{E}}\cos(\mu t+\gamma')$ dargestellt, worin $\frac{i}{\mu\mathfrak{E}}$ und $\frac{i'}{\mu\mathfrak{E}}$ die *Schwingungsamplitude* ist, um deren Bestimmung es sich handelt. — Doch wie man bei Strömen auf Kenntniss der Stromgeschwindigkeit selbst verzichtet und sich mit dem Product derselben in den unbekannten Faktor $\mathfrak{E}$ begnügt, ebenso begnügt man sich hier mit der Bestimmung des Products dieser Schwingungsamplitude in denselben Faktor $\mathfrak{E}$, weil die Beobachtungen uns nur gestatten, dieses Product in *absoluten Maassen* auszudrücken.

Mit diesen neuen Bezeichnungen der Strömungsintensitäten, für diesen Fall, erhält man nun das vom Multiplicator auf das Solenoid ausgeübte Drehungsmoment

$$= 2\,\frac{n\pi aai\,.\,n'\pi a'a'i'}{a^3}\sin(\mu t + \gamma)\sin(\mu t + \gamma')\,.\,\cos\varphi$$

worin i und i' von der Zeit t unabhängige constante Werthe haben.

Es leuchtet ein, dass das bewegliche Solenoid, unter der Einwirkung dieses Drehungsmoments, dessen Grösse sich mit der Zeit t fortwährend ändert, gar nicht zur Ruhe gelangen kann; es fragt sich daher, welche *Beobachtungen* lassen sich bei dieser fortwährenden Bewegung des Solenoids machen, und was lässt sich aus diesen Beobachtungen bestimmen. Zur Beantwortung dieser Frage müssen die *Bewegungsgesetze des unter Einwirkung eines solchen veränderlichen Drehungsmoments stehenden Solenoids entwickelt werden.*

Zur Vereinfachung dieser Entwickelung kann man sich zunächst an den Fall halten, wo die *Strömungsintensitäten im Multiplicator und im Solenoide immer gleich* sind, wo also

$$i = i' \text{ und } \gamma = \gamma' = 0$$

gesetzt werden kann. Für diesen Fall ergiebt sich das variabele Drehungsmoment, welches auf das Solenoid wirkt,

$$= 2\,\frac{\pi\pi nn'a'a'}{a}\,.\,i^2(\sin\mu t)^2\cos\varphi\,,$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$= \frac{\pi\pi nn'a'a'}{a}\,.\,i^2(1 - \cos 2\mu t)\cos\varphi\,.$$

Aus der Construction des *Elektrodynamometers* ist aber bekannt, dass das Solenoid *bifilar* aufgehangen ist, woraus sich bei der gegebenen Länge nebst Abstande der beiden Aufhängungsdrähte und bei dem von ihnen getragenen Solenoidgewichte eine *statische Directionskraft* für das Solenoid ergiebt, die leicht bestimmt werden kann, und mit S bezeichnet werden soll. Ist nun diese bifilare Suspension des Solenoids *in normaler Weise* so regulirt, dass das aus der *statischen Directionskraft* resultirende Drehungsmoment $= 0$ ist, wenn die Solenoidaxe der Ringebene des Multiplicators parallel, oder wenn der *Ablenkungswinkel* $\varphi = 0$ ist, so ergiebt sich für jeden beliebigen Werth von φ das auf das Solenoid wirkende *statische Drehungsmoment*

$$= -S\sin\varphi\,.$$

Fügt man dieses *statische* Drehungsmoment obigem *elektrodynamischen* hinzu, so giebt die Summe beider auf das Solenoid wirkenden Drehungsmomente, dividirt durch das Trägheitsmoment des Solenoids K, die Drehungsbeschleunigung des Solenoids $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ im Augenblicke am Ende der Zeit t, woraus die *Bewegungsgleichung des Solenoids* folgt, nämlich

$$\frac{\pi\pi nn'a'a'}{a} \cdot i^2 (1 - \cos 2\mu t) \cos\varphi - S \sin\varphi = K \frac{d^2\varphi}{dt^2} .$$

Setzt man hierin

$$\varphi = v + \alpha ,$$

indem man für v den durch folgende Gleichung bestimmten *constanten* Werth annimmt:

$$\operatorname{tang} v = \frac{\pi\pi nn'a'a'}{aS} \cdot i^2 ,$$

folglich $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$; so erhält man

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{S}{K}(1 + (1 - \cos 2\mu t) \operatorname{tang} v^2) \cos v \sin\alpha + \cos 2\mu t . \sin v \cos\alpha) = 0 .$$

Unter der Voraussetzung, dass v und α kleine Werthe haben (welche in der Regel zulässig ist, weil das mit Spiegel versehene Solenoid ebenso wie eine Magnetometernadel beobachtet werden soll, wobei die Ablenkung des Solenoids stets innerhalb enger durch die Skalenlänge gegebener Grenzen bleiben muss), kann geschrieben werden

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{S}{K}(\alpha \sec v + \cos 2\mu t . \sin v) = 0 ,$$

woraus durch Integration erhalten wird:

$$\alpha = \frac{\sin v}{4\mu\mu \frac{K}{S} - \sec v} . \cos 2\mu t + A \sin (t - B) \sqrt{\frac{S \sec v}{K}} ,$$

wo A und B die beiden Integrationsconstanten sind. Bezeichnet man nun mit τ und θ die Schwingungsdauer des Solenoids, welche der statischen Directionskraft S und dem Trägheitsmomente K entspricht, und die Schwingungsdauer der Elektricität im Leitungsdrahte, so ist

$$\frac{K}{S} = \frac{\tau\tau}{\pi\pi} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{\pi}{\theta} ;$$

folglich ist

$$\alpha = \frac{\sin v}{4\frac{\tau\tau}{\theta\theta} - \sec v} . \cos \frac{2\pi}{\theta} t + A \sin \frac{\pi}{\tau}(t - B) \sqrt{\sec v} ,$$

oder, für den angenommenen kleinen Werth von v, und $A = 0$ gesetzt (das heisst abgesehen von derjenigen Schwingung, welche das Solenoid

machen würde, wenn es bloss unter der Einwirkung der statischen Directionskraft S und der elektrodynamischen $\frac{nn'\pi^2 a'^2 i^2}{a}$ stände, da diese Schwingung durch bekannte Beruhigungsmittel bei den Beobachtungen leicht zu dämpfen ist),

$$\alpha = \frac{\theta\theta}{4\tau\tau - \theta\theta} \cdot v \cos\frac{2\pi}{\theta} t \ .$$

Als Beispiel diene der Fall, der in den folgenden Beobachtungen vorkommen wird, wo in Secunden ausgedrückt

$$\tau = 15 \ , \qquad \theta = \frac{1}{520}$$

war, und wo sich also

$$\alpha = \frac{1}{243 \cdot 10^6} \cdot v \cos\frac{2\pi}{\theta} t$$

ergiebt, das heisst, wo α gegen v ganz verschwindet. Dasselbe findet bei allen Beobachtungen, welche hier betrachtet werden sollen, statt.

Wenn α verschwindet kann nun die *constante Ablenkung des Solenoids* v mit grösster Genauigkeit unmittelbar beobachtet werden, und man findet daraus

$$i = \frac{1}{\pi a}\sqrt{\frac{aS \operatorname{tang} v}{nn'}} \ ,$$

wodurch, wenn aus Zählung der Umdrehungen des rotirenden Magnets die Schwingungsdauer θ bekannt ist, die elektrische Schwingung im geschlossenen Leiter vollständig bestimmt wird, nämlich

$$i \sin\frac{\pi}{\theta} t = \frac{\sin\frac{\pi}{\theta} t}{\pi a'} \cdot \sqrt{\frac{aS \operatorname{tang} v}{nn'}} \ .$$

Wäre im geschlossenen Leiter, statt der elektrischen Schwingung, ein *constanter Strom* von der Intensität $i\sqrt{\frac{1}{2}}$ vorhanden, so würde das vom Multiplicator auf das Solenoid ausgeübte Drehungsmoment

$$= \frac{\pi\pi nn'a'a'}{a} i^2 \cos\varphi$$

sein, und dieses Drehungsmoment mit dem statischen Drehungsmoment $-S\sin\varphi$ zusammen müsste beim Gleichgewichte $= 0$ sein, woraus die *Ablenkung des Solenoids φ beim Gleichgewichte*

$$\varphi = v$$

folgen würde. Hienach lässt sich das Resultat obiger Betrachtung so aussprechen: *Wenn die Schwingungsdauer der Elektricität im geschlossenen Leiter ein sehr kleiner Bruchtheil von der statischen Schwingungsdauer des Solenoids ist, verhält sich das Solenoid gerade so, wie wenn im Leiter ein*

constanter Strom vorhanden wäre, dessen Intensität zum Intensitäts-Maximum i der bei der elektrischen Schwingung statt findenden Strömungen sich verhält wie $1 : \sqrt{2}$.

Es findet alsdann eine Ablenkung des Solenoids statt, die sich ebenso beobachten lässt, wie wenn ein *constanter Strom* im geschlossenen Leiter vorhanden wäre, und wird aus dieser beobachteten Ablenkung (nach demselben Gesetz wie bei Galvanometern) die Intensität des *constanten Stroms* berechnet, von welcher sie hervorgebracht werden würde, so braucht diese Intensität nur mit $\sqrt{2}$ multiplicirt zu werden, um das *Intensitäts-Maximum* i der bei der elektrischen Schwingung statt findenden Strömungen, oder mit $\frac{c}{2\mu\mathfrak{C}}$ multiplicirt zu werden, um die *Amplitude* der elektrischen Schwingung im geschlossenen Leiter zu erhalten, wobei jedoch, wie schon bemerkt, $\mathfrak{C}$ als unbekannter Coefficient unbestimmt gelassen werden muss und nur $\frac{ci}{2\mu}$ nach *absoluten Maassen* ausgedrückt werden kann. Es ist hiedurch die Aufgabe gelöst, *die durch einen mit bekannter Geschwindigkeit rotirenden Magnet in einem geschlossenen Leiter hervorgebrachte elektrische Schwingung mit dem Elektrodynamometer zu beobachten und zu bestimmen.*

Die Lösung dieser Aufgabe ist jedoch hiebei auf den Fall beschränkt geblieben, wo Multiplicator und Solenoid benachbarten Theilen des geschlossenen Leiters angehören, in welchen kein merklicher Unterschied der Schwingungsamplitude und der Schwingungsphase der Elektricität statt findet. Gehörten nun aber Multiplicator und Solenoid zwei Theilen des geschlossenen Leiters an, in welchen die Schwingungsdauer der Elektricität zwar dieselbe wäre, aber die Strömungsmaxima i, i' sowohl wie die Schwingungsphasen λ, λ' unterschieden werden müssten; so lässt sich der Anfangspunkt der Zeit t doch immer so wählen, dass das arithmetische Mittel beider Schwingungsphasen $\frac{\lambda+\lambda'}{2} = 0$ ist. Es lassen sich dann die mit der elektrischen Schwingung verbundenen Strömungsintensitäten in diesen beiden Theilen des geschlossenen Leiters durch

$$i \sin\frac{\pi}{\theta}(t+\lambda) \quad \text{und} \quad i' \sin\frac{\pi}{\theta}(t-\lambda)$$

darstellen.

Man beobachtet alsdann *erstens* die Ablenkung des Solenoids v, wenn Multiplicator und Solenoid beide dem ersten Theile des geschlos-

senen Leiters angehören. Aus dieser Beobachtung lässt sich nach den gefundenen Regeln das Intensitäts-Maximum i der Strömungen bei der elektrischen Schwingung in diesem Theile bestimmen, nämlich

$$i = \frac{1}{\pi a'} \sqrt{\frac{aS \tang v}{nn'}} \, .$$

Zweitens beobachtet man die Ablenkung des Solenoids v', wenn Multiplicator und Solenoid beide dem andern Theile des geschlossenen Leiters angehören, und findet das Intensitäts-Maximum i' der Strömungen bei der in diesem Theile vorhandenen elektrischen Schwingung

$$i' = \frac{1}{\pi a'} \sqrt{\frac{aS \tang v'}{nn'}} \, .$$

Drittens endlich beobachtet man die Ablenkung des Solenoids v'', wenn der Multiplicator dem ersteren, das Solenoid dem letzteren Theile des geschlossenen Leiters angehört. Aus dieser dritten Beobachtung lässt sich dann auch noch der *Unterschied der Schwingungsphasen* 2λ in den beiden Theilen des geschlossenen Leiters bestimmen. Es ist nämlich alsdann die *Bewegungsgleichung des Solenoids* nach den vorausgegangenen Angaben folgende:

$$2\frac{\pi\pi nn'a'a'}{a} \, . \, ii' \sin(\mu t + \lambda) \sin(\mu t - \lambda) \, . \cos\varphi - S \sin\varphi = K \frac{d^2\varphi}{dt^2} \, ,$$

wofür, da $\sin(\mu t + \lambda) \sin(\mu t - \lambda) = \sin \mu t^2 - \sin \lambda^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\mu t - 2 \sin \lambda^2)$ ist, geschrieben werden kann:

$$\frac{\pi\pi nn'a'a'}{a} \, . \, ii' \, (1 - \cos 2\mu t - 2 \sin \lambda^2) \cos\varphi - S \sin\varphi = K \frac{d^2\varphi}{dt^2} \, .$$

Man setze hierin

$$\varphi = u + \alpha \, ,$$

worin

$$\tang u = \frac{\pi\pi nn'a'a'}{aS} \, . \, ii'$$

genommen wird. Da hienach $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ ist, so erhält man

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{S}{K}\Big((1 + (1 - \cos 2\mu t - 2 \sin \lambda^2) \operatorname{tg} u^2) \cos u \sin\alpha + (\cos 2\mu t + 2 \sin \lambda^2) \sin u \cos\alpha\Big) = 0 \, .$$

Unter der Voraussetzung, dass u und α kleine Werthe haben, wird

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{S}{K}\Big((1 - 2 \sin \lambda^2 \sin u^2) \frac{\alpha}{\cos u} + (\cos 2\mu t + 2 \sin \lambda^2) \sin u\Big) = 0$$

oder, wenn $\beta = (1 - 2 \sin \lambda^2 \sin u^2)\, \alpha$, $S' = (1 - 2 \sin \lambda^2 \sin u^2)\, S$,

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{S'}{K}(\sec u \, . \, \beta + (\cos 2\mu t + 2 \sin \lambda^2) \sin u) = 0 \, .$$

Hieraus wird durch Integration

$$6 = \frac{\sin u}{4\mu\mu\frac{K}{S'} - \sec u} \, . \cos 2\mu t - \sin 2u \;\; \sin \lambda^2 + A \sin(t-B)\sqrt{\frac{S' \sec u}{K}}$$

$$\alpha = \frac{S \sin u}{4\mu\mu K - S' \sec u} \, . \cos 2\mu t - \frac{\sin 2u \, . \, \sin \lambda^2}{1 - 2 \sin u^2 \sin \lambda^2} + A' \sin(t-B)\sqrt{\frac{S' \sec u}{K}}$$

erhalten. Verschwindet nun bei schnellen Schwingungen der Elektricität und nach Beruhigung des Solenoids, ebenso wie in dem vorhergehenden Falle, der erste und letzte Theil von α, so erhält man den mit v'' bezeichneten constanten Werth der Ablenkung φ, nämlich

$$v'' = u - \frac{\sin 2u \, . \, \sin \lambda^2}{1 - 2 \sin u^2 \sin \lambda^2}$$

woraus

$$\sin \lambda = \frac{u - v''}{2 \sin u \, (\cos u + (u - v'') \sin u)}$$

sich ergiebt. Hienach wird also, da u aus den durch die vorhergehenden Beobachtungen bestimmten Werthen von i und i' mittelst der Gleichung $\tan u = \frac{\pi\pi nn'a'\alpha'}{a} \, . \, ii'$ schon bekannt ist, *die Aufgabe gelöst, aus der beobachteten Ablenkung v'' den mit 2λ bezeichneten Phasenunterschied der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen der geschlossenen Kette zu bestimmen.*

25.

Die Commutatoren.

Die Ausführung der angeführten Beobachtungen nach der im vorhergehenden Artikel beschriebenen Methode würde, um den Zweck einer genauen Vergleichung der *Schwingungsamplituden* und *Schwingungsphasen* an zwei Stellen eines geschlossenen Leiters zu erfüllen, bei geringen Verschiedenheiten derselben eine sehr grosse Feinheit und Genauigkeit verlangen, wie kaum zu erreichen sein würde, wenn sie *einzeln und unabhängig von einander* ausgeführt werden müssten. Die Erreichung dieses Zweckes kann aber dadurch ausserordentlich erleichtert werden, dass diese Beobachtungen *paarweise* mit einander verbunden, an demselben geschlossenen Leiter, bei derselben Rotation des Magnets, *gleichzeitig* gemacht werden. Es sind dazu *zwei möglichst gleichförmig construirte Elektrodynamometer* erforderlich, deren Multiplicatoren und Solenoide Theile derselben geschlossenen Kette bilden. Die wesentlichste Bedin-

gung, welche bei zwei solchen derselben Kette angehörigen *Elektrodynamometern* erfüllt werden muss, wenn ein System genau correspondirender Beobachtungen mit ihnen ausgeführt werden soll, besteht darin, dass die *Schwingungsdauer* der bifilar aufgehangenen Solenoide der beiden Elektrodynamometer genau übereinstimme, was sich am leichtesten erreichen lässt, wenn in der Construction der Elektrodynamometer das Mittel gegeben ist, den Abstand der Aufhängungsdrähte bei dem einen oder bei beiden Solenoiden beliebig zu reguliren, wodurch die Schwingungsdauer des einen Solenoids mit der des andern in genaue Uebereinstimmung gebracht werden kann. Befinden sich dann vor Beginn einer Beobachtungsreihe beide Solenoide *in vollkommner Ruhe*, so lässt sich eine längere Beobachtungsreihe in solcher Weise ausführen, dass alle *beobachteten Elongationen* der *beiden* durch elektrische Schwingungen in der Kette in Bewegung gesetzten Solenoide paarweise genau für *gleiche Zeiten* gelten.

Weit weniger als in der Schwingungsdauer kommt die vollkommene Uebereinstimmung beider Elektrodynamometer in andern Beziehungen in Betracht. Denn man sieht leicht ein, dass, wenn beide Elektrodynamometer in der geschlossenen Kette dicht hinter einander gestellt werden, so dass beide einem Theile der Kette angehören, in welchem keine merklichen Unterschiede der Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen statt finden, durch gleichzeitige correspondirende Beobachtungen an beiden Instrumenten, die sich bei gleicher Schwingungsdauer der Solenoide längere Zeit fortsetzen lassen, eine sehr genaue Vergleichung beider Instrumente gewonnen werden kann, wonach alle mit dem einen Instrumente gemachten Beobachtungen genau so reducirt werden können, dass sie dieselben Resultate geben, die man bei vollkommener Gleichheit dieses Instruments mit dem andern erhalten haben würde.

Diess vorausgesetzt, können die beiden genau mit einander verglichenen Elektrodynamometer an zwei verschiedenen weit von einander entfernten Stellen eines und desselben geschlossenen Leiters eingeschaltet werden, und es kann dann bei einer elektrischen Schwingung im Leiter durch gleichzeitige Beobachtungen beider Instrumente eine viel feinere Vergleichung der *Schwingungsamplituden* an beiden Stellen der Kette gewonnen werden, als es möglich sein würde, wenn ein und dasselbe Elektrodynamometer an den beiden Stellen zu verschiedenen

Zeiten eingeschaltet und beobachtet werden sollte, wobei vorausgesetzt werden müsste, dass die Rotation des Magnets zu beiden Zeiten vollkommen gleich wäre, eine Voraussetzung der wirklich nie ganz genügt werden kann, und die durch jene gleichzeitig gemachten correspondirenden Beobachtungen ganz erspart wird.

Die beiden Elektrodynamometer können ferner auch dazu dienen, dass, nach genauer Vergleichung derselben unter einander, das *Solenoid* des einen Elektrodynamometers in einen andern entfernten Theil des geschlossenen Leiters versetzt wird, während der *Multiplicator* desselben Instruments an seiner früheren Stelle bleibt, und es können alsdann gleichzeitige correspondirende Beobachtungen mit diesem und mit dem andern, unverrückt an seiner Stelle gebliebenen, Elektrodynamometer gemacht werden, aus denen sich dann mit grösster Feinheit jeder noch so geringe *Phasenunterschied* der elektrischen Schwingung an den beiden von einander weit entfernten Stellen des geschlossenen Leiters erkennen lässt, ohne dass es nöthig ist, eine vollkommen gleiche Rotation des Magnets zu zwei verschiedenen Zeiten vorauszusetzen.

Endlich ist es nun für die Genauigkeit und Sicherheit der aus diesen Beobachtungen abzuleitenden Resultate von grosser Wichtigkeit, dass die verschiedenen Beobachtungsreihen, nämlich *erstens* die zur Vergleichung der beiden Instrumente und *zweitens* die zur Vergleichung der Schwingungsamplituden oder Schwingungsphasen an zwei verschiedenen Stellen des geschlossenen Leiters, während möglichst gleichförmig fortgesetzter Drehung des Magnets unmittelbar nach einander abwechselnd ausgeführt und wiederholt werden, wozu erforderlich ist, dass ohne Störung der Beobachtungen die Versetzung entweder eines ganzen Elektrodynamometers oder des einen Bestandtheils, z. B. des Solenoids, zwischen zwei Beobachtungen *momentan* ausgeführt werden könne, was sich mit Hülfe zweckmässig eingerichteter *Commutatoren* leicht erreichen lässt.

Diese *Commutatoren*, wie sie zu den folgenden Versuchen gebraucht wurden, bestehen in einer Anzahl von Doppelzellen, d. i. paarweise leitend verbundener Zellen, zu denen die Enden der verschiedenen mit einander zu verbindenden Theile des Leitungsdrahts geführt sind. Diese Doppelzellen können dann unter einander wieder paarweise verbunden werden, und zwar auf zwei verschiedene Weisen mit einander combinirt, indem nämlich bei jeder Doppelzelle die vordere Zelle von der hin-

teren unterschieden wird. Die eine Art paarweiser Verbindung der Doppelzellen unter einander kann nämlich durch ein festes System von Verbindungsdrähten geschehen, die gleichzeitig in alle Vorderzellen eingetaucht werden; die andere Art paarweiser Verbindung der Doppelzellen unter einander kann durch ein anderes festes System von Verbindungsdrähten geschehen, die gleichzeitig in alle Hinterzellen eingetaucht werden. Und diese beiden verschiedenen Systeme von Verbindungsdrähten können sich wie zwei Arme eines Hebels verhalten, so dass wenn das eine System eintaucht, das andere heraustaucht, und umgekehrt. Es leuchtet leicht ein, dass durch einen solchen Commutator mit 6 *Doppelzellen* ein Theil des Leitungsdrahts aus seiner bisherigen Verbindung mit zwei andern Theilen des Leitungsdrahts herausgenommen, die beiden letzteren Theile dabei unter sich verbunden, und endlich zwei bisher verbundene Theile des Leitungsdrahts getrennt und zwischen ihnen jener herausgenommene Theil eingesetzt werden kann. Dies Alles geschieht durch einen momentan auszuführenden *Wechsel*, nämlich durch Drehung eines Hebels, wodurch das eine System von Verbindungsdrähten in die Vorderzellen getaucht wird, während das andere System aus den Hinterzellen herausgezogen wird, oder umgekehrt. — Ausserdem werden Commutatoren *mit 4 Doppelzellen* gebraucht, zwar nicht während der Beobachtungen, aber vorher. Vor Beginn der Beobachtungen sollen nämlich die Solenoide der beiden Elektrodynamometer beruhigt werden, wozu *erstens* ein Strom nöthig ist, welcher durch den Multiplicator und durch das Solenoid des zu beruhigenden Dynamometers geht, *zweitens* ein Commutator mit 4 Doppelzellen, von denen zwei mit den Enden des Multiplicatordrahts, die beiden andern mit den Enden des Solenoiddrahts verbunden sind. Durch diesen Commutator kann der Multiplicator mit dem Solenoid nach Belieben bald *parallel* bald *kreuzweis* verbunden werden. Bei der einen Verbindungsweise übt der Strom im Multiplicator auf das von demselben Strome durchströmte Solenoid ein *positives*, bei der andern ein *negatives* Drehungsmoment aus, und das Solenoid wird beruhigt, wenn die erstere Verbindungsweise während der *Rückschwingung*, die letztere während der *Hinschwingung* hergestellt wird. Da diese Wirkung eines im Multiplicator und Solenoid gleichzeitig vorhandenen Stroms ganz unabhängig von der *Richtung* des Stroms ist, so kann dazu, statt eines beharrlichen Stroms, *die vom rotirenden Magnet in der Kette inducirte wechselnde Strömung* gebraucht werden, wodurch es möglich

wird, diese Beruhigung der Dynamometer, nachdem die Rotation des Magnets begonnen, *den Beobachtungen unmittelbar vorausgehen zu lassen.*

Sollen nun aber alle diese Operationen, nämlich die Beruhigung der beiden Dynamometer und sodann alle zur Vergleichung der Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen an zwei verschiedenen Stellen der Kette erforderlichen Beobachtungen, während fortgesetzter Drehung des Magnets, nach einander ohne Unterbrechung ausgeführt werden, so sind dazu im Ganzen 5 Commutatoren erforderlich, mit denen die verschiedenen Theile der Kette auf eine näher zu erörternde Weise planmässig verbunden werden müssen.

Zur leichteren Uebersicht sollen *erstens* die 5 Commutatoren, *zweitens* die verschiedenen Theile der Kette, welche mit den Commutatoren zu verbinden sind, genau bezeichnet und unterschieden werden. Fig. 1 wird sodann zur Uebersicht der ganzen Anordnung und aller Verbindungen im Einzelnen dienen.

Der *erste* mit A bezeichnete Commutator ist erforderlich, entweder um das eine *Elektrodynamometer* (Multiplicator und Solenoid zusammen genommen) abwechselnd an zwei verschiedene Stellen des Leitungsdrahts zu versetzen, oder um das *Solenoid* dieses Elektrodynamometers abwechselnd an zwei verschiedene Stellen des Leitungsdrahts zu versetzen, während der zugehörige Multiplicator an seiner Stelle bleibt. Es ist dazu ein Commutator mit 6 Doppelzellen nöthig, von denen zwei für die beiden Enden des zu versetzenden Elektrodynamometers oder Solenoids, zwei für die beiden Enden des Leitungsdrahts an der einen Einschaltungsstelle, und endlich zwei für die beiden Enden des Leitungsdrahts an der andern Einschaltungsstelle nöthig sind.

Der *zweite* mit B bezeichnete Commutator ist erforderlich als *Hülfscommutator*, durch dessen Einstellung bestimmt wird, ob *Multiplicator sammt Solenoid* oder ob das *Solenoid* des einen Elektrodynamometers allein durch Wechsel des Commutators A abwechselnd an zwei verschiedene Stellen des Leitungsdrahts versetzt werde, wozu ebenfalls ein Commutator mit 6 Doppelzellen nöthig ist.

Der *dritte* und *vierte* Commutator, nämlich C und C', werden beide zur Beruhigung der Solenoide vor Beginn der Beobachtungen gebraucht. Es sind dazu Commutatoren mit 4 Doppelzellen nöthig, von denen zwei für die beiden Enden des Solenoiddrahts und zwei für die des zugehörigen Multiplicators nebst dem übrigen Leitungsdraht, von welchem

jedoch der zum andern Elektrodynamometer gehörige Theil auszuschliessen ist, damit während der Beruhigung des einen Solenoids die Ruhe des andern nicht gestört werde.

Der *fünfte* mit *D* bezeichnete Commutator ist endlich erforderlich, um die Verbindung der Dynamometer mit den Commutatoren *C* und *C'* bald für die Beruhigung des einen Solenoids bald für die des andern einzurichten. Es ist dazu ein Commutator mit 4 Doppelzellen nöthig, von denen zwei für die beiden Enden des Leitungsdrahts an der Einschaltungsstelle des Commutators, die beiden andern für zwei Verbindungsdrähte, durch welche der Strom zum Leitungsdraht mit Umgehung des einen oder andern Elektrodynamometers geführt werden kann.

Beim *geschlossenen Leitungsdrahte* sind folgende Theile zu unterscheiden, welche durch die Commutatoren auf verschiedene Weise verbunden werden können.

Der *erste* mit *a* bezeichnete Draht ist der *Multiplicatordraht des ersten Dynamometers,* dessen Enden zu zwei Doppelzellen des Commutators *C* führen, nebst *zwei kurzen Verbindungsdrähten* der beiden andern Doppelzellen dieses Commutators mit zwei Doppelzellen des Commutators *B*. Diese verschiedenen Bestandtheile des Drahts *a*, die während der Beobachtungen immer auf gleiche Weise verbunden bleiben, sollen durch Ziffern, $a^{\prime}$, $a^{\prime\prime}$, $a^{\prime\prime\prime}$ unterschieden werden.

Der *zweite* mit *b* bezeichnete Draht ist der *Solenoiddraht des ersten Dynamometers*, dessen Enden mit einer Doppelzelle des Commutators *B* und mit einer Doppelzelle des Commutators *A* verbunden sind.

Der *dritte* und *vierte* mit *c* und *d* bezeichnete Draht sind zwei *kurze Verbindungsdrähte* zweier Doppelzellen des Commutators *B* mit zwei Doppelzellen des Commutators *A*, deren Widerstand als verschwindend klein betrachtet werden darf.

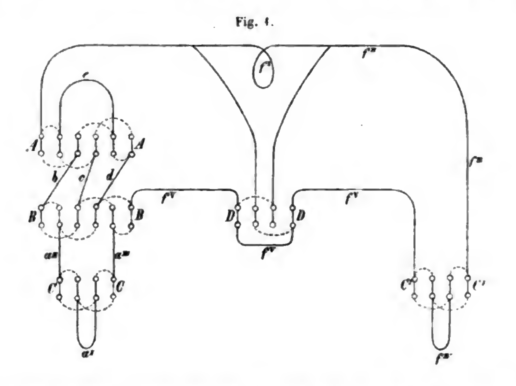
Der *fünfte* mit *e* bezeichnete Draht ist *eins von den beiden sehr langen Drahtstücken*, welche bei den Beobachtungen gebraucht werden, um entweder die beiden Dynamometer von einander zu entfernen oder um das Solenoid des ersten Dynamometers von seinem Multiplicator zu entfernen, indem von beiden Verbindungen zwischen den beiden Drahtenden des einen Dynamometers mit denen des andern, oder zwischen den beiden Drahtenden des Multiplicators und den beiden Drahtenden des Solenoids, jede durch ein solches langes Drahtstück vermittelt

wird. Die beiden Enden des langen Drahtstücks e sind mit zwei Doppelzellen des Commutators A verbunden.

Der *sechste* mit f bezeichnete Draht ist die ganze übrige Leitungskette, und besteht aus dem *Inductorringe* des rotirenden Magnets, ferner aus dem *zweiten der beiden eben erwähnten langen Drahtstücke*, sodann aus dem *Drahte des zweiten Dynamometers*, des Solenoids sowohl als des Multiplicators, und endlich aus *einem zum ersten Drahte zurückführenden Verbindungsdraht*. Diese verschiedenen Bestandtheile des Drahts f, die während der Beobachtungen immer auf gleiche Weise verbunden bleiben, sollen durch Ziffern, f^{I}, f^{II}, f^{III}, f^{IV}, f^{V}, unterschieden werden. Zwischen dem Solenoiddraht f^{III} und dem Multiplicatordraht f^{IV} des zweiten Dynamometers ist der Commutator C' eingeschaltet, der aber während der Beobachtungen nicht gebraucht wird. Ebenso ist im Verbindungsdrahte f^{V} eine Einschaltungsstelle für den Commutator D, die aber geschlossen bleibt, weil auch dieser Commutator während der Beobachtungen nicht gebraucht wird.

Hienach ist nun zu besserer Veranschaulichung Fig. 1 gezeichnet worden, wo die einzelnen Doppelzellen der Commutatoren A, B, C, C', D

Fig. 1.



durch das Zeichen ⚲ bezeichnet und die eine von den beiden Verbindungsweisen durch punktirte Bögen auf der obern Seite, die andere durch punktirte Bögen auf der unteren Seite angedeutet sind.

Zur Versetzung *des ersten Dynamometers*, welches aus dem Multiplicator a^1 und dem Solenoid b besteht, von der einen Einschaltungsstelle zur andern während der Beobachtungen, werden die Commutatoren C, C', welche die *obere* Einstellung behalten, und D, welcher durch einen seine erste und letzte Zelle verbindenden Draht, nach der Beruhigung der Solenoide, ganz von der Kette ausgeschlossen wird, nicht gebraucht, sondern die Versetzung wird, nachdem durch den Commutator B die durch punktirte Bögen auf der *oberen* Seite angedeuteten Verbindungen hergestellt sind, bloss durch Wechsel der Einstellung des Commutators A bewerkstelligt. Denn bei der durch punktirte Bögen auf der *oberen* Seite angedeuteten Einstellung des Commutators A wird bei der angegebenen Einstellung des Commutators B eine geschlossene Kette gebildet, wo die bezeichneten Drähte in folgender Ordnung auf einander folgen:

abefdca ;

bei der durch punktirte Bögen auf der *unteren* Seite angedeuteten Einstellung des Commutators A wird eine geschlossene Kette gebildet, wo die Ordnung der Drähte folgende ist:

abfdeca .

Löst man f in seine Theile f^{I}, f^{II}, f^{III}, f^{IV}, f^{V} auf, und stellt die ganze geschlossene Kette durch die 4 Seiten eines Rechtecks dar, wo die beiden langen, mit e und f^{II} bezeichneten Seiten die langen Verbindungsdrähte bedeuten, so stellt Fig. 2 den *ersteren*, Fig. 3 den *letzteren* Fall dar. Die Stelle des Inductors f^{I}, mit dem rotirenden Magnet, ist noch besonders mit einem + bezeichnet worden, die beiden Stellen der Multiplicatoren a und f^{IV} durch grössere ○, die beiden Stellen der Solenoide b und f^{III} durch kleinere ∘. Der Inductor f^{I} mit dem rotirenden Magnet befindet sich stets in der oberen Rechteckseite, das Dynamometer f^{III} f^{IV} befindet sich stets in der gegenüberliegenden untern Rechteckseite. Die Stelle des andern Dynamometers ab dagegen wird gewechselt und befindet sich im *ersteren* Falle in der unteren Rechteckseite neben dem ersteren Dynamometer f^{III} f^{IV}, dem Inductor f^{I} gegenüber, im *letzteren* Falle in der oberen Rechteckseite,

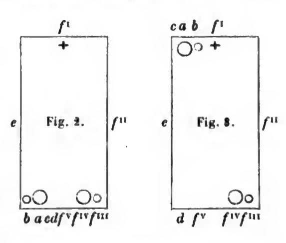


Fig. 2.
Fig. 3.

neben dem Inductor f^{I}, dem Dynamometer $f^{\text{III}} f^{\text{IV}}$ gegenüber. Das Dynamometer *ab* wird also durch den Wechsel des Commutators *A* bald an einer vom Inductor f^{I} sehr entfernten Stelle der Kette, bald an einer ihm sehr nahen Stelle eingeschaltet, wie es für die *erste Beobachtungsreihe* verlangt wurde.

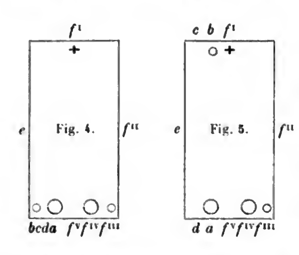
Zur Versetzung *des Solenoids b* des ersten Dynamometers von einer Einschaltungsstelle zur andern während der Beobachtungen werden gleichfalls die Commutatoren *C*, *C'* und *D* nicht gebraucht, sondern die Versetzung wird, nachdem durch den Commutator *B* die durch punktirte Bögen auf der *unteren* Seite angedeuteten Verbindungen hergestellt sind, bloss durch Wechsel der Einstellung des Commutators *A* bewerkstelligt. Denn bei der durch punktirte Bögen auf der *oberen* Seite angedeuteten Einstellung des Commutators *A* wird alsdann eine geschlossene Kette gebildet, wo die Ordnung der Drähte folgende ist:

adcbefa ;

bei der durch punktirte Bögen auf der *unteren* Seite angedeuteten Einstellung des Commutators *A* wird eine geschlossene Kette gebildet, wo die Ordnung der Drähte folgende ist:

adecbfa .

Der *erstere* Fall wird durch Fig. 4, der *letztere* durch Fig. 5 dargestellt. Man sieht, dass dabei die Stelle des Inductors f^{I}, die des Dynamometers $f^{\text{III}} f^{\text{IV}}$ und auch die des Multiplicators *a* immer unverändert bleiben, und dass bloss die Stelle des Solenoids *b* gewechselt wird, welche im *ersteren* Falle in der unteren Rechteckseite, neben dem Multiplicator *a*, dem Inductor f^{I} gegenüber, im *letzteren* Falle in der oberen Rechteckseite, neben dem Inductor f^{I}, dem Multiplicator *a* gegenüber sich befindet. Das Solenoid *b* wird also durch den Wechsel des Commutators *A* bald an einer vom Multiplicator *a* sehr entfernten Stelle der Kette, bald an einer ihm sehr nahen Stelle eingeschaltet, wie es für die *zweite Beobachtungsreihe* verlangt wurde.



Zur Beruhigung der Solenoide vor Beginn der Beobachtungen wird das die erste und vierte Doppelzelle des Commutators *D* verbindende

Stück des Drahts f^{v} herausgenommen. Zur Beruhigung des Solenoids des *ersten* Dynamometers b erhält sodann der Commutator D die *obere* durch einen punktirten Bogen angedeutete Einstellung, wodurch der Draht f^{II} nebst dem zweiten Dynamometer $f^{III}f^{IV}$ ausgeschlossen wird, und je nach der Einstellung des Commutators C eine geschlossene Kette mit folgender Drahtordnung gebildet wird:

bei der *oberen* Einstellung von C: $a^{I}a^{II}bef^{I}f^{V}a^{III}a^{I}$

bei der *unteren* Einstellung von C: $a^{I}a^{III}cdf^{V}f^{I}eba^{II}a^{I}$,

wobei für die Commutatoren A und B die oberen Einstellungen angenommen sind. Man sieht daraus, dass bei gegebener Stromrichtung im Multiplicator a^{I} die Stromrichtung im Solenoide b, bei der *oberen* Einstellung von C, $a^{II}be$, bei der *unteren* Einstellung, eba^{II}, also entgegengesetzt ist, wonach also in diesen beiden Fällen entgegengesetzt gleiche Drehungsmomente auf das Solenoid b ausgeübt werden, von denen das eine stets zur *Dämpfung* der Solenoidbewegung benutzt werden kann.

Zur Beruhigung des Solenoids des *zweiten* Dynamometers f^{III} erhält der Commutator D die *untere* durch einen punktirten Bogen angedeutete Einstellung, wodurch die Drähte $eba^{II}a^{I}a^{III}$, zu denen das erste Dynamometer mit gehört, ausgeschlossen werden, und je nach der Einstellung des Commutators C^{I} eine geschlossene Kette mit folgender Drahtordnung gebildet wird:

bei der *oberen* Einstellung von C^{I}: $f^{IV}f^{V}f^{I}f^{II}f^{III}f^{I}$

bei der *unteren* Einstellung von C^{I}: $f^{IV}f^{III}f^{II}f^{I}f^{V}f^{IV}$.

Man sieht, dass bei gegebener Stromrichtung im Multiplicator f^{IV} die Stromrichtung im Solenoide f^{III} bei der *oberen* Einstellung von C^{I} $f^{II}f^{III}f^{IV}$, bei der *unteren* Einstellung $f^{IV}f^{III}f^{II}$, also entgegengesetzt ist, wonach also in diesen beiden Fällen entgegengesetzt gleiche Drehungsmomente auf das Solenoid f^{III} ausgeübt werden, von denen das eine stets zur *Dämpfung* der Solenoidbewegung benutzt werden kann.

Nach hergestellter Beruhigung beider Solenoide wird der Commutator D geöffnet und zur Verbindung seiner ersten und letzten Zelle das herausgenommene Drahtstück f^{V} wieder eingesetzt.

26.

Die langen Leitungsdrähte.

Bei Versetzung *des Solenoids* eines Elektrodynamometers, oder bei Versetzung *des ganzen Elektrodynamometers* (Solenoids und Multiplicators) von einer Einschaltungsstelle der geschlossenen Kette zur andern ist es von wesentlicher Bedeutung für die Beobachtungen, dass die beiden Leitungsdrähte, welche die beiden Einschaltungsstellen mit einander verbinden, von nahe gleicher und sehr grosser Länge sind. Es sind daher schon im vorigen Artikel zwei Theile der geschlossenen Kette, nämlich die Drähte e und f'', als sehr lange Drähte besonders angeführt worden, welche zu diesem Zwecke dienen. Bei der zu den folgenden Versuchen gebrauchten Kette hatte jeder von diesen beiden Drähten eine Länge von 36600 Metern oder fast 5 Meilen.

Bei der grossen Länge der ganzen Kette, welche diese beiden langen Drähte enthält, leuchtet von selbst ein, dass es praktisch unausführbar ist, dem geschlossenen Leiter eine genaue Kreisform zu geben, wie bei der Entwicklung der Gesetze im vorigen Abschnitte der Einfachheit wegen angenommen wurde. Aber auch abgesehen von dieser grossen Länge, welche der geschlossene Leiter besitzen soll, würde die einfache Kreisform keine Anwendung finden können bei einer Kette, die zum Zweck der Beobachtungen einen *Inductorring* für den rotirenden Magnet und *zwei Dynamometer* enthalten muss, wozu Stücke des Leitungsdrahts verwendet werden, deren Gestalt und Lage durch die für die Construction dieser Instrumente geltenden Regeln gegeben ist.

Offenbar hat diese in der Wirklichkeit unvermeidliche Abweichung des geschlossenen Leiters in seiner Gestalt von der Kreisform Einfluss auf die im Leiter vom rotirenden Magnet hervorgebrachten elektrischen Schwingungen, und das Gesetz, wonach die Amplitude der elektrischen Schwingungen von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets abhängt, wird dadurch wesentlich verändert. Handelt es sich aber nicht um Beobachtungen, durch welche die Amplitude genau bestimmt und gemessen, sondern nur um solche, durch welche die Amplituden an zwei verschiedenen Stellen des geschlossenen Leiters verglichen werden sollen (oder durch welche bloss die Phasendifferenz an beiden Stellen bestimmt werden soll), so scheint eine Abweichung von der Kreisform von geringer

Bedeutung. Denn wenn, den im vorigen Abschnitte entwickelten Gesetzen gemäss, an zwei von einander weit entfernten Stellen *eines kreisförmigen Leiters* auch bei sehr grossen Rotationsgeschwindigkeiten wirklich kein merklicher Unterschied in Schwingungsamplitude und Schwingungsphase statt fände, so scheint kein Grund vorhanden zu sein, anzunehmen, dass ein solcher Unterschied durch eine blosse Abweichung des Leiters von der Kreisform hervorgebracht würde; noch mehr dürfte es aber umgekehrt gestattet sein, wenn die Beobachtungen lehren sollten, dass in einem geschlossenen Leiter, der *eine beliebige von der Kreisform ganz verschiedene Gestalt* besitzt, keine merklichen Unterschiede der Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen statt finden, dieses Resultat als ein allgemeines zu betrachten, auch dafür, dass die Unterschiede von Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen bei vollkommener Kreisform unmerklich seien.

Es kommt aber bei diesen beiden 5 Meilen langen Drähten, welche zum geschlossenen Leiter gehören sollen, noch besonders in Betracht, dass, wenn keine Telegraphendrähte dazu benutzt werden, sondern wenn jene langen Drähte sich in dem geschlossenen Raume befinden sollen, wo die Beobachtungen gemacht werden, wie es nöthig ist, um alle für die Beobachtungen wesentlichen äusseren Umstände vollkommen zu beherrschen, jene langen Drähte der Raumersparniss wegen nothwendig auf *Rollen* aufgewickelt werden müssen. Nun leuchtet aber ein, dass bei bald plötzlich entstehenden bald wieder plötzlich verschwindenden elektrischen Strömungen, wie bei den durch schnelle Rotation eines Magnets hervorgebrachten elektrischen Schwingungen statt finden, alle Windungen des auf einer Rolle aufgewickelten Leitungsdrahts nach den Gesetzen der *Volta-Induction* elektromotorische Kräfte wechselseitig auf einander ausüben müssen, die sich zu einer starken *Dämpfungskraft* summiren, wodurch die Amplitude der elektrischen Schwingungen sehr verkleinert wird, so dass dieselbe bei grösseren Rotationsgeschwindigkeiten des Magnets auch mit den feinsten Dynamometern nicht mehr würde beobachtet werden können. Für die Ausführung der Beobachtungen ist daher die Auffindung einer Methode von grösster Wichtigkeit, die langen Drähte so auf *Rollen* zu wickeln, dass eine solche *wechselseitige Induction der Drahtwindungen auf einander* vermieden wird.

Dieser Zweck kann nun, wenn die Drähte gut umsponnen sind, auf die einfachste und vollkommenste Weise dadurch erreicht werden,

dass die beiden *Hälften* eines jeden auf *eine Rolle* zu wickelnden Stücks vorher zusammengelegt und zu einem *Doppeldraht* vereint werden. Diese Vereinigung geschieht am besten dadurch, dass beide Hälften, von denen jede schon umsponnen ist und die durch diese doppelte Umspinnung von einander isolirt gehalten werden, *nochmals zusammen mit Seide oder Baumwolle umsponnen werden*. Verbindet man sodann die beiden Hälften *am einen Ende* mit einander, so wird von ihnen ein Leiter gebildet, durch welchen ein vom anderen offenen Ende eintretender und durch die eine Drahthälfte hingehender Strom *fast auf demselben Wege*, durch die andere Drahthälfte, zu dem offenen Ende zurückgeführt wird. Das Ende, an welchem die beiden Drahthälften mit einander verbunden sind, wird sodann an der zur Aufwickelung bestimmten Rolle befestigt und sodann der ganze *Doppeldraht auf diese Rolle aufgewunden*, so dass das Ende, an welchem die beiden Drahthälften unverbunden geblieben sind, frei oben auf zu liegen kommt, und der ganze Doppeldraht mit diesen unverbundenen Enden der beiden Drahthälften in die übrige Kette eingeschaltet werden kann.

Auf diese Weise werden alle einem solchen Doppeldrahte angehörigen Stromelemente *paarweise* so geordnet, dass, wenn keine merklichen Unterschiede in Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen vorkommen, lauter gleiche und entgegengesetzt gerichtete Stromelemente dicht neben einander liegen. Es leuchtet aber ein, dass von solchen Paaren von Stromelementen, auch bei schnellstem Wechsel der Intensität, keine elektromotorische Kraft auf irgend ein anderes entfernteres Leiterelement ausgeübt werden kann, und dass daher dieser Doppeldraht, wie er auch beim Aufwickeln auf die Rolle gewunden worden sein möge, in Folge dieser Windungen keine Dämpfungskraft erhalten hat, durch welche die vom rotirenden Magnet hervorgebrachten elektrischen Schwingungen geschwächt würden, wie es der Fall gewesen sein würde, wenn der Draht einfach und seiner ganzen Länge nach auf gleiche Weise aufgewunden worden wäre.

Ohne die eben beschriebene Methode würden schnelle elektrische Schwingungen in einer so langen Leitungskette, zwar nicht in Folge des grossen Widerstands der Kette, sondern in Folge der wechselseitigen Induction aller Windungen auf einander, in welchen die elektrischen Strömungen so rasch entstehen und verschwinden, ganz verschwindend klein und ihre Beobachtung daher unausführbar werden.

Es bedarf hiebei kaum der Bemerkung, dass dieselbe Methode auch in andern Fällen nützliche Anwendung finden kann, wo ähnliche Verhältnisse vorhanden sind, unter welchen dieselbe Methode Aehnliches leisten wird.

Es gilt dies namentlich für *elektrische Telegraphen* von grosser Ausdehnung, wo ebenfalls zum Zweck der Telegraphenzeichen elektrische Strömungen in sehr langer Kette sehr schnell entstehen und verschwinden sollen. Es ist auch wirklich schon bemerkt worden, dass durch die Dämpfungskräfte, welche die Elektricität in den einzelnen Drahtelementen dabei ausübt und, besonders unter dem Einfluss eines umschliessenden Conductors, erleidet, grosse Hindernisse durch Verzögerungen für die Zeichengebung hervorgebracht werden, von denen man fürchtet, dass sie die weitere Ausdehnung besonders der unterseeischen Telegraphenlinien, z. B. von Europa nach Amerika, ganz abgesehen von den mit Legung und Erhaltung derselben verbundenen technischen Schwierigkeiten, vereiteln könnten. Es kommen dabei nicht bloss die Kräfte, welche die Elektricitäten in den verschiedenen Drahtelementen wechselseitig auf einander ausüben, in Betracht, sondern auch diejenigen Kräfte, welche die Elektricität jedes Drahtelements auf die *benachbarten Leiter* ausübt und von ihnen erleidet, und selbst diejenigen Kräfte, welche vom *Erdmagnetismus*, bei seiner Veränderlichkeit, auf die Elektricität der einzelnen Drahtelemente ausgeübt werden. Alle hieraus für schnelle Zeichengebung bei sehr grosser Ausdehnung der Kette erwachsenden Hindernisse können durch Anwendung der obigen Methode ganz oder fast ganz beseitigt werden, wonach immer zwei Drahtelemente dicht neben einander zu liegen kommen, in denen die elektrische Strömung und Ladung nahe *gleich aber entgegengesetzt* sind. Es leuchtet daraus von selbst die Regel ein, dass bei weiterer Ausdehnung der Telegraphenlinie ein Kabel anzufertigen ist, in welchem dicht neben dem Drahte, welcher den Strom hinführt, ein zweiter Draht, der ihn zurückführt, sich befindet, wonach also auf die Zurückführung des Stroms durch die Erde verzichtet werden muss. Dass die Isolirung dieser im Kabel dicht neben einander liegenden Drähte von einander keine Schwierigkeit findet, scheint das Beispiel unserer Kette zu beweisen, wo die beiden durch eine gemeinschaftliche Umspinnung fest zusammengedrückten Drähte nur dadurch von einander isolirt wurden, dass jeder für sich, vor der Zusammenlegung, mit Seide umsponnen war. Die Dicke der

isolirenden Schicht betrug hiebei noch nicht $\frac{1}{10}$ Millimeter und doch war die Isolirung für Ströme, die so stark waren, dass die Länge der Skalen für die Beobachtung der von ihnen hervorgebrachten Dynamometerablenkungen kaum hinreichte, als vollkommen zu betrachten, wie aus den damit gemachten, später zu beschreibenden. Beobachtungen sich ergeben wird.

27.

Beobachtungen zur Vergleichung der Amplitude der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen einer langen geschlossenen Kette.

Nach der in den vorhergehenden Artikeln erörterten Anordnung sind nun vier Beobachtungsreihen, sämmtlich an einem Tage, am 28. September 1860, gemacht worden, *abwechselnd* zur Vergleichung der *Amplitude* und zur Bestimmung des *Phasenunterschiedes* an zwei weit von einander entfernten Stellen der oben beschriebenen langen geschlossenen Kette, während durch einen schnell rotirenden Magnet elektrische Schwingungen darin erregt wurden. Die beiden zur Vergleichung der *Amplitude* gemachten Beobachtungsreihen sollen jedoch, wenn sie auch nicht unmittelbar nach einander gemacht worden sind, in diesem Artikel *beide zusammen* betrachtet werden, ebenso wie im folgenden Artikel die *beiden* zur Bestimmung des *Phasenunterschiedes* gemachten Beobachtungsreihen.

Die correspondirenden Beobachtungen an den beiden Elektrodynamometern wurden von Herrn Schering und von mir gemacht, während die Herren Klinkerfues und H. Weber die gleichförmige Drehung des Magnets in der Inductorrolle ausführten und deren Geschwindigkeit bestimmten. Es wurde diese Geschwindigkeit möglichst nahe auf 260 Umdrehungen in 1 Secunde erhalten, wovon nur geringe Abweichungen vorkamen, die sich in kleinen Schwankungen der Solenoid-Ablenkungen beider Dynamometer zu erkennen gaben.

Die *Schwingungsdauer der Solenoide* beider Dynamometer war so regulirt, dass sie gleich gross war und fast genau 15 Secunden betrug. Dabei war aber die Empfindlichkeit der beiden Instrumente doch sehr verschieden, was daher rührte, dass zu den beiden Solenoiden zwar gleich grosse Rollen, aber von verschiedener Drahtstärke und daher von verschiedener Zahl von Umwindungen, genommen worden waren. Das

empfindlichere Dynamometer, dessen Solenoid eine grössere Zahl von Umwindungen hatte, wurde zu denjenigen Beobachtungen gebraucht, durch die abwechselnd die Schwingungsamplitude an zwei verschiedenen Stellen der Leitungskette bestimmt werden sollte, während das *weniger empfindliche* Dynamometer zu den correspondirenden Beobachtungen diente, um den Einfluss kleiner Schwankungen in der Rotationsgeschwindigkeit in Rechnung zu bringen, wozu dasselbe an einer bestimmten Stelle des Leitungsdrahts immer unverrückt bleiben musste.

Erste Reihe.

Die erste Beobachtungsreihe wurde nach der Art. 24 vorgeschriebenen Anordnung zum Zweck der Vergleichung der *Intensität* oder Schwingungsamplitude der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen der langen geschlossenen Kette gemacht.

Alle *Beobachtungen* sind in Theilen einer Millimeterskale ausgedrückt, deren Bild in einem 2100 Skalentheile von ihr entfernten, am Solenoid befestigten, Planspiegel auf die bei Magnetometern gewöhnliche Weise mit einem Fernrohre beobachtet wurde. Um bei den Beobachtungen die ganze Ausdehnung der Skale benutzen zu können, da das Solenoid von seiner Ruhelage stets nur nach einer und derselben Seite abgelenkt wurde, waren die Ablesungsfernröhre nebst ihren Skalen vor den Spiegeln so aufgestellt worden, dass die Ruhelage der Solenoide bei ruhendem Magnet oder bei gelöster Kette nicht, wie gewöhnlich, dem über dem Fernrohr gelegenen Mittelpunkte der Skale, sondern einem Punkte nahe am Anfang der Skale entsprach.

Während der ganzen Beobachtungsreihe wurde *die Drehung des Magnets* gleichmässig fortgesetzt Zwischen den einzelnen durch Nummern unterschiedenen Beobachtungssätzen wurde der Art. 25 beschriebene *Commutator A* commutirt, nämlich das erste Mal, wo er vorher offen gewesen war, wurde er geschlossen, nachher wurde *obere* und *untere* Einstellung bloss vertauscht. Der *Commutator B* befand sich dabei in der *oberen Einstellung* fortwährend geschlossen, ebenso wie die beiden 4zelligen *Commutatoren C* und *C'*, die vor dem Beginn der Beobachtungen zur Beruhigung der Solenoide gebraucht worden waren, während der 4zellige Commutator *D* geöffnet und durch Wiedereinsetzen des die erste und vierte Zelle verbindenden Drahtstücks, welches wäh-

rend der Beruhigung der beiden Solenoide herausgenommen worden war, aus der Kette ganz ausgeschlossen wurde.

Vor dem Beginn der Beobachtungen waren die Solenoide der beiden Dynamometer, wie Art. 25 auseinandergesetzt worden, möglichst beruhigt worden. — Da die Einstellung der drei Commutatoren *B, C, C'* während der ganzen Beobachtungsreihe unverändert blieb, so ist in den Ueberschriften der einzelnen Sätze dieser Beobachtungsreihe nur bemerkt, ob die Kette geöffnet oder geschlossen war und in letzterem Falle, ob die *obere* oder *untere Einstellung des Commutators A* nach dem Schema Art. 25 statt fand. — Bei *geschlossener Kette*, wo die Solenoide in grösserer Bewegung waren, sind aus den nach einander beobachteten Elongationen *die zweiten Mittel* zur Bestimmung des *Ruhestands* genommen worden.

Obere Einstellung des Commutators *B*.

Satz 1. Kette geöffnet.			
Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
52,9		+11,4	
16,2	34,55	−12,0	−0,30
52,6	34,40	+11,2	−0,40
16,6	34,60	−11,9	−0,35
52,5	34,55	+11,0	−0,45
16,9	34,70	−11,4	−0,20
	Mittel 34,56		Mittel −0,34
Satz 2. Kette geschlossen. Obere Einstellung des Commutators *A*.			
901,7		638,2	
854,7	876,55	606,8	621,38
895,1	877,93	633,7	622,35
866,8	880,82	615,2	624,52
894,6	882,70	634,0	625,83
874,8		620,1	
	Mittel 879,50		Mittel 623,52

Satz 3. Kette geschlossen.

Untere Einstellung des Commutators *A*.

Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
843,1		596,2	
908,8	872,35	644,9	617,95
828,7	870,45	585,8	616,60
915,6	873,72	649,9	619,10
835,0	879,35	590,8	623,20
931,8		661,3	
	Mittel 873,97		Mittel 619,21

Satz 4. Kette geschlossen.

Obere Einstellung des Commutators *A*.

Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
811,4		574,2	
941,8	880,90	668,5	624,65
828,6	890,82	587,4	631,87
964,3	887,95	684,2	629,68
794,6	872,93	562,9	619,13
938,2		666,5	
	Mittel 883,15		Mittel 626,33

Satz 5. Kette geschlossen.

Untere Einstellung des Commutators *A*.

Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
796,7		564,7	
978,0	885,60	694,1	628,20
789,7	887,47	559,9	629,45
992,5	884,35	704,1	627,15
762,7	876,35	540,5	621,37
987,5		700,4	
	Mittel 883,44		Mittel 626,55

Satz 6. Kette geschlossen.

Obere Einstellung des Commutators *A*.

Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
748,3		531,5	
1007,5	877,80	714,5	622,93
747,9	879,30	531,2	623,97
1013,9	880,67	719,0	624,97
747,0	876,65	530,7	622,13
998,7		708,1	
Mittel	878,61	Mittel	623,50

Satz 7. Kette geschlossen.

Untere Einstellung des Commutators *A*.

Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
742,8		527,6	
1011,1	880,28	716,2	624,38
756,1	883,47	537,5	626,77
1010,6	882,45	715,9	626,00
752,5	879,43	534,7	623,80
1002,1		709,9	
Mittel	881,41	Mittel	625,24

Vergleicht man die correspondirenden Ablenkungen der beiden gleichzeitig beobachteten Dynamometer, welche man erhält, wenn man den bei *geöffneter* Kette (Satz 1) beobachteten Ruhestand von dem bei *geschlossener* Kette beobachteten abzieht, und beschränkt sich dabei zunächst auf diejenigen Fälle (Satz 2. 4. 6), wo beide Dynamometer ihre Stelle in der Kette symmetrisch dicht neben einander, von beiden Seiten durch die beiden langen Leitungsdrähte vom Inductor des rotirenden Magnets geschieden, erhalten hatten, wo also immer gleiche Schwingungsamplitude und Schwingungsphase in beiden Dynamometern zugleich statt finden musste; so giebt das Verhältniss der beobachteten Ablenkungen beider Dynamometer zu einander *das Verhältniss ihrer Empfind-*

lichkeit Hienach erhält man die Empfindlichkeit des *ersten* Dynamometers in Theilen der des *zweiten* ausgedrückt:

$$\text{aus Satz 1 und 2: } \frac{844,94}{623,86} = 1,3544$$

$$\text{aus Satz 1 und 4: } \frac{848,59}{626,67} = 1,3541$$

$$\text{aus Satz 1 und 6: } \frac{844,05}{623,84} = 1,3530$$

im Mittel also *das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers zu der des zweiten* wie

1,3538 : 1 .

Nach dieser Vergleichung der Empfindlichkeit beider Dynamometer unter einander können die beobachteten Ablenkungen des einen abwechselnd an zwei verschiedenen Stellen der Kette eingeschalteten Dynamometers, mit Hülfe der beobachteten Ablenkungen des andern immer an derselben Stelle der Kette gebliebenen Dynamometers, so reducirt werden, wie wenn die Ablenkungen an den beiden Stellen der Kette *gleichzeitig mit ganz gleichen Dynamometern* beobachtet worden wären. Es kann nämlich aus den correspondirenden Ablenkungen des Hülfsdynamometers nun immer die Ablenkung des Hauptdynamometers berechnet werden, wie sie beobachtet worden sein würde, wenn das Hauptdynamometer an seiner ursprünglichen Stelle, für welche die Vergleichung seiner Empfindlichkeit mit der des andern Dynamometers gilt, geblieben wäre, und diese für die *erste Stellung* des Hauptdynamometers in der Kette *berechnete Ablenkung* lässt sich dann mit der in der *zweiten Stellung* des Hauptdynamometers wirklich *beobachteten Ablenkung* vergleichen.

Multiplicirt man nämlich mit der gefundenen Verhältnisszahl 1,3538 die beobachteten Ablenkungen des Hülfsdynamometers im 3ten, 5ten und 7ten Satze, nämlich, nach Abzug des Satz 1 gefundenen Ruhestands,

619,55 ; 626,89 ; 625,58 ;

so erhält man die Ablenkungen, welche am Hauptdynamometer beobachtet worden sein würden, wenn letzteres seine Stellung in der Kette, so wie sie beim 2ten, 4ten und 6ten Satze gewesen war, behalten hätte.

In der folgenden Tafel sind die Werthe dieser *berechneten Ablenkungen* in der *zweiten* Columne enthalten; in der *dritten* Columne sind die zu der Zeit, für welche diese *berechneten Ablenkungen des Hauptdynamometers an Stelle I* galten, wirklich *beobachteten Ablenkungen des*

Hauptdynamometers an Stelle II angegeben; in der *vierten* Columne endlich sind die Unterschiede zwischen beiden bemerkt worden.

Satz	Berechnete Ablenkung für Stelle I	Beobachtete Ablenkung für Stelle II	Unterschied
3.	838,75	839,41	+ 0,66
5.	848,69	848,88	+ 0,19
7.	846,92	846,85	− 0,07
Mittel	844,78	845,05	+ 0,26

Diese in Skalentheilen beobachteten Ablenkungen, mit dem 2100 Skalentheile betragenden Abstande des Spiegels von der Skale dividirt, geben nun aber die Tangenten der doppelten Winkel, welche Art. 24 mit v, v' bezeichnet worden sind. Es ist also

$$\text{für Stelle I:}\quad \operatorname{tang} v = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tang} \tfrac{844,78}{2100} = 0{,}193601$$

$$\text{für Stelle II:}\quad \operatorname{tang} v' = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tang} \tfrac{845,05}{2100} = 0{,}193656\ .$$

Nun verhalten sich aber nach Art. 24 die Quadrate der Intensitäten i, i', oder *die Quadrate der Amplituden der elektrischen Schwingungen* an den beiden verglichenen Stellen I und II, wohin das Hauptdynamometer durch die obere und untere Einstellung des Commutators A versetzt wurde, wie

$$ii : i'i' = \operatorname{tang} v : \operatorname{tang} v'\ ;$$

folglich erhält man hieraus

$$i' = 1{,}000142 \,.\, i\ .$$

Die Stelle I befindet sich aber in der Kette fast 5 Meilen weit von dem Inductor, in welchem der rotirende Magnet sich befindet, entfernt, während die Stelle II sehr nahe beim Inductor liegt. Es scheint sich also hieraus zwar zu ergeben, dass die Amplitude der durch den rotirenden Magnet in der ganzen Kette hervorgebrachten elektrischen Schwingungen in grosser Entfernung von dem Inductor, von wo die Erregung ausging, nämlich an der mit I bezeichneten Stelle, etwas kleiner sei als ganz in der Nähe des Inductors, an der Stelle II; doch ist der gefundene Unterschied so ausserordentlich gering, dass er auch bei grösster Genauigkeit der Beobachtungen sich nicht mehr sicher verbürgen lässt, er beträgt nämlich kaum $\frac{1}{7000}$ von der ganzen Schwingungs-

amplitude, welche der ganzen Dynamometer-Ablenkung entspricht. In der That ergeben also diese Beobachtungen, dass an zwei fast 5 Meilen von einander entfernten Stellen der Kette auch durch die genauesten Beobachtungen *gar kein Unterschied in der Amplitude der elektrischen Schwingungen mit Sicherheit nachgewiesen werden kann.*

Was die *Genauigkeit der Beobachtungen* betrifft, so leuchtet zwar ein, dass eine nähere Bestimmung derselben aus so wenigen Wiederholungen, wie diese erste Beobachtungsreihe enthält, noch nicht gewonnen werden kann; indess darf man, da keine Abweichung vom Mittelwerthe 0,40 Skalentheil übersteigt, diesen Mittelwerth aus allen 3 Beobachtungen bis auf 1 Skalentheil wohl als zuverlässig betrachten, was dem 845sten Theile der ganzen Schwingungsamplitude entspricht. — Eine solche Genauigkeit der Intensitätsmessungen *elektrischer Schwingungen* übertrifft die Genauigkeit welche bisher in den Intensitätsmessungen fast aller anderer Schwingungen hat erreicht werden können. In der *Akustik* und *Optik* hängt von der Schwingungsamplitude die Intensität des Schalles und Lichtes ab, und es ist bekannt, wie weit die Intensitätsmessungen des Schalles und Lichtes hinter jener Genauigkeit zurückbleiben. Nur die nach der Gaussischen Methode gemachten Beobachtungen der Schwingungsamplitude einer Magnetnadel oder überhaupt einer unifilar oder bifilar aufgehangenen Drehwage gewähren gleiche und unter günstigen Verhältnissen eine noch etwas grössere Genauigkeit. — Es verdient dabei bemerkt zu werden, dass dieselbe Genauigkeit mit demselben Inductor und mit denselben Dynamometern, welche zur Hervorbringung und zur Beobachtung der elektrischen Schwingungen, von denen 520 in jeder Secunde statt fanden, in einer fast 10 Meilen langen Kette, dienten, ebenso gut erreichbar gewesen wäre, auch wenn die Zahl der elektrischen Schwingungen über 1000 in 1 Secunde, und die Länge der Kette über 30 Meilen gestiegen wäre, ohne dass es dabei einer Verstärkung des Drahts der verlängerten Kette bedurft hätte; denn es war bei den beschriebenen Versuchen die elektrische Schwingung und deren Wirkung absichtlich verkleinert worden, nämlich *erstens* durch Ausschluss der einen Hälfte des Inductors, auf welche der rotirende Magnet wirkte, *zweitens* durch Verstärkung der statischen Directionskraft der Solenoide beider Dynamometer; die Länge der Skale würde sonst für die Beobachtungen nicht ausgereicht haben. Beim Gebrauch des ganzen Inductors und durch Verminderung der statischen Directions-

kraft der Solenoide, wodurch ihre Schwingungsdauer leicht von 15 auf 20 Secunden vergrössert werden konnte, würden die beobachteten Wirkungen bei einer viel längern Kette noch ebenso gross gewesen sein.

Um jeden Zweifel zu beseitigen, dass diese Genauigkeit nur scheinbar sei und die Uebereinstimmung der in obiger Beobachtungsreihe nur 3 Mal wiederholten Beobachtungen nur zufällig sei, ist endlich noch eine *zweite Beobachtungsreihe*, ganz nach derselben Anordnung und an dem nämlichen Tage ausgeführt worden, deren Resultate zur Vergleichung mit der vorhergehenden in der folgenden Tafel auf dieselbe Weise zusammengestellt worden sind.

Zweite Reihe.

Die der ersten Reihe vorausgeschickten Bemerkungen gelten auch für die zweite Reihe.

Obere Einstellung des Commutators *B*.

Satz 1. Kette geöffnet.			
Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
30,3	32,35	— 8,5	— 1,65
34,4	32,35	+ 5,2	— 1,55
30,3	32,20	— 8,3	— 1,65
34,1	32,20	+ 5,0	— 1,50
30,3	32,25	— 8,0	— 1,55
34,2		+ 4,9	
Mittel 32,27		Mittel — 1,58	
Satz 2. Kette geschlossen. Obere Einstellung des Commutators *A*.			
858,7		615,7	
904,2	879,00	636,1	623,83
848,9	879,68	607,4	624,47
916,7	880,52	647,0	625,15
839,8	876,00	599,2	621,90
907,7		642,2	
Mittel 878,80		Mittel 623,84	

Satz 3. Kette geschlossen.

Untere Einstellung des Commutators *A*.

Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
837,0		596,0	
918,8	880,60	649,0	624,70
847,8	885,58	604,8	628,67
927,9	881,70	656,1	625,75
823,2	880,00	586,0	624,38
945,7		669,4	
Mittel	881,97	Mittel	625,87

Satz 4. Kette geschlossen.

Obere Einstellung des Commutators *A*.

792,5		554,0	
964,0	881,38	683,1	623,30
805,0	884,72	573,0	628,07
964,9	880,70	683,2	625,22
788,0	879,35	561,5	624,25
976,5		690,8	
Mittel	881,54	Mittel	625,21

Satz 5. Kette geschlossen.

Untere Einstellung des Commutators *A*.

794,0		566,4	
962,4	875,90	678,5	621,10
784,8	876,73	564,0	621,93
974,9	879,92	687,2	623,95
785,1	874,35	560,4	620,02
952,3		672,1	
Mittel	876,73	Mittel	621,75

Satz 6. Kette geschlossen.

Obere Einstellung des Commutators *A*.

Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
783,2		559,9	
961,1	877,62	679,0	623,15
805,1	875,53	574,7	621,42
930,8	869,10	657,3	617,10
809,7	872,52	579,1	619,68
939,9		663,2	
	Mittel 873,69		Mittel 620,34

Satz 7. Kette geschlossen.

Untere Einstellung des Commutators *A*.

Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
783,5		560,8	
969,6	878,25	682,9	623,13
790,3	881,72	565,9	625,67
976,7	882,28	688,0	626,08
785,4	882,12	562,4	625,95
981,0		691,0	
	Mittel 881,09		Mittel 625,21

Für das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers, in Theilen der des zweiten ausgedrückt, erhält man aus den Beobachtungen dieser zweiten Reihe folgende Werthe:

$$\text{aus Satz 1 und 2: } \frac{846,53}{625,42} = 1,3535$$

$$\text{aus Satz 1 und 4: } \frac{849,27}{626,79} = 1,3549$$

$$\text{aus Satz 1 und 6: } \frac{841,42}{621,92} = 1,3529$$

im Mittel also das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers zu der des zweiten wie

$$1,3538 : 1 .$$

Multiplicirt man nun mit dieser Verhältnisszahl 1,3538 die beobachteten Ablenkungen des zweiten Dynamometers, welches seine Stelle in der Kette bei allen Beobachtungen immer beibehalten hat, nämlich die Ablenkungen, welche sich aus der Differenz der Ruhestände bei geöffneter Kette in Satz 1 und bei geschlossener Kette in Satz 3. 5. 7 ergeben:

627,45 ; 623,33 ; 626,79

so geben die Producte

849,45 ; 843,86 ; 848,55

die Grösse der Ablenkungen, welche am ersten Dynamometer, wenn dasselbe seine Stelle in der Kette, die es während der Beobachtungen Satz 2. 4. 6 hatte, beibehalten hätte, beobachtet worden wären, während die aus den Ruheständen Satz 3. 5. 7 entnommenen Ablenkungen der veränderten Stellung des Dynamometers in der Kette entsprechen. In der folgenden Tafel sind die der ursprünglichen Stellung mit denen der veränderten Stellung des ersten Dynamometers in der Kette entsprechenden Ablenkungen zusammengestellt worden.

Satz	Berechnete Ablenkung für Stelle I	Beobachtete Ablenkung für Stelle II	Unterschied
3.	849,45	849,70	+ 0,25
5.	843,86	844,46	+ 0,60
7.	848,55	848,82	+ 0,27
Mittel	847,29	847,66	+ 0,37

Hieraus ergiebt sich ebenso, wie bei der vorigen Beobachtungsreihe, zur Vergleichung der Schwingungsamplitude oder der Strömungsintensität an der Stelle I und II,

$$\text{für Stelle I:}\quad \text{tang}\, v = \text{tang}\, \tfrac{1}{2}\, \text{arc tang}\, \tfrac{847,29}{2100} = 0,194134$$

$$\text{für Stelle II:}\quad \text{tang}\, v' = \text{tang}\, \tfrac{1}{2}\, \text{arc tang}\, \tfrac{847,66}{2100} = 0,194212$$

folglich, da nach Art. 24

$$ii : i'i' = \text{tang}\, v : \text{tang}\, v'$$

ist, ergiebt sich hieraus

$$i' = 1,000201\, .\, i\, .$$

Der Unterschied der Schwingungsamplitude beträgt also zwischen den beiden Stellen, von denen die eine fast 5 Meilen vom Inductor des rotirenden Magnets entfernt war, während die andere dicht beim Inductor sich befand, kaum $\frac{1}{5000}$ von der ganzen Schwingungsamplitude, welche der ganzen Dynamometerablenkung entspricht. Es leuchtet ein, dass auch dieser Unterschied zu gering ist, um auch bei grösster Genauigkeit der Beobachtungen verbürgt werden zu können, und es wird daher auch durch diese zweite Beobachtungsreihe die Bestätigung erhalten, dass *an zwei fast 5 Meilen von einander entfernten Stellen der Kette gar kein Unterschied in der Amplitude der elektrischen Schwingungen mit Sicherheit nachgewiesen werden kann.*

28.

Beobachtungen zur Bestimmung des Unterschieds der Phase der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen einer langen geschlossenen Kette.

Bei gleicher Anordnung, wie die für die beiden vorhergehenden Beobachtungsreihen beschriebene, wurde eine *dritte* Beobachtungsreihe, aber nicht zur Vergleichung der Schwingungsamplituden, sondern zur Bestimmung des *Phasenunterschieds* der elektrischen Schwingungen an zwei verschiedenen Stellen einer langen Kette ausgeführt. Es wurde zu diesem Zwecke, ebenso wie bei den vorhergehenden Beobachtungsreihen, zwischen den einzelnen durch Nummern unterschiedenen Beobachtungssätzen der Art. 25 beschriebene *Commutator A*, wenn er vorher geöffnet gewesen war, geschlossen, oder, wenn er geschlossen gewesen war, commutirt, das heisst, es wurden *obere* und *untere* Einstellung mit einander vertauscht. Dagegen wurde dabei *Commutator B* zwar fortwährend geschlossen erhalten, aber in der *unteren* (statt früher in der oberen) *Einstellung.* Die beiden 4zelligen *Commutatoren C und C'* endlich, die vor dem Beginn der Beobachtungen zur Beruhigung der Solenoide gebraucht worden waren, wurden während der Beobachtungen wieder gerade ebenso geschlossen und eingestellt erhalten wie früher. Der Commutator *D* wurde, nach Beruhigung der Solenoide, vor dem Beginn der Beobachtungen geöffnet und durch einen seine erste und letzte Zelle verbindenden Draht ganz aus der Kette ausgeschlossen,

Dritte Reihe.

Untere Einstellung des Commutators *B*.

Satz 1. Kette geöffnet.			
Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
33,9	35,95	— 3,5	— 3,70
38,0	35,95	— 3,9	— 3,65
33,9	35,95	— 3,4	— 3,20
38,0	35,95	— 3,0	— 3,40
33,9	36,00	— 3,8	— 3,45
38,1		— 3,1	
	Mittel 35,96		Mittel — 3,48
Satz 2. Kette geschlossen. Obere Einstellung des Commutators *A*.			
849,5		995,0	
917,7	883,25	263,1	626,67
848,1	889,37	985,5	630,87
943,6	889,15	289,4	629,60
821,3	875,85	954,1	619,50
917,2		280,4	
	Mittel 884,41		Mittel 626,66
Satz 3. Kette geschlossen. Untere Einstellung des Commutators *A*.			
812,8		940,0	
956,7	882,55	317,6	625,27
804,0	876,10	925,9	620,57
939,7	873,35	312,9	618,70
810,0	878,10	923,1	622,32
952,7		330,2	
	Mittel 877,52		Mittel 621,72

Satz 4. Kette geschlossen.

Obere Einstellung des Commutators *A*.

Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
943,2		363,1	
809,5	875,45	873,8	619,30
939,6	873,17	366,5	617,70
804,0	875,20	864,0	618,62
953,2	880,35	380,0	622,13
811,0		864,5	
Mittel	876,04	Mittel	619,44

Satz 5. Kette geschlossen.

Untere Einstellung des Commutators *A*.

925,7		366,2	
836,3	881,82	879,8	625,35
929,0	877,45	375,6	622,35
815,5	875,10	858,4	618,15
940,4	879,10	380,2	621,40
820,1		866,8	
Mittel	878,37	Mittel	621,81

Satz 6. Kette geschlossen.

Obere Einstellung des Commutators *A*.

919,8		369,0	
845,1	886,12	881,2	627,52
934,5	885,68	378,7	627,53
828,6	880,35	871,5	624,62
929,7	878,32	376,8	622,53
825,3		865,0	
Mittel	882,62	Mittel	625,55

Satz 7. Kette geschlossen.

Untere Einstellung des Commutators *A*.

Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
898,0		367,5	
850,5	875,77	870,9	649,52
904,1	872,63	368,8	649,13
831,8	870,40	868,0	648,45
912,7	868,52	369,0	645,77
816,9		857,1	
Mittel	871,76	Mittel	648,22

Für das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers, in Theilen der des zweiten ausgedrückt, erhält man aus den Beobachtungen dieser dritten Reihe folgende Werthe:

$$\text{aus Satz 1 und 2: } \frac{848,45}{630,14} = 1,3464$$

$$\text{aus Satz 1 und 4: } \frac{840,08}{622,92} = 1,3486$$

$$\text{aus Satz 1 und 6: } \frac{846,66}{629,03} = 1,3460$$

im Mittel also das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers zum zweiten wie

1,3470 : 1 .

Multiplicirt man nun mit dieser Verhältnisszahl 1,3470 die beobachteten Ablenkungen des zweiten Dynamometers, welches seine Stelle in der Kette bei allen Beobachtungen immer beibehalten hat, nämlich die Ablenkungen, welche sich aus der Differenz der Ruhestände bei geöffneter Kette in Satz 1 und bei geschlossener Kette in Satz 3. 5. 7 ergeben:

625,20 ; 625,29 ; 621,70

so geben die Producte

842,15 ; 842,26 ; 837,44

die Grösse der Ablenkungen, welche am ersten Dynamometer, wenn das Solenoid diejenige Stelle, die es während der Beobachtungen Satz 2. 4. 6 hatte, beibehalten hätte, beobachtet worden wären, während die aus den

Ruheständen Satz 3. 5. 7 entnommenen Ablenkungen der veränderten Stellung des Solenoids in der Kette entsprechen. In der folgenden Tafel sind die der ursprünglichen mit denen der veränderten Stellung des Solenoids entsprechenden Ablenkungen des ersten Dynamometers zusammengestellt worden.

Satz	Berechnete Ablenkung für Stelle I des Solenoids	Beobachtete Ablenkung für Stelle II des Solenoids	Unterschied
3.	842,15	841,56	— 0,59
5.	842,26	842,41	+ 0,15
7.	837,44	835,80	— 1,64
Mittel	840,62	839,92	— 0,70

Auch diese Beobachtungsreihe ist nochmals wiederholt worden, um die diesen Beobachtungen zuzuschreibende Genauigkeit daran zu erproben, und wir wollen diese *vierte* Beobachtungsreihe sogleich folgen lassen.

Vierte Reihe.

Untere Einstellung des Commutators *B*.

Satz 1. Kette geöffnet.			
Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
44,8		+ 4,3	
28,2	36,50	— 6,8	— 1,25
44,5	36,35	+ 4,3	— 1,25
27,9	36,20	— 6,6	— 1,15
44,6	36,25	+ 4,2	— 1,20
28,1	36,35	— 6,8	— 1,30
Mittel	36,33	Mittel	— 1,23

Satz 2. Kette geschlossen.

Obere Einstellung des Commutators *A*.

Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
840,9		592,2	
917,6	879,82	650,3	621,70
843,2	880,80	594,0	622,37
919,2	882,23	651,2	623,40
847,3	884,05	597,2	624,70
922,4		653,2	
	Mittel 881,72		Mittel 623,04

Satz 3. Kette geschlossen.

Untere Einstellung des Commutators *A*.

794,5		559,9	
970,1	882,67	687,4	623,90
796,0	882,95	560,9	624,00
969,7	885,48	686,8	625,82
806,5	887,97	568,8	627,70
969,2		686,4	
	Mittel 884,77		Mittel 625,36

Satz 4. Kette geschlossen.

Obere Einstellung des Commutators *A*.

772,9		543,9	
1005,7	886,77	712,1	626,20
762,8	883,15	536,7	623,57
1001,3	882,50	708,8	623,15
764,6	882,25	538,3	623,00
998,5		706,6	
	Mittel 883,67		Mittel 623,98

Satz 5. Kette geschlossen.

Untere Einstellung des Commutators A.

Dynamometer 1.		Dynamometer 2.	
Beobachtete Elongationen	Ruhestand	Beobachtete Elongationen	Ruhestand
744,1		524,2	
1023,3	883,92	724,3	624,45
745,0	883,75	525,0	624,32
1021,7	885,80	723,0	625,80
754,8	883,37	532,2	624,15
1002,2	879,68	709,2	621,60
759,5		535,8	
Mittel	883,30	Mittel	624,06

Satz 6. Kette geschlossen.

Obere Einstellung des Commutators A.

988,3		698,9	
779,0	883,07	550,1	623,95
986,0	879,20	696,7	621,00
765,8	878,93	540,5	620,75
998,1	884,37	705,3	624,72
775,5		547,8	
Mittel	881,39	Mittel	622,61

Satz 7. Kette geschlossen.

Untere Einstellung des Commutators A.

960,0		678,2	
805,4	884,25	570,5	625,37
966,2	882,20	682,3	623,75
791,0	876,15	559,9	619,38
956,4	875,35	675,4	618,87
797,6		564,8	
Mittel	879,49	Mittel	621,84

Für das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers, in Theilen der des zweiten ausgedrückt, erhält man aus den Beobachtungen dieser vierten Reihe folgende Werthe:

$$\text{aus Satz 1 und 2: } \frac{845,39}{624,27} = 1,3542$$

$$\text{aus Satz 1 und 4: } \frac{847,34}{625,21} = 1,3553$$

$$\text{aus Satz 1 und 6: } \frac{845,06}{623,84} = 1,3546$$

im Mittel also das Verhältniss der Empfindlichkeit des ersten Dynamometers zu der des zweiten wie

1,3547 : 1 .

Multiplicirt man nun mit dieser Verhältnisszahl 1,3547 die beobachteten Ablenkungen des zweiten Dynamometers, welches seine Stelle in der Kette bei allen Beobachtungen immer beibehalten hat, nämlich die Ablenkungen, welche sich aus der Differenz der Ruhestände bei geöffneter Kette in Satz 1 und bei geschlossener Kette in Satz 3. 5. 7 ergeben:

626,59 ; 625,29 ; 623,07

so geben die Producte

848,84 ; 847,10 ; 844,10

die Grösse der Ablenkungen, welche am ersten Dynamometer, wenn das Solenoid die Stelle in der Kette, die es während der Beobachtungen Satz 2. 4. 6 hatte, beibehalten hätte, beobachtet worden wären, während die aus den Ruheständen Satz 3. 5. 7 entnommenen Ablenkungen der veränderten Stellung des Solenoids des ersten Dynamometers in der Kette entsprechen. In der folgenden Tafel sind die der ursprünglichen mit denen der veränderten Stellung des Solenoids in der Kette entsprechenden Ablenkungen zusammengestellt worden.

Satz	Berechnete Ablenkung für Stelle I des Solenoids	Beobachtete Ablenkung für Stelle II des Solenoids	Unterschied
3.	848,84	848,44	— 0,40
5.	847,10	846,97	— 0,13
7.	844,10	843,16	— 0,94
Mittel	846,68	846,19	— 0,49

Vergleicht man mit diesen aus der *vierten* Beobachtungsreihe gefundenen Mittelwerthen die aus der *dritten* Beobachtungsreihe erhaltenen, so ergiebt sich das Verhältniss der Ablenkungen an beiden Stellen so übereinstimmend, dass es für alle weitern Betrachtungen offenbar genügt, die Mittel aus beiden Reihen in Rechnung zu bringen, nämlich für die Ablenkung des Solenoids

an Stelle I 843,65

an Stelle II 843,055 .

Hieraus ergeben sich nun zur Bestimmung des Unterschieds der Schwingungsphasen an Stelle I und II nach Art. 24 die Werthe

$$u = \tfrac{1}{2} \text{ arc tang } \frac{843,65}{2100} = 10^{0}\ 56'\ 37''0$$

$$v'' = \tfrac{1}{2} \text{ arc tang } \frac{843,055}{2100} = 10^{0}\ 56'\ 11''7\ .$$

Die letztere Angabe würde noch einer kleinen Correction bedürfen, wenn man nach dem Ergebniss des vorhergehenden Artikels nicht die Schwingungsamplitude an den beiden Stellen I und II als gleich betrachten, sondern den kleinen Unterschied der sich ergeben, ungeachtet er in keiner Weise verbürgt werden kann, in Rechnung bringen wollte. Es würde dann $v'' = 10^{0}\ 56'\ 13''2$ zu setzen sein. Indess werden wir uns hier an die erstere Angabe halten, weil gar kein Grund vorhanden ist, eine solche Ungleichheit der Schwingungsamplitude, da sie erfahrungsmässig gar nicht sicher festgestellt werden kann, anzunehmen.

Hienach ergiebt sich endlich zur Bestimmung des Phasenunterschieds 2λ an den beiden Stellen I und II nach Art. 24

$$\sin \lambda^2 = \frac{u - v''}{2 \sin u\,(\cos u + (u - v'')\sin u)} = 0,000329$$

folglich

$$2\lambda = 2^{0}\ 4'\ 43''\ ,$$

was etwa dem 87sten Theile der Schwingungsdauer entspricht.

Auch diese Bestimmung des *Phasenunterschieds* beruht auf einer so kleinen Differenz in den beobachteten Ablenkungen, welche nur $\frac{3}{5}$ Skalentheil betrug, dass sie *ebenso wenig als erfahrungsmässig sicher festgestellt betrachtet werden kann, wie die geringe Verschiedenheit der Schwingungsamplitude im vorhergehenden Artikel.*

29.

Resultat der Prüfung.

Die Art. 27. 28 beschriebenen Beobachtungen dienen den im vorhergehenden Abschnitte entwickelten Gesetzen in Beziehung auf das Verhalten der *Schwingungsamplituden* und *Schwingungsphasen* an verschiedenen Stellen eines geschlossenen Leiters zur Prüfung, und es ist dadurch die Gleichheit von Amplituden und Phasen noch für sehr schnelle Schwingungen in einem sehr langen geschlossenen Leitungsdrahte bestätigt gefunden worden. Die zu diesen Beobachtungen gebrauchte Methode gleichzeitiger correspondirender Beobachtungen an zwei in ihrer Schwingungsdauer genau übereinstimmenden Dynamometern gestattete dabei eine sehr grosse Genauigkeit, und es würde sich damit diese Prüfung noch viel weiter erstrecken lassen, wenn die Mittel zu noch schnellerer Rotation des Magnets und zur Herstellung noch längerer Leitungsketten vorhanden wären. Eine solche weitere Ausdehnung dieser Prüfung würde aber, wie es scheint, die darauf zu verwendende Mühe und den Aufwand nicht hinreichend lohnen, und es dürfte deren Ausdehnung bis zu 520 Schwingungen in 1 Secunde und bis 10 Meilen Länge der Kette bei den beschriebenen Beobachtungen schon genügen. Zwar leuchtet ein, dass auch dann, wenn Amplituden und Phasen elektrischer Schwingungen in geschlossenen Ketten im Allgemeinen nicht überall gleich wären, doch ihre Verschiedenheiten desto kleiner werden müssten, je *grösser* die von der Rotationsgeschwindigkeit abhängige *Schwingungsdauer* und je *kürzer* der *Leitungsdraht* wäre, so dass diese Unterschiede bei immer wachsender Schwingungsdauer und abnehmender Länge des Leitungsdrahts endlich unmerklich werden müssten. Es kann daher die beabsichtigte Prüfung ihren Zweck nur dann erreichen, wenn sie sich beträchtlich über die Grenzen hinaus erstreckt, innerhalb deren eine solche Ausgleichung in jedem Falle statt finden müsste, und es fragt sich also, ob eine Leiterlänge von 10 Meilen und eine Schwingungsdauer von $\frac{1}{510}$ Secunde dazu genüge.

Man denke sich von einem Punkte der Kette einen *einfachen Wellenzug* ausgehend und betrachte denselben während des *ersten Umlaufs*. Die Wellendauer betrage $\frac{1}{510}$ Secunde und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit sei die normale $c\sqrt{\frac{1}{2}} = 41950$ Meilen. In diesem Falle würde,

wenn er sich darstellen liesse, eine *Abnahme der Amplitude* der von dem Wellenzuge hervorgebrachten elektrischen Schwingung mit der Entfernung von der Stelle, von welcher der Wellenzug ausgeht, und für jeden Augenblick ein mit derselben Entfernung wachsender *Phasenunterschied* statt finden, die sich beide leicht bestimmen liessen.

Für einen solchen *einfachen Wellenzug* kann nämlich die Verschiebung eines elektrischen Theilchens σ durch folgende Gleichung dargestellt werden:

$$\sigma = Ae^{-\varepsilon t} . \sin 520\,\pi \left(t - \frac{s}{c}\sqrt{2}\right),$$

worin nach Art. 15 $\varepsilon = \frac{cc}{16\pi a\alpha k M''}$ und $M'' = 2 \log \frac{8a}{\alpha}$ näherungsweise gesetzt werden darf. Da nun ferner nach Art. 16 $\frac{1}{\pi a \alpha k} = w' = \frac{16 . 10^6}{\pi a \alpha . cc}$, folglich $\varepsilon = \frac{10^6}{2\pi a\alpha \log \frac{8a}{\alpha}}$, und für unsere Kette $2\pi a = 76 . 10^6$ Millimeter und $\alpha = \frac{1}{8}$ Millimeter betrug, so erhält man

$$\varepsilon = 477000 .$$

Einer Entfernung $s = 38 . 10^6$ Millimeter (etwa 5 Meilen) entspricht nun bei der Fortpflanzung der Zeitraum $t = \frac{s}{c}\sqrt{2} = \frac{1}{8177}$ Secunde, folglich das Verhältniss der Amplituden am Ausgangspunkte und in 5 Meilen Entfernung davon:

$$1 : e^{-\varepsilon t} = 1 : e^{-54,7} = 573 . 10^{21} : 1 ,$$

wonach also die *Amplitude* in 5 Meilen Entfernung so klein geworden ist, dass sie gegen die am Ausgangspunkte des Wellenzugs ganz verschwindet.

Der *Phasenunterschied* für einen gegebenen Augenblick am Ausgangspunkte des Wellenzugs und in der Entfernung $= s$ davon wird durch $520 \frac{\pi s}{c}\sqrt{2}$ dargestellt, also, für $s = 38 . 10^6$, durch $0{,}0636 . \pi = 10^0\ 27'$, ein Phasenunterschied, der bei der Genauigkeit, welche die Beobachtungen nach dem vorhergehenden Artikel gestatten, keineswegs als unmerklich betrachtet werden kann.

Nach diesem aus der Betrachtung der Elementarwellen entnommenen Ueberschlage dürfen die in den vorhergehenden Artikeln beschriebenen Versuche als hinreichend zur Prüfung der im vorigen Abschnitte in Beziehung auf die Verhältnisse der Amplituden und der Phasen elektrischer Schwingungen in geschlossenen Leitern aufgestellten Gesetze betrachtet werden.

Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass die gefundene Gleichheit der Schwingungsamplitude an verschiedenen weit von einander entfernten Stellen des geschlossenen Leitungsdrahts zugleich auch als Beweis dienen kann, dass dieser mit Seide umsponnene Draht für elektrische Strömungen, wie sie durch den rotirenden Magnet hervorgebracht wurden, als hinreichend isolirt zu betrachten ist; denn bei unvollkommener Isolation hätten die Strömungen in den vom Inductor entfernteren Theilen der Kette schwächer als in den dem Inductor näher liegenden sein müssen.

30.

Beobachtungen über die Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets.

Nachdem *die Gleichheit der Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen* für die längste Kette und für die grösste Rotationsgeschwindigkeit des Magnets, welche sich mit den gegebenen Mitteln darstellen liessen, bestätigt worden ist, woraus von selbst einleuchtet, dass diese Gleichheit um so mehr bei kürzeren Ketten und kleineren Rotationsgeschwindigkeiten statt finde; so bleibt für die *quantitative Prüfung* der im vorhergehenden Abschnitte entwickelten Gesetze hauptsächlich nur noch die Prüfung des Gesetzes der *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets,* für die nämliche Kette, übrig.

Aus der Gleichheit der Schwingungsamplituden und Schwingungsphasen in allen Theilen eines geschlossenen Leiters geht von selbst hervor, dass die Intensität der Strömung in irgend einem Punkte stets der *mittleren* Strömungsintensität im ganzen Leiter gleich ist. Das Gesetz für die *Mittelwerthe der Strömungsintensitäten* in geschlossenen Leitern in ihrer Abhängigkeit von den *Mittelwerthen der elektromotorischen Kräfte* ist nun Art. 9, unabhängig von der Betrachtung der Gestalt des geschlossenen Leiters, entwickelt worden, und es ist daraus Art. 21 das Gesetz dieser Abhängigkeit für den Fall näher bestimmt worden, wo dieser *Mittelwerth der elektromotorischen Kräfte* sich proportional dem Sinus eines mit der Zeit proportional wachsenden Bogens ändert, was statt findet, wenn die elektromotorischen Kräfte durch *Rotation eines kleinen Magnets* hervorgebracht werden. Wurde nämlich hienach die *mittlere*

elektromotorische Kraft $= g_0 \sin \mu t$ gesetzt, so ergab sich für die *mittlere Stromintensität* das Gesetz

$$i = -\frac{g_0}{w'} . \sin \varrho_0 \cos (\mu t + \varrho_0) ,$$

worin w' den Widerstand der Längeneinheit des Leiters bezeichnete, und $\tang \varrho_0 = \frac{\pi a c c w'}{4 \mu \int M''_0 ds}$ war. Nach diesem Gesetze hängt aber die Strömungsintensität i bei einer gegebenen Kette und bei gegebener Stärke und Lage des Magnets, für die der Widerstand w' und der von der Gestalt der Kette abhängige Coefficient $\int M''_0 ds$, so wie auch der von der Stärke des Magnets und seiner Lage zur geschlossenen Kette abhängige Faktor g_0 bestimmte Werthe haben, bloss noch von der durch μ zu bestimmenden grösseren oder kleineren *Rotationsgeschwindigkeit* ab, indem $\frac{\mu}{2\pi}$ die Zahl der Umdrehungen in der Zeiteinheit bezeichnet.

Ausser dem Gesetze der *Abhängigkeit der Strömungsintensität von der Rotationsgeschwindigkeit* des Magnets könnte zwar ferner auch noch der *absolute Werth der Strömungsintensität* i in seiner Abhängigkeit von den *absoluten Werthen der Constanten* w', $\int M''_0 ds$, und g_0 einer Prüfung unterworfen werden; doch was die Abhängigkeit von w' und g_0 betrifft, so ist dieselbe für verschwindende Werthe von μ schon geprüft, wo $\varrho_0 = \frac{\pi}{2}$ und folglich

$$i = \frac{g_0}{w'}$$

erhalten wird, was das bekannte und durch die Erfahrung fest begründete Ohm'sche Gesetz ist; was aber die Abhängigkeit von $\int M''_0 ds$ betrifft, so würde diese Prüfung leicht zu machen sein, sobald nur analytische Methoden vorhanden wären, den Werth der Constanten $\int M''_0 ds$ aus der Gestalt des geschlossenen Leiters leicht zu bestimmen. Die Kenntniss dieses Werths für einen *kreisförmigen* Leiter genügt nicht, weil die Beobachtungen, zu denen ein *Inductor* und zwei *Dynamometer* nothwendig sind, mit einem kreisförmigen Leiter nicht ausgeführt werden können.

Die Ausführung der verlangten *quantitativen Prüfung* fordert aber eine genaue Kenntniss der Instrumente, mit welchen die Beobachtungen gemacht werden, insbesondre eine genaue Kenntniss von den gebrauchten *Dynamometern*. Eine zweckmässige Einrichtung zur Regulirung der gegenseitigen Lage des *Multiplicators* und *Solenoids* jedes Dynamometers, sowie zur Regulirung der *Schwingungsdauer des Solenoids* vorausgesetzt,

kommt es dabei vorzüglich auf eine zweckmässige *Aufstellung* und sodann auf die *Prüfung des Instruments* an. Die *Aufstellung* des Dynamometers soll so geschehen, dass die *Solenoidaxe horizontal und dem magnetischen Meridiane parallel* ist; die *Axe des das Solenoid umschliessenden Multiplicators* soll ebenfalls *horizontal sein, und mit der Solenoidaxe einen rechten Winkel bilden*. Der Mittelpunkt des Multiplicators soll mit dem Mittelpunkte des Solenoids zusammenfallen. Ist dies näherungsweise nach äusseren Merkmalen geschehen, so bleibt zu erörtern übrig, wie man *durch Beobachtungen*, die mit dem Instrumente selbst gemacht werden, prüfen könne, ob die angeführten Bedingungen genau erfüllt sind, oder wie gross die noch vorhandenen *Abweichungen* sind, sowie, welche Versuche nöthig sind, auch diejenigen *Elemente des Instruments* zu bestimmen, deren Kenntniss nöthig ist, wenn aus den damit gemachten Beobachtungen *genaue quantitative Bestimmungen* abgeleitet werden sollen.

31.

Prüfung des Dynamometers.

Zum Zweck einer solchen Prüfung des Dynamometers lässt man den Strom einer *constanten* Säule, welcher zugleich durch den Multiplicator einer *Tangentenboussole* geführt wird, die zur Bestimmung der *Stromintensität* dient, durch das *Solenoid*, bald *vorwärts*, bald *rückwärts*, und durch den *Multiplicator* gehen, während derselbe mit dem Solenoide bald *parallel*, bald *kreuzweise* verbunden ist, was durch einen *Commutator*, zu dessen Doppelzellen die Enden des Solenoid- und Multiplicator-Drahts geführt sind, leicht bewerkstelligt wird. In allen diesen 4 Fällen wird die *Ablenkung* des Solenoids von der ursprünglichen Gleichgewichtslage auf bekannte Weise beobachtet. Aus diesen 4 Beobachtungen werden 1) die Abweichung der Solenoidaxe von dem magnetischen Meridian bei der ursprünglichen Gleichgewichtslage $= \mu$, 2) die Abweichung des von der Solenoidaxe und von der Multiplicatoraxe gebildeten Winkels von einem rechten Winkel $= \vartheta$, 3) das Verhältniss der vom Erdmagnetismus auf das Solenoid, bei gegebener Stromintensität in demselben, ausgeübten Directionskraft zu der statischen Directionskraft des Solenoids $= \varepsilon$, 4) das Verhältniss der vom Multiplicator auf das Sole-

noid, bei gegebener Stromintensität in beiden, ausgeübten Directionskraft zu der statischen Directionskraft des Solenoids $= \varkappa$ bestimmt.

Die Beobachtung giebt die *Ablenkung* des Solenoids von der ursprünglichen Gleichgewichtslage in Skalentheilen und wird die Zahl dieser Skalentheile mit dem doppelten Abstand des Spiegels von der Skale, $= R$ Skalentheilen, dividirt, so erhält man für kleinere Ablenkungen dieselben im *Bogenwerth* ausgedrückt, welcher in den angegebenen 4 Fällen mit a, b, c, d bezeichnet werden möge. Es ergiebt sich dann

$$\varkappa = \tfrac{1}{2}\left(\frac{c+b}{c-b} + \frac{d+a}{d-a}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{da - cb - (db - ca)\,\varkappa}{d + c - b - a}$$

$$\delta = \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{c+b}{c-b} - \frac{d+a}{d-a}\right)$$

$$\mu = \frac{1}{\varkappa}\left(\varepsilon - (1 + \varkappa - \delta\varepsilon)\,a\right) .$$

Zum Beweise braucht man nur nach bekannten Gesetzen das *statische*, *erdmagnetische* und *elektrodynamische* Drehungsmoment, welche auf das Solenoid wirken, zu bestimmen, deren Summe für das bei der beobachteten Ablenkung statt findende Gleichgewicht $= 0$ zu setzen ist.

Bezeichnet s die *statische* Directionskraft, so ist bei einer Ablenkung $= \varphi$ von der *statischen* Gleichgewichtslage, welche statt gefunden hatte, ehe ein Strom durch die Kette ging, das *statische* Drehungsmoment

$$= - s \sin\varphi .$$

Bezeichnet ferner i die *Stromintensität*, positiv wenn das durchströmte Solenoid einem mit seinem Nordpol nach Norden gerichteten Magnete äquivalent ist, bezeichnet mi die *erdmagnetische* Directionskraft, wonach m das Product des horizontalen Theils des Erdmagnetismus in die vom Solenoiddrahte umwundene Fläche ist; bezeichnet endlich μ, wie schon bemerkt, den Winkel, den die Solenoidaxe beim statischen Gleichgewichte mit dem magnetischen Meridiane macht; so ist das *erdmagnetische* Drehungsmoment

$$= - mi \sin(\varphi + \mu) ,$$

oder, wenn μ sehr klein ist,

$$= - mi(\sin\varphi + \mu\cos\varphi) .$$

Bezeichnet endlich $\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)$ den Winkel, welchen die nach Osten gerichtete Multiplicatoraxe mit der nach Norden gerichteten Solenoidaxe

bildet; bezeichnet ferner eii die vom Multiplicator auf das Solenoid ausgeübte elektrodynamische Directionskraft, e positiv wenn Multiplicator und Solenoid so mit einander verbunden sind, dass der Multiplicator bei positivem i in seinen Fernwirkungen einem mit seinem Südpole nach Osten gerichteten Magnet äquivalent ist; so ist das *elektrodynamische* Drehungsmoment

$$= eii \cos(\varphi - \delta)\,,$$

oder, wenn δ sehr klein ist,

$$= eii(\cos\varphi + \delta\sin\varphi)\,.$$

Die Bedingung des Gleichgewichts des Solenoids bei der beobachteten Ablenkung φ besteht nun darin, dass die Summe dieser drei Momente $= 0$ ist, d. i.

$$-s\sin\varphi - mi(\sin\varphi + \mu\cos\varphi) + eii(\cos\varphi + \delta\sin\varphi) = 0\,.$$

Dividirt man diese Gleichung mit $-s\cos\varphi$ und beachtet, dass für $\operatorname{tang}\varphi$ der *Bogenwerth der beobachteten Ablenkung*, d. i. a im *ersten* der 4 betrachteten Fälle, gesetzt werden kann, so erhält man folgende Gleichung

$$a + \frac{mi}{s}(a + \mu) - \frac{eii}{s}(1 + \delta a) = 0\,.$$

In diesem *ersten* Falle ging der Strom durch den Solenoiddraht *vorwärts* und das Solenoid war mit dem Multiplicator *parallel* verbunden. In dem *zweiten* Falle, wo der Strom durch den Solenoiddraht ebenfalls *vorwärts* ging, aber das Solenoid mit dem Multiplicator *kreuzweise* verbunden war, bleibt die Stromintensität i positiv, aber e wechselt das Vorzeichen, während der Bogenwerth der in diesem Falle beobachteten Ablenkung b für $\operatorname{tang}\varphi$ zu setzen ist, wonach

$$b + \frac{mi}{s}(b + \mu) + \frac{eii}{s}(1 + \delta b) = 0\,.$$

Im *dritten* Falle, wo der Strom durch den Solenoiddraht *rückwärts* ging, das Solenoid mit dem Multiplicator aber, wie im ersten Falle, *parallel* verbunden war, wechselt i das Vorzeichen und e ist positiv wie im ersten Falle, während der Bogenwerth der in diesem Falle beobachteten Ablenkung c für $\operatorname{tang}\varphi$ zu setzen ist, wonach

$$c - \frac{mi}{s}(c + \mu) - \frac{eii}{s}(1 + \delta c) = 0\,.$$

Im *vierten* Falle endlich, wo der Strom durch den Solenoiddraht *rückwärts* ging, wie im dritten Falle, und das Solenoid mit dem Multiplicator *kreuzweise* verbunden war, wie im zweiten Falle, ist i negativ wie im

dritten und e negativ wie im zweiten Falle, während der Bogenwerth der in diesem Falle beobachteten Ablenkung d für tang φ zu setzen ist, wonach

$$d - \frac{mi}{s}(d + \mu) + \frac{eii}{s}(1 + \delta d) = 0 \; .$$

Aus diesen 4 Gleichungen ergeben sich die angegebenen Werthe von $\varkappa$, ε, δ, μ, wenn man $\varkappa$ für $\frac{mi}{s}$ und ε für $\frac{eii}{s}$ schreibt.

Als Beispiel diene das zu den folgenden Versuchen gebrauchte Dynamometer, für welches die Beobachtungen nach Skalentheilen ergeben hatten:

$$2Ra = + 440{,}01$$
$$2Rb = - 443{,}81$$
$$2Rc = + 448{,}26$$
$$2Rd = - 450{,}68 \; .$$

Es war dabei $2R = 5075$ Skalentheile. Hieraus folgt nun

$$\varkappa = 0{,}008484$$
$$\varepsilon = 0{,}0880$$
$$\delta = - 0{,}0397$$
$$\mu = + 0{,}0323 \; .$$

Die Werthe von $\varkappa$ und ε, die sich leicht, wenn die Stromintensität i mit Hülfe einer Tangentenboussole gemessen worden ist, auf die für die Einheit der Stromintensität geltenden Normalwerthe zurückführen lassen, geben die *Elemente für die Stärke des Solenoids und für die Empfindlichkeit des Dynamometers.* Die beiden andern Werthe δ und μ beziehen sich dagegen auf die *Aufstellung* und geben die Abweichungen dieser Aufstellung von den für sie vorgeschriebenen Bedingungen. Es ergiebt sich nämlich daraus, dass die Solenoidaxe mit der Multiplicatoraxe, statt eines rechten Winkels, den Winkel

$$\frac{\pi}{2} + \delta = 87^0\; 43'\; 31''$$

bildet, und dass die Solenoidaxe, statt beim *statischen* Gleichgewichte mit dem magnetischen Meridiane zusammen zu fallen, davon um den Winkel

$$\mu = 1^0\; 51'$$

nach Osten abweicht. Man sieht hieraus, dass, wenn das Instrument mit feinen Gradtheilungen versehen ist, die Fehler der Aufstellung sich hienach sehr leicht genau berichtigen lassen. — Bleiben aber auch diese

kleinen Fehler der Aufstellung unverbessert, so kann man doch die mit dem Instrumente gemachten Beobachtungen verbessern und diejenigen Werthe berechnen, die man bei genauer Aufstellung erhalten haben würde.

Für den Zweck der folgenden Schwingungsversuche kommt wegen des dabei statt findenden schnellen Wechsels des Vorzeichens von i die letztere mit μ bezeichnete Abweichung nicht in Betracht, sondern nur die mit δ bezeichnete Abweichung, und es ergiebt sich leicht für eine in Skalentheilen beobachtete Ablenkung x' der verbesserte Werth x

$$x = x' - \frac{\delta x' x'}{2R} = x' + \frac{x' x'}{127780} .$$

Die in den folgenden Artikeln enthaltenen Beobachtungen waren der Anfang einer von mir und R. Kohlrausch gemeinschaftlich unternommenen Arbeit, welche durch die Krankheit und den Tod meines theuren Freundes unterbrochen worden ist. Die dabei gebrauchten Vorrichtungen zur gleichförmig schnellen Drehung des Magnets und zur Messung dieser Geschwindigkeit sind nebst den darauf sich beziehenden Beobachtungen von ihm ausgeführt worden.

32.

Erste Reihe.

Die folgende Beobachtungsreihe ist von R. Kohlrausch und mir gemeinschaftlich am 12. April 1857 ausgeführt worden. Sie betrifft die ***Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets***, und wurde mit vier verschiedenen Ketten gemacht, zu denen aber immer das nämliche *Dynamometer* und die nämliche *Inductorrolle* gehörten, die aus einem Stücke eines sehr feinen Kupferdrahts von ungefähr 1500 Meter Länge, mit einem Widerstande nach absolutem Maasse $= 23 . 10^{12}$, welches der constante Theil der 4 Ketten war, gebildet waren. Hiezu kam

bei der ersten Kette	A	ein 2800	Meter langes Stück,	dessen Widerstand	$=$	$8,79 . 10^{12}$
» » zweiten »	B	» 5600	» »	» » »	$=$	$18 . 10^{12}$
» » dritten »	C	» 8000	» »	» » »	$=$	$27 . 10^{12}$
» » vierten »	D	» 10800	» »	» » »	$=$	$35 . 10^{12}$.

Die Skale war in einer Entfernung von 2537,5 Skalentheilen von dem am Solenoid befestigten kleinen Planspiegel fest aufgestellt, unter rechtem Winkel mit der Spiegelnormale beim statischen Gleichgewicht des Sole-

noids, und wurde von der Verticalebene der Spiegelnormale im 800sten Skalentheile geschnitten. Das hinter der Skale aufgestellte Fernrohr konnte so verrückt werden, dass beim statischen Gleichgewicht des Solenoids bald der 800ste Skalentheil, bald ein höherer oder niederer Skalentheil am Fadenkreuz beobachtet wurde, um damit die Ablenkung des Solenoids, auch wenn sie über die halbe Skalenlänge hinausging, beobachten zu können.

Kette	Schwingungszahl m	Statische Gleichgewichtslage	Abgelenkter Stand	Ablenkung in Skalentheilen y	x'	x
	288,80	361,69	1475,85	+1114,46	+1111,84	+1121,51
	217,80	362,52	1242,34	+ 879,82	+ 879,80	+ 885,86
	141,77	363,13	892,45	+ 529,32	+ 526,91	+ 529,08
	106,46	363,13	710,41	+ 347,28	+ 343,61	+ 344,53
A.	289,88	363,13	1480,61	+1117,48	+1115,01	+1124,74
	107,26	1210,44	857,52	— 352,92	— 349,96	— 349,00
	140,46	1210,44	681,63	— 528,81	— 527,08	— 524,90
	215,10	1210,44	328,91	— 881,53	— 881,42	— 875,34
	281,68	1210,44	97,05	—1113,39	—1109,88	—1100,24
	106,76	800,15	630,73	— 169,42	— 169,23	— 169,01
	142,74	800,15	561,78	— 238,37	— 237,84	— 237,40
	216,80	800,15	463,11	— 337,04	— 335,55	— 334,67
B.	290,26	800,15	410,90	— 389,25	— 386,95	— 385,78
	106,84	800,24	969,02	+ 168,78	+ 168,59	+ 168,81
	144,15	800,24	1040,27	+ 240,03	+ 239,49	+ 239,94
	217,90	800,24	1136,55	+ 336,31	+ 334,84	+ 335,72
	288,04	800,24	1185,91	+ 385,67	+ 383,44	+ 384,59
	107,12	800,24	897,67	+ 97,43	+ 97,39	+ 97,46
	144,32	800,24	931,32	+ 131,08	+ 131,00	+ 131,13
	214,80	800,24	971,13	+ 170,89	+ 170,69	+ 170,92
C.	289,62	800,24	988,77	+ 188,53	+ 188,26	+ 188,54
	108,60	800,24	701,11	— 99,13	— 99,09	— 99,01
	143,68	800,24	669,66	— 130,58	— 130,50	— 130,37
	219,78	800,24	628,57	— 171,67	— 171,47	— 171,24
	286,90	800,24	611,76	— 188,48	— 188,21	— 187,94

Kette	Schwingungszahl m	Statische Gleichgewichtslage	Abgelenkter Stand	Ablenkung in Skalentheilen y	x'	x
	108,42	800,58	731,93	− 68,65	− 68,63	− 68,59
	144,44	800,58	711,98	− 88,60	− 88,57	− 88,51
	217,68	800,58	689,18	−111,40	−111,35	−111,25
	289,56	800,58	679,54	−121,04	−120,97	−120,86
	430,80	800,58	675,17	−125,41	−125,33	−125,21
D.	433,06	801,30	926,27	+124,97	+124,89	+125,01
	109,06	801,30	869,69	+ 68,39	+ 68,37	+ 68,41
	143,50	801,30	888,91	+ 87,61	+ 87,58	+ 87,64
	217,12	801,30	912,31	+111,01	+110,96	+111,06
	286,92	801,30	922,00	+120,70	+120,63	+120,74

Die Werthe von x' in der vorletzten Columne sind aus den in der vorhergehenden Columne angegebenen Ablenkungen y nach der Formel $x' = y - \frac{y^3}{5075^2}$ berechnet, wodurch man mit hinreichender Genauigkeit $x' = 2R$ tang φ erhält, wenn die beobachtete Ablenkung $y = R$ tang 2φ ist. Nur bei den Beobachtungen mit der Kette *A*, wobei das Fernrohr verschoben war, geben die in der drittletzten Columne angeführten Ablenkungen nicht unmittelbar die Werthe von R tang 2φ, sondern dieselben müssen daraus auf folgende Weise berechnet werden. Theilt man den in dieser Columne angegebenen Werth der Ablenkung y' in zwei Theile, nämlich in den Theil y'', welcher von dem beim statischen Gleichgewichte beobachteten Skalentheil bis zum 800sten Skalentheil reicht, und in den Theil y''', welcher vom 800sten Skalentheil bis zu dem bei der Ablenkung beobachteten Skalentheil reicht, so erhält man

$$y = R \text{ tang } 2\varphi = \frac{y'}{1 - \frac{y'' y'''}{RR}},$$

woraus für $R = 2537{,}5$ der Werth von $x' = 2R$ tang φ leicht berechnet werden kann.

An den so berechneten Werthen von x' war nun endlich noch die am Schlusse des vorigen Artikels angegebene Correction anzubringen, wonach die in der letzten Columne angegebenen Werthe von $x = x' + \frac{x'x'}{127780}$ berechnet sind.

33.

Berechnung der Beobachtungen.

Die beschriebenen Beobachtungen sollen dazu dienen, das im vorigen Abschnitte entwickelte Gesetz der Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets daran zu prüfen. Nach Art. 24 wird die Schwingungsamplitude durch $\frac{i}{\mu\mathfrak{G}}$ ausgedrückt, wenn i das Intensitäts-Maximum der bei der elektrischen Schwingung statt findenden Strömungen bezeichnet. Da nun ferner nach Art. 30 die Strömungs-Intensität in jedem Augenblicke der Schwingung durch den Werth

$$-\frac{g_0}{w'}\sin\varrho_0\cos(\mu t+\varrho_0)$$

gegeben ist, also das Intensitäts-Maximum der bei den elektrischen Schwingungen statt findenden Strömungen

$$i=\frac{g_0}{w'}\sin\varrho_0\,,$$

worin $\operatorname{tang}\varrho_0=\frac{\pi accw'}{4\mu\int M''_0\,ds}$ war, so ergiebt sich, nach Art. 24, für die *Schwingungsamplitude* folgender Ausdruck:

$$\frac{i}{\mu\mathfrak{G}}=\frac{\pi accg_0}{\mu\mathfrak{G}\sqrt{(16\mu^2(\int M''_0\,ds)^2+\pi^2a^2c^4w'^2)}}\,.$$

Aus den Beobachtungen ergiebt sich aber nach Art. 24

$$i=\frac{1}{\pi a'}\cdot\sqrt{\frac{aS\operatorname{tang}v}{nn'}}\,,$$

worin v die beobachtete Ablenkung des Solenoids bezeichnet, folglich ist die Schwingungsamplitude

$$\frac{i}{\mu\mathfrak{G}}=\frac{1}{\pi a'\mu\mathfrak{G}}\cdot\sqrt{\frac{aS\operatorname{tang}v}{nn'}}=\frac{\pi accg_0}{\mu\mathfrak{G}\sqrt{(16\mu^2(\int M''_0\,ds)^2+\pi^2a^2c^4w'^2)}}\,.$$

Für den Zweck der Prüfung der aufgestellten Gesetze an den Beobachtungen ergiebt sich hieraus der in der letzten Columne der Beobachtungstafel im vorhergehenden Artikel mit $\pm x=2R\operatorname{tang}v$ bezeichnete Werth

$$\pm x=\frac{\pi^4aa'a'nn'c^4g_0g_0}{16\mu^2(\int M''_0\,ds)^2+\pi^2a^2c^4w'^2}\cdot\frac{2R}{S}\,.$$

Nun ist aber $\frac{\mu}{\pi}$ die in der Tafel mit m bezeichnete Schwingungszahl, und g_0 ist, nach den Gesetzen der magnetischen Induction, der Rotationsgeschwindigkeit proportional, oder es ist $g_0=mg'_0$, wenn g'_0 den Werth von g_0 für die Schwingungszahl $m=1$ bezeichnet; folglich ist

$$\pm x = \frac{\pi^2 a a' a' n n' c^4 g'_0 g'_0 \, mm}{16 \left(\int M''_0 \, ds\right)^2 . \, mm + a^2 c^4 w'^2} \cdot \frac{2R}{S} \;,$$

oder, wenn

$$C = \frac{\pi^2 a' a' n n' g'_0 g'_0}{a w' w'} \cdot \frac{2R}{S} \;, \qquad P = \frac{16 \left(\int M''_0 \, ds\right)^2}{a^2 c^4 w'^2}$$

gesetzt wird,

$$C - Px - \frac{x}{mm} = 0 \;,$$

worin C und P constante Werthe für alle Beobachtungen sind, welche mit derselben Kette, mit demselben rotirenden Maguet und mit demselben Dynamometer gemacht worden. Der Werth von x, von dessen Vorzeichen abgesehen wird, ist hiebei immer *positiv* zu nehmen.

Hienach ergeben sich aus den in der Tafel des vorigen Artikels enthaltenen Beobachtungen folgende Gleichungen zur Bestimmung der Constanten C und P für die Kette A:

$$\begin{aligned}
C - 1121{,}51\, P - \frac{1121{,}51}{288{,}80^2} &= 0 \\
C - 885{,}86\, P - \frac{885{,}86}{217{,}80^2} &= 0 \\
C - 529{,}08\, P - \frac{529{,}08}{141{,}77^2} &= 0 \\
C - 344{,}53\, P - \frac{344{,}53}{106{,}46^2} &= 0 \\
C - 1124{,}74\, P - \frac{1124{,}74}{289{,}88^2} &= 0 \\
C - 349{,}00\, P - \frac{349{,}00}{107{,}26^2} &= 0 \\
C - 524{,}90\, P - \frac{524{.}90}{140{,}46^2} &= 0 \\
C - 875{,}34\, P - \frac{875{,}34}{215{,}10^2} &= 0 \\
C - 1100{,}24\, P - \frac{1100{,}24}{281{,}68^2} &= 0
\end{aligned}$$

woraus die wahrscheinlichsten Werthe von C und P erhalten werden, nämlich:

$$C = 0{,}037978 \;, \qquad P = 0{,}000021865 \;.$$

Berechnet man auf gleiche Weise die Werthe von C und P für die Ketten B, C und D, so erhält man die in folgender Tafel zusammengestellten Resultate.

Kette	C	P
A	0,037978	0,000021865
B	0,022795	0,000047050
C	0,015174	0,000068093
D	0,011869	0,000087274

Berechnet man hiemit endlich die Werthe von x aus den gegebenen Werthen von m, so erhält man, nach den Werthen von m geordnet, folgende Vergleichung der berechneten Werthe von x mit den aus den Beobachtungen gefundenen.

A.				*B.*			
m	Beobachteter Werth von x	Berechneter Werth von x	Unterschied	m	Beobachteter Werth von x	Berechneter Werth von x	Unterschied
106,46	344,53	344,96	—0,43	106,76	169,01	169,12	—0,11
107,26	349,00	349,11	—0,11	106,84	168,81	169,28	—0,47
140,46	524,91	523,48	+1,43	142,74	237,40	237,13	+0,27
141,77	529,08	530,29	—1,21	144,15	239,94	239,51	+0,43
215,10	875,34	873,50	+1,84	216,80	334,67	333,63	+1,04
217,80	885,86	884,34	+1,52	217,90	335,72	334,68	+1,04
281,68	1100,24	1101,83	—1,59	288,04	384,59	385,69	—1,10
288,80	1121,51	1121,81	—0,30	290,26	385,78	386,89	—1,11
289,88	1124,74	1124,77	—0,03				
C.				*D.*			
107,12	97,46	97,74	—0,28	108,42	68,59	68,87	—0,28
108,60	99,01	99,25	—0,24	109,06	68,41	69,27	—0,86
143,68	130,37	130,21	+0,16	143,50	87,64	87,38	+0,26
144,32	131,13	130,69	+0,44	144,44	88,51	87,79	+0,72
214,80	170,92	169,04	+1,88	217,12	111,06	109,41	+1,65
219,78	171,24	170,89	+0,35	217,68	111,25	109,52	+1,73
286,90	187,94	189,10	—1,16	286,92	120,74	119,38	+1,36
289,62	188,54	189,64	—1,10	289,56	120,86	119,69	+1,17
				430,80	125,21	128,09	—2,88
				433,06	125,01	128,17	—3,16

Mit dieser ersten Prüfung lässt sich nun noch eine zweite verbinden. Nach dem aufgestellten Gesetze sollen nämlich die beiden Constanten C und P dem Quadrate des mittleren Widerstands der Längeneinheit des Leitungsdrahts w' umgekehrt proportional sein; doch sind die übrigen Grössen, von denen die Werthe dieser Constanten nach den angeführten Formeln:

$$C = \frac{\pi^2 a' a' n n' g'_0 g'_0}{a w' w'} \cdot \frac{2R}{S}, \qquad P = \frac{16 (\int M''_0 ds)^2}{a^2 c^2 w'^2}$$

abhängen, nicht für alle 4 Ketten, auf welche sich die im vorigen Artikel beschriebenen Beobachtungen beziehen, gleich, sondern die Grösse g'_0, von der die Constante C abhängt, und die Grösse $\int M''_0 ds$, von der die Constante P abhängt, haben für jede Kette einen besondern Werth. Bezeichnet man nun aber mit l die Länge des ganzen Leitungsdrahts, welche ebenfalls für die 4 Ketten verschiedene Werthe hat, und beachtet, dass $g'_0 \sin \mu t$ für die Zeit t die vom rotirenden Magnet bei derjenigen Geschwindigkeit, für die $m = 1$ ist, *im Mittel auf jede Längeneinheit des ganzen Leitungsdrahts* ausgeübte elektromotorische Kraft bezeichnet; so ergiebt sich, dass $lg'_0 \sin \mu t$ für die Zeit t die vom rotirenden Magnet bei derjenigen Geschwindigkeit, für die $m = 1$ ist, *auf den ganzen Leitungsdraht* ausgeübte elektromotorische Kraft bezeichnet. Da aber der rotirende Magnet bloss auf den allen 4 Ketten gemeinsamen Inductordraht inducirend wirkte, so ergiebt sich hieraus, dass lg'_0 für alle 4 Ketten gleichen Werth hat; folglich ergiebt sich aus der Formel

$$C = \frac{\pi^2 a' a' n n' g'_0 g'_0}{a w' w'} \cdot \frac{2R}{S} = \frac{\pi^2 a' a' n n' (lg'_0)^2}{a} \cdot \frac{2R}{S} \cdot \frac{1}{(lw')^2},$$

dass die Werthe der Constanten C für diese 4 Ketten den Quadraten der Widerstände dieser 4 Ketten umgekehrt proportional sein sollen: denn lw' bezeichnet den Widerstand der ganzen Kette, da w' der mittlere Widerstand der Längeneinheit war.

Um das aufgestellte Gesetz auch in dieser Beziehung zu prüfen, müssen zu den betrachteten Beobachtungen die im Anfange des vorigen Artikels angeführten Werthe der Widerstände jener 4 Ketten hinzugezogen werden, von denen jedoch zu bemerken, dass ihre Bestimmung nicht als Hauptzweck der damaligen Beobachtungen betrachtet wurde, sondern ohne Anspruch auf besondere Genauigkeit (sie beruhete zum Theil auf blosser Vergleichung nach Drahtlängen) nur als kurze Beschreibung zur Unterscheidung der 4 Ketten von einander dienen sollte.

Wir benutzen jedoch auch diese Bestimmungen zur Prüfung des aufgestellten Gesetzes, weil sie, wie alle andern angeführten Beobachtungen, schon vor mehreren Jahren, ohne alle Rücksicht auf die hier entwickelten Gesetze, gemacht worden sind.

Es verhalten sich aber, wie im Anfang des vorigen Artikels angegeben worden ist, die Widerstände der 4 Ketten, jener Bestimmung gemäss, ungefähr wie

$$31{,}79 : 41 : 50 : 58 ,$$

während dieselben Verhältnisse, dem aufgestellten Gesetze gemäss, durch Division der Zahl 6,2158 durch $\sqrt{C}$, wie

$$31{,}89 : 41{,}17 : 50{,}46 : 57{,}06$$

erhalten werden, was mit den obigen Beobachtungs-Resultaten, wie man sieht, ganz wohl übereinstimmt.

34.

Zweite Reihe.

Die folgende von Kohlrausch und mir gleichfalls gemeinschaftlich am 18. und 22. April 1857 ausgeführte Beobachtungsreihe ist im Wesentlichen eine Wiederholung der vorhergehenden, jedoch mit dem Unterschiede, dass bei der vorigen Reihe stets der ganze Leitungsdraht aus einfach aufgewickelten Drahtrollen bestand, während bei der folgenden zwar für die Kette A dasselbe galt, eine andere Kette aber durch Einschaltung eines *Doppeldrahts E* in die Kette A gebildet wurde. Dieser *Doppeldraht E* war aus zwei sehr feinen mit Seide übersponnenen und dadurch von einander isolirten Kupferdrähten zusammengesetzt, die aber durch eine nochmalige gemeinschaftliche Ueberspinnung fest zusammengehalten wurden, in Uebereinstimmung mit der Art. 26 zur Verminderung der von wechselseitiger Induction herrührenden Dämpfung elektrischer Schwingungen gegebenen Vorschrift, welche dadurch erprobt werden sollte. — Zur Verminderung dieser Dämpfung trug ausserdem noch der Umstand etwas bei, dass der Doppeldraht E, statt auf einer Rolle aufgewickelt zu werden, auf einem besonderen Statife so aufgespannt wurde, dass alle Windungen wenigstens 20 Millimeter weit von einander abstanden.

Nach Art. 32 hatte die Kette A eine Länge von etwa 4300 Meter mit einem Widerstande nach absolutem Maasse $= 3179 . 10^{10}$. Der

Doppeldraht E hatte 1412 Meter Länge (die Länge des einfachen Drahts war also 2824 Meter) mit einem Widerstande $= 4292 \, . \, 10^{10}$.

Von der Aufstellung der Skale und des Ablesungsfernrohrs galt ganz dasselbe, was Art. 32 für die vorhergehende Beobachtungsreihe bemerkt worden. — Für jede Kette sind zwei Beobachtungsreihen, die erste am 18., die zweite am 22. April gemacht worden

Kette	Schwingungszahl m	Statische Gleichgewichtslage	Abgelenkter Stand	Ablenkung in Skalentheilen y	x'	x
$A+E$	107,22	801,98	728,42	− 73,56	− 73,54	− 73,50
	139,66	801,98	681,37	− 120,61	− 120,54	− 120,40
	214,10	801,98	542,95	− 259,03	− 258,36	− 257,84
	279,44	801,98	402,21	− 399,77	− 397,29	− 396,06
	108,02	801,98	876,36	+ 74,38	+ 74,36	+ 74,40
	141,82	801,98	926,06	+ 124,08	+ 124,01	+ 124,13
	213,76	801,98	1059,59	+ 257,61	+ 256,95	+ 257,47
	282,80	801,98	1206,57	+ 404,59	+ 402,03	+ 403,29
A	280,58	389,64	1468,13	+1078,49	+1075,80	+1084,86
	214,12	425,42	1281,09	+ 855,67	+ 855,32	+ 861,05
	142,58	425,42	954,80	+ 529,38	+ 528,38	+ 530,56
	141,66	425,42	948,80	+ 523,38	+ 522,36	+ 524,50
	103,36	425,42	762,90	+ 337,48	+ 335,26	+ 336,14
	283,60	1193,13	86,44	−1106,69	−1102,50	−1092,99
	215,16	1193,13	323,28	− 869,85	− 869,06	− 863,15
	139,82	1193,13	676,38	− 516,75	− 515,29	− 513,21
	110,53	1193,13	827,49	− 365,64	− 363,10	− 362,07
$A+E$	106,10	801,52	730,24	− 71,28	− 71,26	− 71,22
	142,88	801,52	676,72	− 124,80	− 124,73	− 124,61
	214,80	801,52	543,31	− 258,21	− 257,55	− 257,03
	279,92	801,52	404,02	− 397,50	− 395,05	− 393,83
	107,43	801,43	873,91	+ 72,48	+ 72,46	+ 72,50
	141,94	801,43	924,38	+ 122,95	+ 122,88	+ 123,00
	215,64	801,43	1060,12	+ 258,69	+ 258,03	+ 258,55
	279,30	801,43	1194,00	+ 392,57	+ 390,22	+ 391,41

Kette	Schwingungszahl m	Statische Gleichgewichtslage	Abgelenkter Stand	Ablenkung in Skalentheilen y	x'	x
A	282,02	384,83	1465,47	+1080,64	+1077,20	+1086,28
	217,17	385,13	1249,53	+ 864,40	+ 864,14	+ 869,98
	139,59	385,13	893,92	+ 508,79	+ 506,73	+ 508,74
	107,15	385,13	728,92	+ 343,79	+ 340,65	+ 341,56
	281,96	1202,32	106,96	—1095,36	—1090,85	—1081,54
	217,14	1202,30	329,47	— 872,83	— 872,43	— 866,48
	144,32	1202,30	664,30	— 538,00	— 536,49	— 534,24
	139,56	1202,30	690,03	— 512,27	— 510,54	— 508,50
	106,64	1202,30	860,67	— 341,63	— 340,30	— 339,39

Von der Berechnung der Werthe von x in dieser Tafel gilt dasselbe, was zur vorhergehenden Tafel darüber gesagt ist.

Aus den zusammengehörigen Werthen von m und x in dieser Tafel lassen sich nun die wahrscheinlichsten Werthe der Constanten C und P für die Ketten A und $A+E$ ebenso berechnen, wie Art. 33 aus den Werthen Art. 32 für die Ketten A, B, C, D. Auf diese Weise sind die in folgender Tafel enthaltenen Resultate erhalten worden.

Kette	C	P
$A+E$	0,006672	0,000004041
A	0,03763	0,00002196
$A+E$	0,006610	0,000004083
A	0,03714	0,00002163

Berechnet man hiemit endlich die Werthe von x aus den gegebenen Werthen von m, so erhält man, nach den Werthen von m geordnet, folgende Vergleichung der berechneten Werthe von x mit den aus den Beobachtungen gefundenen.

A + E.				A.			
m	Beobachteter Werth von x	Berechneter Werth von x	Unterschied	m	Beobachteter Werth von x	Berechneter Werth von x	Unterschied
107,22	73,50	73,29	+0,21	103,36	336,14	335,82	+0,32
108,02	74,40	74,34	+0,06	110,53	362,07	362,41	−0,34
139,66	120,40	120,63	−0,23	139,82	513,21	514,68	−1,47
141,82	124,13	124,10	+0,03	141,66	524,50	524,09	+0,41
213,76	257,47	257,34	+0,13	142,58	530,56	528,81	+1,75
214,10	257,84	258,04	−0,20	214,12	861,05	859,37	+1,68
279,44	396,06	396,02	+0,04	215,16	863,15	863,68	−0,53
282,80	403,29	402,55	+0,74	280,58	1084,86	1085,42	−0,56
				283,60	1092,99	1093,70	−0,71
A + E.				A.			
106,10	72,22	71,14	+0,08	106,64	339,39	338,98	+0,41
107,43	72,50	72,85	−0,35	107,15	341,56	341,58	−0,02
141,94	123,00	123,04	−0,04	139,56	508,50	508,97	−0,47
142,88	124,61	124,56	+0,05	139,59	508,74	509,12	−0,38
214,80	257,03	256,62	+0,41	144,32	534,24	533,30	+0,94
215,64	258,55	258,32	+0,23	217,14	866,48	866,96	−0,48
279,30	391,41	391,07	+0,34	217,17	869,98	867,08	+2,90
279,92	393,83	392,37	+1,46	281,96	1081,54	1085,70	−4,16
				282,02	1086,28	1085,85	+0,43

Es verhalten sich endlich, wie im Anfang dieses Artikels angegeben worden, die Widerstände der beiden Ketten $A + E$ und A zu einander, der Beobachtung nach, ungefähr wie

7471 : 3179 ,

während dieses Verhältniss, dem im vorigen Artikel angegebenen Gesetze gemäss, welches hier auf gleiche Weise Anwendung findet, dass nämlich die Werthe der Constanten C für die beiden Ketten den Quadraten der Widerstände dieser Ketten umgekehrt proportional sein sollen, durch Division der Zahl 611,75 durch $\sqrt{C}$, wie

7507 : 3164

erhalten wird, was mit dem aus den Beobachtungen gefundenen Verhältnisse so weit übereinstimmt, als die geringe Genauigkeit der Widerstandsmessung zu erwarten berechtigt.

35.

Verhältniss der elektrostatischen Kraft zweier gleichen Elektricitätsmengen zu ihrer Masse.

Es bleibt endlich noch der dritte nach Art. 23 für genauere Beobachtungen geeignete Gegenstand zu betrachten übrig, nämlich *die Abhängigkeit der Amplituden der von einem rotirenden Magnet in einem geschlossenen Leiter hervorgebrachten Schwingungen von der Gestalt des Leitungsdrahts*. Genaue Beobachtungen hierüber können nicht bloss zur Prüfung der aufgestellten Gesetze dienen, sondern können, wie Art. 23 schon angeführt worden, ausserdem noch zu einer wesentlichen Erweiterung unserer Kenntniss von der Elektricität benutzt werden, nämlich zur Bestimmung des noch unbekannten *Verhältnisses der aus elektrostatischer Wechselwirkung gleicher Elektricitätsmengen herrührenden Kraft zu deren Masse.*

Bezeichnet man die in der Längeneinheit des Leitungsdrahts enthaltene positive Elektricitätsmenge nach elektrostatischem Maasse mit $\mathfrak{E}$, so ist die von ihr auf eine gleiche Elektricitätsmenge in der Einheit der Entfernung ausgeübte elektrostatische Kraft $= \mathfrak{E}\mathfrak{E}$, während ihre Masse durch $\frac{1}{r}\mathfrak{E}$ ausgedrückt worden ist, woraus das unbekannte Verhältniss jener Kraft zu dieser Masse $\mathfrak{E}\mathfrak{E} : \frac{1}{r}\mathfrak{E} = r\mathfrak{E} : 1$ folgt. Hat nun überhaupt dieses Verhältniss, oder die unbekannte Grösse $r\mathfrak{E}$, einen mit andern bestimmten Grössen vergleichbaren Werth, so lässt sich leicht zeigen, dass dieser Werth aus Beobachtungen der *Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Gestalt der Kette* am genauesten bestimmt werden könne.

Aus den Art. 8 und 10 aufgestellten Differentialgleichungen elektrischer Bewegung in geschlossenen Leitern ersieht man, dass darin die Grösse $r\mathfrak{E}$ nur im Ausdrucke $\frac{4M''(1+\lambda)}{cc} = \frac{4M''}{cc} + \frac{1}{r\mathfrak{E}}$ enthalten ist. Es hängen aber von diesem in den Differentialgleichungen enthaltenen Ausdrucke keinesweges alle aus den Differentialgleichungen bestimmbaren Wirkungen ab; denn zur Bestimmung mancher Wirkungen lassen sich die Differentialgleichungen so vereinfachen, dass jener Ausdruck ganz daraus verschwindet. Es gilt dies, wie Artt. 11, 12 gezeigt worden, von allen Wirkungen beim Gleichgewicht oder bei Erhaltung schon vorhandener Bewegungen, woraus umgekehrt folgt, dass Beobachtun-

gen von Gleichgewichtswirkungen oder von Wirkungen beharrlicher Ströme in keiner Weise zur Bestimmung der Grösse $r\mathfrak{E}$ dienen können.

Zu den anderen Wirkungen dagegen, bei deren Bestimmung jener die Grösse $r\mathfrak{E}$ enthaltende Ausdruck aus den Differentialgleichungen nicht verschwindet, gehören die durch Induction eines rotirenden Magnets in einem geschlossenen Leitungsdrahte hervorgebrachten *elektrischen Schwingungen,* deren Gesetze Art. 20 aus jenen Differentialgleichungen entwickelt worden sind, wonach nämlich die Strömungsintensität bei einer solchen Schwingung im Leitungsdrahte

$$i = -\frac{1}{w'}\sqrt{(ff + gg)} \cdot \cos\left(\mu t + \operatorname{arc\,tg}\frac{f}{g}\right)$$

erhalten wurde, wenn

$$f = \Sigma \sin\varrho^2 \left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right)$$

$$g = \Sigma \sin\varrho \cos\varrho \left(f_n \sin\frac{ns}{a} + g_n \cos\frac{ns}{a}\right)$$

$$\operatorname{tg}\varrho = \frac{\mu a^2 c^2 w'}{4\,(2\mu^2 a^2 M''\,(1+\lambda) - (n^2 c^2 N''))} = \frac{\mu a^2 w'}{2\mu^2 a^2\left(\frac{4M''}{cc} + \frac{1}{r\mathfrak{E}}\right) - 4n^2 N'}$$

war. Nach Art. 21 vereinfacht sich diese Bestimmung für die Strömungsintensität i in den meisten Fällen, nämlich in allen denjenigen Fällen, in welchen alle übrigen Glieder als verschwindend betrachtet werden dürfen gegen dasjenige, welches der Stellenzahl $n = 0$ entspricht. Man erhält nämlich für diese Fälle

$$i = -\frac{g_0}{\sqrt{\left(w'w' + 4\mu^2\left(\frac{4M''_0}{cc} + \frac{1}{r\mathfrak{E}}\right)^2\right)}} \cdot \cos\left(\mu t + \operatorname{arc\,tg}\frac{w'}{2\mu\left(\frac{4M''_0}{cc} + \frac{1}{r\mathfrak{E}}\right)}\right),$$

worin nach Art. 10 $M''_0 = 2\log\frac{8a}{\alpha}$ zu setzen ist. Es geht hieraus hervor, dass die Grösse $r\mathfrak{E}$ durch Messung der Strömungsintensität i bei gegebener Rotationsgeschwindigkeit des Magnets, nämlich von $\frac{\mu}{2\pi}$ Umdrehungen in der Secunde, und bei gegebener Länge $= 2\pi a$, Dicke $= 2\alpha$ und bei gegebenem Widerstande $= 2\pi a w'$ des Leitungsdrahts, da auch der der Rotationsgeschwindigkeit proportionale Inductionscoefficient g_0 aus der Stärke des inducirenden Magnets und aus seiner Entfernung und Lage zum inducirten Leitungsdrahte bestimmt werden kann, sich ermitteln lassen würde.

Hienach würde es also möglich sein, *ohne die Abhängigkeit der Amplitude elektrischer Schwingungen von der Gestalt des Leitungsdrahts in*

Betracht zu ziehen, die Grösse $r\mathfrak{C}$ *direct* zu bestimmen; jedoch sieht man leicht, dass dieser directe Weg praktisch zu keinem genauen Resultate führen kann, wenn die Grösse $\frac{1}{r\mathfrak{C}}$ ein sehr kleiner Bruch von der Grösse $\frac{4M''_0}{cc}$ ist, zumal wenn man beachtet, dass M''_0 und c in ihrer Bestimmung keiner sehr grossen Genauigkeit fähig sind. Zieht man dagegen die Abhängigkeit der Amplitude der elektrischen Schwingungen von der Gestalt des Leitungsdrahts mit in Betracht, so lässt sich die Grösse $r\mathfrak{C}$ auf folgendem *indirecten* Wege viel genauer bestimmen.

Um die Beobachtung der Abhängigkeit der Amplitude elektrischer Schwingungen von der Gestalt des Leitungsdrahts zu einer genaueren Bestimmung der Grösse $r\mathfrak{C}$ zu benutzen, kommt es wesentlich darauf an, eine Methode zu finden, einem geschlossenen Leitungsdrahte *zwei verschiedene Gestalten* zu geben, für welche entweder die beiden Werthe von M''_0 selbst, oder doch ihr Verhältniss $\nu:1$ einer genauen Bestimmung fähig wäre.

Es kommt dabei in Betracht, dass die Entwickelung der Bewegungsgesetze der Elektricität im ersten Theile dieser Abhandlung *auf kreisförmige Leiter* hat beschränkt werden müssen, für welche eine wesentliche Vereinfachung dadurch gewonnen wurde, dass die Werthe der mit M, N, M'', N'' bezeichneten bestimmten Integrale für alle Punkte der Leitercurve gleich waren. Letzteres gilt nun aber auch für ein System von zwei gleichen und parallelen Kreisen, was nur darum, weil es zwei getrennte Leitercurven bildet, nicht in Betracht gezogen werden konnte. Für praktische Zwecke bei der Ausführung der Beobachtungen aber lässt sich ein solches System für einen geschlossenen Leiter von zwei Umwindungen fast in allen Betrachtungen substituiren, und es lassen sich daher die Werthe der bestimmten Integrale M, N, M'', N'' für einen geschlossenen Leiter, welcher zwei gleiche, sehr nahe kreisförmige, Umwindungen bildet, dieser Substitution gemäss, für alle Punkte des Leiters gleich setzen, wodurch es möglich wird, die zunächst nur für einen kreisförmigen Leiter aufgestellten Bewegungsgesetze der Elektricität auf einen geschlossenen Leiter, welcher zwei gleiche, sehr nahe kreisförmige Umwindungen bildet, auszudehnen.

Es ergiebt sich aber für einen solchen Leiter, wie man leicht sieht, eine sehr wesentliche *Alternative* nach Verschiedenheit der Verbindung seiner beiden Umwindungen mit einander, die *entweder* so beschaffen

sein kann, dass beide Umwindungen von demselben Strome nach einander in gleichem Sinne durchlaufen werden, *oder* so, dass die zweite Umwindung im entgegengesetzten Sinne wie die erste durchlaufen wird. Diesen beiden Fällen entsprechen ganz verschiedene Werthe von M, N, M'', N'', deren Verhältniss zu einander genau bestimmt werden kann. Es gilt dies namentlich auch von dem mit M''_0 bezeichneten Werthe der Grösse M'', wenn $n = 0$ ist, und das Verhältniss der beiden Werthe von M''_0 in den beiden angegebenen Fällen werde $= \nu : 1$ gesetzt.

Wird nun die grösste Strömungsintensität bei einer elektrischen Schwingung in diesem Leiter im *ersten* Falle mit A, im *zweiten* mit B bezeichnet, so ist nach Art. 23

$$A = \frac{g_0}{\sqrt{\left(w'w' + 4\mu\mu\left(\frac{4M''_0}{cc} + \frac{1}{r\mathfrak{C}}\right)^2\right)}}$$

$$B = \frac{g_0}{\sqrt{\left(w'w' + \mu\mu\left(\frac{4M''_0}{\nu cc} + \frac{1}{r\mathfrak{C}}\right)^2\right)}},$$

und *beide Werthe A und B können durch Messung bestimmt werden;* doch ist hiebei vorausgesetzt, dass die Induction des rotirenden Magnets sich nicht auf beide Umwindungen des geschlossenen Leiters erstrecke, sondern dass dieselbe auf eine von den beiden Umwindungen, oder nur auf ein Element derselben, beschränkt sei. In der Wirklichkeit tritt an die Stelle dieses Elements der kleine den rotirenden Magnet umschliessende *Inductor*.

Diese Werthe von A und B können nun aber durch Messung für verschiedene Rotationsgeschwindigkeiten, d. i. für verschiedene Werthe von μ, bestimmt werden, und es leuchtet ein, dass ihr Unterschied bei abnehmenden Werthen von μ bald ganz verschwinden muss. Es bezeichne nun μ_0 einen bestimmten kleinen Werth von μ, für welchen jener Unterschied ganz unmerklich sei. Werden nun die alsdann als gleich zu betrachtenden Werthe von A und B mit C bezeichnet; so erhält man, da der mit g_0 bezeichnete Inductionscoefficient der Rotationsgeschwindigkeit proportional ist,

$$C = \frac{\mu_0}{\mu} \cdot \frac{g_0}{w'}.$$

Auch dieser dritte Werth C kann durch Messung bestimmt werden.

Wird nun aus den drei gefundenen Gleichungen, in denen A, B, C durch Messung bekannt sind, g_0 eliminirt, so erhält man folgende beiden Gleichungen:

$$\frac{4M''_0}{cc} + \frac{1}{r\mathfrak{E}} = \frac{w'}{2\mu} \sqrt{\left(\frac{\mu\mu}{\mu_0\mu_0} \cdot \frac{CC}{AA} - 1\right)}$$

$$\frac{4M'_0}{\nu cc} + \frac{1}{r\mathfrak{E}} = \frac{w'}{2\mu} \sqrt{\left(\frac{\mu\mu}{\mu_0\mu_0} \cdot \frac{CC}{BB} - 1\right)},$$

und hieraus folgt:

$$\frac{4M''_0}{cc} = \frac{\nu}{\nu-1} \cdot \frac{w'}{2\mu} \left\{ \sqrt{\left(\frac{\mu\mu}{\mu_0\mu_0} \cdot \frac{CC}{AA} - 1\right)} - \sqrt{\left(\frac{\mu\mu}{\mu_0\mu_0} \cdot \frac{CC}{BB} - 1\right)} \right\}$$

$$\frac{1}{r\mathfrak{E}} = \frac{1}{\nu-1} \cdot \frac{w'}{2\mu} \left\{ \nu \sqrt{\left(\frac{\mu\mu}{\mu_0\mu_0} \cdot \frac{CC}{BB} - 1\right)} - \sqrt{\left(\frac{\mu\mu}{\mu_0\mu_0} \cdot \frac{CC}{AA} - 1\right)} \right\}.$$

Die *erste* von diesen beiden Gleichungen, in welcher alle Grössen bekannt sind, kann zur Prüfung entweder der Theorie oder der Beobachtungen dienen, während aus der *zweiten* Gleichung die unbekannte Grösse $r\mathfrak{E}$ gefunden wird, wozu es nicht einmal einer genaueren Bestimmung der Grössen M''_0, g_0 und c, sondern nur des Verhältnisses $\nu : 1$ bedarf.

Die letztere von den beiden gefundenen Gleichungen lässt sich endlich noch in eine etwas einfachere Form bringen, wenn man beachtet, dass der Widerstand der Längeneinheit des Leitungsdrahtes $w' = \frac{1}{\pi\alpha\alpha x}$ ist, wo α der Halbmesser des Drahts und x das specifische Leitungsvermögen des Metalls ist, und dass ferner die in elektrostatischen Maasseinheiten ausgedrückte positive Elektricitätsmenge in der Längeneinheit des Leitungsdrahts $\mathfrak{E} = \pi\alpha\alpha \,.\, \mathfrak{E}_0$ ist, wo $\mathfrak{E}_0$ die in elektrostatischen Maasseinheiten ausgedrückte positive Elektricitätsmenge, welche *in der Volumeneinheit* des Leitungsdrahts enthalten ist, bezeichnet. Substituirt man diese Werthe, so erhält man:

$$\frac{1}{r\mathfrak{E}_0} = \frac{1}{2(\nu-1)\mu x} \cdot \left\{ \nu \sqrt{\left(\frac{\mu\mu}{\mu_0\mu_0} \cdot \frac{CC}{BB} - 1\right)} - \sqrt{\left(\frac{\mu\mu}{\mu_0\mu_0} \cdot \frac{CC}{AA} - 1\right)} \right\}.$$

Es bleibt hienach nur noch zu betrachten übrig, wie das durch $\nu : 1$ bezeichnete Verhältniss bestimmt werden könne.

Bezeichnet wie bisher $2\pi a$ die Länge des ganzen geschlossenen Leitungsdrahts, von welcher jede der beiden Hälften $= \pi a$ eine Umwindung bildet, und betrachtet man nun diese beiden Umwindungen wie zwei parallele Kreise, deren Mittelpunkte von einander, perpendikular gegen die Kreisebene, in der Entfernung $= \delta$ liegen; so lässt sich der Werth von M'_0 in irgend einem Punkte jenes ganzen Leitungsdrahts in zwei Theile zerlegen, nämlich in denjenigen Theil, welcher von dem Kreise herrührt, dem der betrachtete Punkt selbst angehört, und in denjenigen, welcher von dem andern Kreise herrührt, dessen Abstand von

ersterem $= \delta$ ist. Der *erstere* Theil wird unmittelbar dem Werthe von M''_0 für einen Kreis vom Halbmesser $= \frac{1}{2}a$ gleich gefunden, nämlich nach Art. 16 gleich dem doppelten Logarithmus des Verhältnisses des 8fachen Kreishalbmessers zum Drahthalbmesser, $= 2 \log \frac{4a}{\alpha}$. Der *letztere* Theil wird aus dem ersteren, wie leicht nachzuweisen, erhalten, durch blosse Substitution des Abstands der beiden Kreise δ für den Halbmesser α, nämlich $= 2 \log \frac{4a}{\delta}$. — Sind nun die beiden Umwindungen so mit einander verbunden, dass sie vom Strome in gleichem Sinne durchlaufen werden, so ist der Werth von M''_0 des ganzen geschlossenen Leiters in irgend einem Punkte seiner ersten oder zweiten Umwindung gleich der *Summe* dieser beiden Theile, $= 2 \log \frac{4a}{\alpha} + 2 \log \frac{4a}{\delta}$; sind dagegen die beiden Umwindungen so verbunden, dass die zweite in entgegengesetztem Sinne wie die erste durchlaufen wird, so ist der Werth von M''_0 gleich der *Differenz* der beiden Theile, $= 2 \log \frac{4a}{\alpha} - 2 \log \frac{4a}{\delta}$. Hieraus ergiebt sich das gesuchte Verhältniss

$$\nu : 1 = \left(2 \log \frac{4a}{\alpha} + 2 \log \frac{4a}{\delta}\right) : \left(2 \log \frac{4a}{\alpha} - 2 \log \frac{4a}{\delta}\right) = \left(\frac{2 \log \frac{4a}{\alpha}}{\log \frac{\delta}{\alpha}} - 1\right) : 1.$$

36.

Schluss.

Die im vorigen Artikel enthaltenen Erörterungen über die Bestimmung der Grösse $r\mathfrak{C}$ dienen vorzüglich dazu, um an einem speciellen Beispiele zu erläutern, dass *die Abhängigkeit der Amplitude der von einem rotirenden Magnet in einem geschlossenen Leiter hervorgebrachten Schwingungen von der Gestalt des Leitungsdrahts*, wie Art. 23 angeführt worden, einen dritten für genauere Beobachtung wichtigen und besonders geeigneten Gegenstand bietet, welcher wegen seines vielseitigen Interesses eine sorgfältigere und umfassendere Bearbeitung verdient. Soll die Ausführung *genauer Beobachtungen* über diesen Gegenstand von rechtem Nutzen sein, so leuchtet ein, dass damit *erstens* eine umfassendere Erörterung über die Abhängigkeit der Werthe der Art. 8 mit N, N'', M, M'' bezeichneten bestimmten Integrale von der Gestalt des Leitungsdrahts, welche in dieser Abhandlung, Art. 10, auf den einzelnen Fall, wo der Leitungsdraht ein Kreis war, beschränkt geblieben, *zwei-*

tens eine speciellere Erörterung über den Werth der Grösse $r\mathfrak{C}$, deren Bestimmung allein schon grosses Interesse für sich hat, worüber im vorhergehenden Artikel gehandelt worden, verbunden werden muss. Nun ist zwar im vorigen Artikel gezeigt worden, wie die Bestimmung dieser Grösse $r\mathfrak{C}$ aus Beobachtungen eines *speciellen Falls* der Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Gestalt des Leitungsdrahts möglich sei, ohne auf eine umfassendere Erörterung dieser Abhängigkeit im Allgemeinen einzugehen; doch werden, wie man leicht übersieht, auch zur Lösung der hiedurch wesentlich vereinfachten und beschränkten Aufgabe noch immer viele Arbeiten und Beobachtungen erfordert, zu denen die in dieser Abhandlung beschriebenen und benutzten Anstalten nicht genügen.

Da nun ausserdem auch die Bestimmung der Grösse $r\mathfrak{C}$ weniger die Prüfung der im ersten Abschnitte dieser Abhandlung entwickelten Gesetze, die der Zweck des zweiten Abschnitts war, als vielmehr eine neue Anwendung der Theorie mit eigenthümlichem und selbständigem Zwecke betreffen würde — die sich zum Gegenstand einer besonderen Abhandlung eignet —; so scheint es angemessen, die im zweiten Abschnitte dieser Abhandlung beabsichtigte *Ausführung von Beobachtungen* zur Prüfung der im ersten Abschnitte aufgestellten Gesetze auf die *schon mitgetheilten Beobachtungen über die beiden ersten* Art. 23 *angeführten Gegenstände* — Vergleichung der Amplituden und Phasen elektrischer Schwingungen an verschiedenen Stellen eines langen geschlossenen Leitungsdrahts — Gesetz der Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets — vor der Hand zu beschränken, und *die Ausführung aller genaueren Beobachtungen in Betreff des dritten Gegenstands* — nämlich des Gesetzes der Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Gestalt des Leitungsdrahts, nebst den nach Anleitung des vorhergehenden Artikels daran sich knüpfenden besonderen Fragen und Aufgaben — einer künftigen Abhandlung vorzubehalten, für welche es hier schliesslich nur darauf ankam, die in den Resultaten der vorliegenden Abhandlung enthaltenen Grundlagen im voraus zu entwickeln.

Inhalt.

Verbesserungen.

Seite 601 am Ende der Zeile 10 v. u. lies: $\cos\frac{n\sigma}{a}d\sigma$ statt: $\sin\frac{n\sigma}{a}d\sigma$.

» 603 Zeile 14 v. u. lies: Hälften statt: Hälfte.

» 609 » 12 v. u. lies: hat statt: haben.

» 614 » 2 v. o. lies: $2a\alpha M''(1+\lambda)$ statt: $2\alpha\alpha M''(1+\lambda)$.

» 656 » 10 v. o. lies: $\sin\lambda^2$ statt: $\sin\lambda$.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

ELEKTRODYNAMISCHE

MAASSBESTIMMUNGEN

INSBESONDERE

ÜBER DAS

PRINCIP DER ERHALTUNG DER ENERGIE

VON

WILHELM WEBER

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GES. DER WISSENSCHAFTEN.

Des X. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº I.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1871.

Vom Verfasser übergeben den 9. Januar 1871.
Der Abdruck vollendet den 25. Februar 1871.

ELEKTRODYNAMISCHE
MAASSBESTIMMUNGEN

INSBESONDERE

ÜBER DAS

PRINCIP DER ERHALTUNG DER ENERGIE

VON

WILHELM WEBER

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GES. DER WISSENSCHAFTEN.

Das Gesetz der elektrischen Wirkung, welches in der ersten Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen (Leipzig 1846) ausgesprochen worden, ist von verschiedenen Seiten geprüft und mehrfach abgeändert, auch zum Gegenstand allgemeinerer Betrachtungen und Speculationen gemacht worden, die noch keineswegs als abgeschlossen anzusehen sein dürften. Die folgende Abhandlung beschränkt sich im ersten Abschnitte auf eine Erörterung des Verhältnisses dieses Gesetzes zum Princip der Erhaltung der Energie, dessen grosse Wichtigkeit und Bedeutung besonders in der mechanischen Wärmetheorie hervorgetreten ist. Da behauptet worden war, dass jenes Gesetz mit diesem Principe im Widerspruch stände; so ist nachzuweisen versucht worden, dass kein solcher Widerspruch statt finde. Jenes Gesetz gestattet vielmehr, dem Principe der Erhaltung der Energie noch einen Zusatz beizufügen, und dasselbe so umzuformen, dass seine Anwendung auf jedes Paar von Theilchen keineswegs blos auf die Zeit beschränkt ist, wo ein solches Paar durch andere Körper weder Gewinn noch Verlust an lebendiger Kraft erleidet, sondern immer gilt, unabhängig von den mancherlei Beziehungen, in welche beide Theilchen zu andern Körpern treten können.

Ausserdem wird im zweiten Abschnitte noch eine Anwendung jenes Gesetzes auf die Entwickelung der Bewegungsgesetze zweier, blos ihrer Wechselwirkung überlassenen, elektrischen Theilchen gemacht. Führt diese Entwickelung direct auch zu keinen Vergleichungen und exacten Prüfungen mit vorhandener Erfahrung, was der Grund ist warum sie bisher wenig Beachtung gefunden; so führt sie doch zu manchen Resultaten, welche als Leitfaden bei Erforschung der Molecularverhältnisse und

Molecularbewegungen der Körper, die so grosse Bedeutung für Chemie und Wärmelehre gewonnen, wichtig erscheinen, und interessante Beziehungen in diesen noch dunkeln Gebieten der weiteren Forschung darbieten.

Ueber das Verhältniss der elektrischen Gesetze zu dem Princip der Erhaltung der Energie.

1.

Elektrische Theilchen und elektrische Massen.

Man bezeichnet Theilchen des positiven und des negativen elektrischen Fluidums mit denselben Buchstaben, z. B. mit e oder e' u. s. w., legt aber e oder e' ... einen positiven oder negativen Werth bei, jenachdem das Theilchen dem positiven oder negativen Fluidum angehört.

Wird die messbare Abstossungskraft des ersten Theilchens e auf ein ganz gleiches Theilchen e bei der messbaren und beharrlichen Entfernung r mit f bezeichnet, ferner die messbare Abstossungskraft des zweiten Theilchens e' auf ein ganz gleiches Theilchen e' bei derselben Entfernung r mit f'; so wird $\pm r\sqrt{f}$ als Grössenwerth von e, und $\pm r\sqrt{f'}$ als Grössenwerth von e' genommen, wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, jenachdem das Theilchen dem positiven oder negativen Fluidum angehört. — Der Messung der Kräfte f, f' wird dabei das in der Mechanik festgesetzte Kräftemaass zum Grunde gelegt, nämlich diejenige Kraft, welche wenn sie auf die in der Mechanik festgesetzte Masseneinheit (Milligramm) wirkt, dieser Masseneinheit in der Zeiteinheit die Einheit der Geschwindigkeit ertheilt. — Die Abstossungskraft der beiden Theilchen e, e', während ihre Entfernung r unverändert bleibt, ist dann, dem elektrostatischen Gesetze gemäss,

$$= \frac{ee'}{rr}.$$

Ein negativer Werth dieses Ausdrucks bedeutet Anziehungskraft.

Bei dieser Bezeichnungsweise der Theilchen der elektrischen Fluida haben nun e, e' nicht die Bedeutung von Massen, im Sinne der Mechanik, wie man schon daraus ersieht, dass e, e' bald positive, bald negative Werthe haben können; doch stehen die Werthe von e, e' mit den Massen der Theilchen in naher Beziehung. Bezeichnet man nämlich die Massen der Theilchen e, e' (im Sinne der Mechanik, wonach die Masseneinheit [Milligramm] durch die Masse eines ponderabelen Körpers gegeben ist, und verschiedene Massen untereinander verglichen werden nach Proportion der reciproken Beschleunigungen, die ihnen von gleicher Kraft ertheilt werden) mit ε, ε', die stets positive Werthe haben; so ergiebt sich für positive Werthe von e, e'

$$\frac{e}{\varepsilon} = \frac{e'}{\varepsilon'} = a,$$

für negative Werthe von e, e'

$$\frac{e}{\varepsilon} = \frac{e'}{\varepsilon'} = b,$$

wo a einen bestimmten positiven, b einen bestimmten negativen Werth hat. Ob hierin $aa = bb$ sei, oder in welchem Verhältnisse aa zu bb stehe, ist bisher ebensowenig ermittelt worden, wie der Zahlwerth von a oder b selbst. — In vielen Fällen ist die elektrische Masse ε an eine ponderabele Masse m so gebunden, dass sie ohne dieselbe gar nicht bewegt werden kann, wo dann nur die Gesammtmasse $m + \varepsilon$ in Betracht kommt und ε gewöhnlich im Vergleich mit m als verschwindend betrachtet werden kann. Es kommen daher die Massen ε, ε' nur selten in Betracht.

Man unterscheidet nicht immer auf die angegebene Weise zwischen den Theilchen e, e' und ihren Massen ε, ε', sondern gebraucht oft die Zeichen der Theilchen e, e' auch für die Massen, wobei jedoch zu bemerken, dass dann von den Vorzeichen von e, e' abgesehen werden muss. Die Weglassung der Faktoren a und b, welche unbekannt sind, ist immer gestattet, wenn es sich nur um relative Werthbestimmungen von Massen der positiven oder der negativen Elektricität handelt.

2.

Das Gesetz der elektrischen Kraft.

Das Gesetz der elektrischen Kraft ist in den »Elektrodynamischen Maassbestimmungen«. Leipzig 1846, S. 119 auf folgende Weise ausgesprochen worden:

> Bezeichnet man zwei elektrische Theilchen mit e und e'; so wird die von beiden Theilchen aus der Entfernung r auf einander ausgeübte abstossende Kraft dargestellt durch
>
> $$\frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{cc}\frac{ddr}{dt^2}\right),$$

wo c dieselbe Constante ist, welche a. a. O. mit $\frac{4}{a}$ bezeichnet worden ist.

Dieser Ausdruck für die Kraft, welche die Theilchen e und e' wechselseitig auf einander ausüben, ist aber, wie man leicht übersieht, von einer Grösse abhängig, welche die zu bestimmende Kraft selbst als Faktor enthält. Man erkennt dies leicht, wenn man die relative Beschleunigung der beiden Theilchen, nämlich $\frac{ddr}{dt^2}$, in zwei Theile zerlegt,

$$\frac{ddr}{dt^2} = \frac{ddr'}{dt^2} + \frac{ddr''}{dt^2},$$

wovon der erstere Theil $\frac{ddr'}{dt^2}$ diejenige relative Beschleunigung ist, welche von der Wechselwirkung beider Theilchen, der letztere Theil $\frac{ddr''}{dt^2}$ dagegen derjenige Theil, welcher von anderen Ursachen (nämlich von der vorhandenen auf r senkrechten Bewegung der Theilchen, und von den Wechselwirkungen, in denen sie mit andern Körpern stehen) herrührt. Der erstere Theil nun, welcher von der Wechselwirkung beider Theilchen herrührt, ist der von dieser Wechselwirkung herrührenden Kraft proportional und wird durch den Quotienten dieser Kraft und der Masse, auf welche sie wirkt, dargestellt.

Hieraus ergiebt sich, wie a. a. O. Seite 168 gezeigt worden, leicht ein anderer Ausdruck für die Kraft, die die Theilchen e und e' wechselseitig auf einander ausüben, welcher nur Grössen enthält,

die von der zu bestimmenden Kraft unabhängig sind, nämlich der Ausdruck

$$\frac{ee'}{rr - \frac{2r}{cc}(e+e')}\left(1 - \frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2rf}{cc}\right),$$

wo $f = \frac{ddr''}{dt^2}$ gesetzt worden ist, oder, wenn man die elektrischen Theilchen e und e' von ihren Massen ε und ε' auf die im vorigen Artikel angegebene Weise unterscheidet (was a. a. O. nicht geschehen) der Ausdruck

$$\frac{ee'}{rr - \frac{2r}{cc}\cdot\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}\,ee'}\left(1 - \frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2rf}{cc}\right).$$

Es ergiebt sich hieraus nun, dass das Gesetz der elektrischen Kraft keineswegs so einfach ist, wie von einem Grundgesetz erwartet wird; dasselbe erscheint vielmehr in zwei Beziehungen besonders verwickelt.

Erstens nämlich geht aus diesem Ausdrucke der Kraft hervor, wie a. a. O. schon bemerkt worden, dass die Kraft, welche zwei elektrische Theilchen auf einander ausüben, nicht ausschliesslich von diesen Theilchen selbst, von ihrer Entfernung und relativen Geschwindigkeit, sondern auch von dem mit f bezeichneten Theile ihrer relativen Beschleunigung abhängt, der zum Theil von andern Körpern herrührt. Auch ist bemerkt worden, da die von zwei Körpern auf einander ausgeübten Kräfte, wenn sie von der Gegenwart eines dritten Körpers abhängen, von Berzelius mit dem Namen katalytischer Kräfte bezeichnet worden sind, dass hienach die elektrischen Kräfte, allgemein betrachtet, katalytische Kräfte seien.

Zweitens ergiebt sich aus demselben Ausdruck der Kraft noch ein anderes merkwürdiges Resultat, dass nämlich, wenn die Theilchen e und e' gleichartig sind, dieselben keineswegs einander immer abstossen, sondern, wenn $\frac{dr^2}{dt^2} < cc + 2rf$ ist, nur so lange, als $r > \frac{2}{cc}\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}ee'$ ist, dass dagegen Anziehung eintritt, wenn $r < \frac{2}{cc}\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}ee'$.

Eine Ausnahme hiervon findet nur in dem Falle statt, wenn $\left(r - 2\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon}\frac{ee'}{cc}\right)$, was immer Faktor des Nenners ist, zugleich auch

Faktor des Zählers wird. Dieser Fall tritt ein, wenn die beiden elektrischen Theilchen in beharrlicher relativer Ruhe sich befinden, so dass $\frac{dr}{dt} = 0$ und $\frac{ddr}{dt^2} = 0$ ist.

Der obige allgemeine Ausdruck der Kraft geht nämlich, wenn $\frac{dr}{dt} = 0$ ist, über in

$$\frac{ee'}{r\left(r - 2\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{cc}\right)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{cc} f\right),$$

woraus durch Division mit der Masse $\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}$, derjenige Theil der Beschleunigung gefunden wird, welcher von der von beiden elektrischen Theilchen auf einander ausgeübten Kraft herrührt, nämlich

$$\frac{(\varepsilon + \varepsilon')\, ee'}{\varepsilon\varepsilon' r\left(r - 2\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{cc}\right)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{cc} f\right).$$

Fügt man hiezu den andern Theil der Beschleunigung, nämlich f, welcher aus der vorhandenen Bewegung der Theilchen senkrecht gegen r, und aus der Einwirkung anderer Körper sich ergiebt; so erhält man die ganze Beschleunigung, nämlich

$$\frac{ddr}{dt^2} = f + \frac{(\varepsilon + \varepsilon')\, ee'}{\varepsilon\varepsilon' r\left(r - 2\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon} \cdot \frac{ee'}{cc}\right)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{cc} f\right),$$

welche bei beharrlicher relativer Ruhe $= 0$ ist. Hieraus folgt, bei beharrlicher relativer Ruhe,

$$f = -\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{rr}.$$

Wird dieser Werth für f im Ausdrucke der Kraft

$$\frac{ee'}{r\left(r - 2\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{cc}\right)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{cc} f\right)$$

substituirt, so verwandelt sich letzterer in

$$\frac{ee'}{r\left(r - 2\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{cc}\right)} \cdot \frac{1}{r}\left(r - 2\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{cc}\right)$$

Man sieht also, dass im Falle beharrlicher relativer Ruhe der Faktor $\left(r - 2\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{cc}\right)$ dem Zähler und Nenner gemeinschaftlich ist. Der von diesem Faktor unabhängige Werth des Quotien-

ten, nämlich $\frac{ee'}{rr}$, giebt hienach für den Fall beharrlicher relativer Ruhe den Ausdruck der Kraft, in vollkommener Uebereinstimmung mit dem elektrostatischen Grundgesetze, wonach diese Kraft für gleichartige Theilchen bei allen Entfernungen einen positiven Werth behält.

3.

Das Gesetz des elektrischen Potentials.

Der vorhergehende Artikel beweist, dass das Gesetz der elektrischen Kraft in zwei Beziehungen von sehr zusammengesetzter Art ist, nämlich erstens in Beziehung darauf, dass die Abstossungskraft zweier elektrischen Theilchen abhängig ist von Dingen, die weder zum Wesen der Theilchen, welche die Kraft auf einander ausüben, noch zu ihrer gegenseitigen Lage im Raume, noch zu ihrer vorhandenen relativen Bewegung gehören, nämlich von andern Körpern; zweitens in Beziehung darauf, dass zwischen denselben Theilchen, zwischen welchen in einigen Entfernungen Abstossung, in andern Entfernungen Anziehung statt finde.

Im Vergleich mit diesem complicirten Gesetze der elektrischen Kraft ist das Gesetz des elektrischen Potentials viel einfacher.

Der Werth des Potentials V zweier elektrischen Theilchen e, e' ist nämlich, wie schon in Poggendorffs Annalen 1848. Bd. 73, S. 229 von mir ausgesprochen worden ist, durch folgendes Gesetz bestimmt, nämlich

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right).$$

Beachtet man nämlich, dass r sowohl wie $\frac{dr}{dt}$ für die beiden Theilchen e und e' zu verschiedenen Zeiten verschiedene Werthe haben, beide also Functionen der Zeit sind; so ergiebt sich daraus, dass $\frac{dr}{dt}$ auch als eine Function von r betrachtet werden dürfe, welche mit fr bezeichnet werden soll. Man erhält hiernach

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\cdot(fr)^2 - 1\right),$$

folglich durch Differentiation den Ausdruck der Kraft

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{ee'}{rr}\left(\frac{1}{cc}\cdot(fr)^2 - 1\right) + 2\frac{ee'}{rcc}\cdot fr\cdot\frac{dfr}{dr},$$

oder, wenn darin wieder $\frac{dr}{dt}$ für fr gesetzt wird,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{cc}\cdot\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\frac{dr}{dt}}{dr}\right),$$

wofür geschrieben werden kann

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{cc}\cdot\frac{ddr}{dt^2}\right).$$

Man sieht hieraus, dass

$$\frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right)$$

eine Function ist, deren Differentialquotient nach r die Abstossungskraft der beiden Theilchen e und e' darstellt, wenn r ihren Abstand und $\frac{dr}{dt}$ ihre relative Geschwindigkeit, als Functionen der Zeit betrachtet, bezeichnen. Da nun $\frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right) = 0$ wird, wenn e und e' sich unendlich weit von einander entfernen; so ist $\frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right)$ das Potential der elektrischen Theilchen e und e', d. h. die Arbeit, welche verrichtet wird, wenn die beiden Theilchen, unter Einwirkung ihrer Abstossungskraft, aus unendlicher Entfernung bis zur Entfernung r genähert, hier mit der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ anlangen. *)

Es geht daraus zugleich hervor, dass die Arbeit, welche bei der Ueberführung eines Systems von Theilchen e, e', aus einer gewissen Lage und einem gewissen Bewegungszustande, in eine andere Lage und in einen andern Bewegungszustand verrichtet wird, nur von der Lage und Bewegung am Anfang und am Ende abhängig ist, dage-

*) Von diesem Gesetze des elektrischen Potentials ist auch Beer in der Einleitung in die Elektrodynamik ausgegangen. Siehe »Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik von August Beer. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von Julius Plücker.« Braunschweig 1865. S. 250. — Das Gesetz des Potentials als Grundgesetz an die Spitze zu stellen und das Gesetz der Kraft daraus abzuleiten dürfte kein Bedenken finden. In manchen Beziehungen lässt sich von der physischen Existenz der durch das Potential ausgedrückten Arbeit mit mehr Recht sprechen, als von der physischen Existenz einer Kraft, von der man nur sagen kann, dass sie physische Verhältnisse der Körper zu ändern sucht.

gen unabhängig von dem Wege, auf welchem die Ueberführung erfolgt ist, und unabhängig von den Bewegungszuständen, welche auf diesem Wege statt gefunden haben.

4.

Elektrische Grundgesetze.

Das Gesetz des elektrischen Potentials scheint zwar seiner Einfachheit nach den wahren elektrischen Grundgesetzen weit näher zu stehen, als das viel complicirtere Gesetz der elektrischen Kraft; jedoch lässt sich auch der Ausspruch jenes Gesetzes noch auflösen in zwei einfachere Gesetze, welche auf folgende Weise ausgesprochen werden können.

Erstes Gesetz. Wenn zwei Theilchen e und e' in zwei Entfernungen r und ϱ in relativer Ruhe oder in gleicher relativer Bewegung sich befinden; so verhalten sich die Arbeiten V und U, welche verrichtet werden, wenn beide Theilchen unter wechselseitiger Einwirkung aus diesen beiden Entfernungen in unendliche Entfernung gebracht werden, umgekehrt wie diese beiden Entfernungen, d. i.

$$V : U = \varrho : r \tag{1}$$

Zweites Gesetz. Die Arbeit U, die unter Einwirkung der Kraft, welche die Theilchen e und e' auf einander ausüben, verrichtet wird, wenn diese Theilchen aus einer bestimmten mit der Grösse ee' proportionalen Entfernung, $\varrho = \frac{ee'}{a}$, in unendliche Entfernung gebracht werden, bildet zusammen mit der lebendigen Kraft x, welche den Theilchen in Folge ihrer relativen Bewegung bei der Entfernung ϱ zukam, eine constante Summe, nämlich a, d. i.

$$U + x = a\,. \tag{2}$$

Aus Gleichung (1) folgt nämlich

$$U = \frac{r}{\varrho}\,V\,,$$

und hiemit folgt aus Gleichung (2)

$$\frac{r}{\varrho}\,V + x = a\,,$$

oder, da $\varrho = \frac{ee'}{a}$ war,

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Die relative lebendige Kraft x ist nun aber dem Quadrate der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ proportional, wonach man für a eine neue Constante cc einführen kann, indem man nämlich

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{cc} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} \ *)$$

---

*) Bezeichnen ε und ε' die Massen der Theilchen e und e' und α, β die Geschwindigkeiten von ε in der Richtung r und senkrecht darauf, α', β' dieselben Geschwindigkeiten für ε', wonach $\alpha - \alpha' = \frac{dr}{dt}$ die relative Geschwindigkeit beider Theilchen ist; so ist

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon(\alpha\alpha + \beta\beta) + \tfrac{1}{2}\varepsilon'(\alpha'\alpha' + \beta'\beta')$$

die ganze den beiden Theilchen zugehörige lebendige Kraft. Setzt man nun

$$\text{für } \alpha, \quad \frac{\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha'}{\varepsilon + \varepsilon'} + \frac{\varepsilon'(\alpha - \alpha')}{\varepsilon + \varepsilon'}$$

$$\text{für } \alpha', \quad \frac{\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha'}{\varepsilon + \varepsilon'} - \frac{\varepsilon(\alpha - \alpha')}{\varepsilon + \varepsilon'};$$

so erhält man die ganze lebendige Kraft der beiden Theilchen als Summe zweier Theile folgendermassen dargestellt, nämlich

$$= \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon + \varepsilon'} + \varepsilon\beta\beta + \varepsilon'\beta'\beta'\right),$$

wovon der erstere Theil, nämlich $\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\frac{dr^2}{dt^2}$, die relative lebendige Kraft der beiden Theilchen ist, welche oben mit x bezeichnet worden. a ist nun auch eine relative lebendige Kraft derselben Theilchen, aber bei einer bestimmten relativen Geschwindigkeit c derselben, wonach also $a = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot cc$ ist. Hieraus ergiebt sich $\frac{x}{a} = \frac{1}{cc} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$, wie oben angegeben worden.

Es möge noch bemerkt werden, dass der zweite Theil der obigen Summe, nämlich $\frac{1}{2}\left(\frac{(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon + \varepsilon'} + \varepsilon\beta\beta + \varepsilon'\beta'\beta'\right)$, nochmals getheilt, wieder als Summe zweier Theile dargestellt werden kann, nämlich

$$= \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{ds^2}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon + \varepsilon'} + (\varepsilon + \varepsilon')\gamma\gamma\right),$$

wo $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit darstellt, mit welcher die beiden Theilchen gegen einander, im Raume, senkrecht gegen r sich bewegen, während γ die Geschwindigkeit des Schwerpunkts beider Theilchen senkrecht gegen r darstellt. Es ergiebt sich hiernach die ganze den beiden Theilchen zugehörige lebendige Kraft in drei Theile zerlegt.

setzt. Alsdann erhält man

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{1}{cc} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}\right).$$

Hier bezeichnet V die Arbeit, welche verrichtet wird, wenn die beiden Theilchen aus der Entfernung r in unendliche Entfernung gebracht werden. Soll V die Arbeit bezeichnen, welche verrichtet wird, wenn die beiden Theilchen aus unendlicher Entfernung in die Entfernung r gebracht werden, was angenommen zu werden pflegt, damit positive Werthe von $\frac{dV}{dr}$ Abstossung bedeuten; so ergiebt sich

$$A = \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} - 1\right),$$

d. i. das Gesetz des elektrischen Potentials.

5.

Princip der Erhaltung der Energie für zwei Theilchen, welche ein abgesondertes System bilden.

Die beiden im vorigen Artikel ausgesprochenen Grundgesetze, welche sich bezeichnen lassen als

> das Gesetz der Abhängigkeit des Potentials von der Entfernung, bei gleicher relativer Bewegung, und als
>
> das Gesetz der Abhängigkeit des Potentials von der relativen Bewegung, bei einer bestimmten Entfernung,

bedürfen noch einer näheren Erläuterung in Betreff ihres Verhältnisses zu dem Princip der Erhaltung der Energie.

Nach dem Princip der Erhaltung der Energie werden drei

---

nämlich 1) $\frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$, 2) $\frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'} \cdot \frac{ds^2}{dt^2}$, 3) $\frac{1}{2}\left(\frac{(\varepsilon\alpha+\varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon+\varepsilon'} + (\varepsilon+\varepsilon')\gamma\gamma\right)$, wovon der erste Theil, nämlich $\frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$, die relative lebendige Kraft der beiden Theilchen ist, ferner die beiden ersten Theile zusammen, nämlich $\frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\left(\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{ds^2}{dt^2}\right)$ die ganze innere lebendige Kraft oder die innere Bewegungsenergie des Systems darstellt, im Gegensatz zum dritten Theile, nämlich $\frac{1}{2}\left(\frac{(\varepsilon\alpha+\varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon+\varepsilon'} + (\varepsilon+\varepsilon')\gamma\gamma\right)$, welcher die äussere lebendige Kraft oder die äussere Bewegungsenergie des Systems (d. i. die dem Schwerpunkt beider Theilchen zugehörige lebendige Kraft) darstellt.

Formen der Energie unterschieden, nämlich die Bewegungsenergie, die Potentialenergie und die Wärmeenergie.

Die Bewegungsenergie ist der von der vorhandenen Bewegung abhängige Theil der Energie, und es wird eine besondere Bestimmung darüber gegeben, wie er von der Bewegung abhängt, nämlich theils von der Grösse der bewegten Masse, theils von der Geschwindigkeit, mit welcher diese Masse sich bewegt.

Dieselbe Bestimmung gilt auch von der Wärmeenergie, wenn nach der mechanischen Wärmetheorie die Wärme als eine innere Bewegung in den Körpern betrachtet wird. Handelt es sich aber um ein System zweier Elementartheilchen, d. i. solcher Theilchen, in deren Innerem keine Bewegung statt findet; so leuchtet ein, dass bei einem solchen Systeme die Wärmeenergie wegfällt, und dass blos die Bewegungsenergie und die Potentialenergie übrig bleiben.

Die Potentialenergie endlich ist der von dem vorhandenen Potentiale abhängige Theil der Energie, und es bedarf für die Potentialenergie einer näheren Bestimmung, wie sie vom Potential abhängt, geradeso, wie es für die Bewegungsenergie einer nähern Bestimmung bedurfte, wie sie von der Bewegung abhinge.

Eine solche nähere Bestimmung ist nun gegeben worden, indem man die Potentialenergie (abgesehen vom Vorzeichen) dem Potential gleich gesetzt hat.*)

Die Berechtigung zu dieser Bestimmung fand man darin, dass das Potential eine der Bewegungsenergie homogene Grösse ist, welche, wenn sie negativ genommen und zu der Bewegungsenergie hinzugefügt wird, stets die nämliche Summe giebt, solange beide Theilchen ein abgesondertes System bilden, welches weder von Aussen Energie mitgetheilt erhält, noch nach Aussen abgiebt.

---

*) Das Vorzeichen des Potentials V wird so bestimmt, dass positive Werthe von $\frac{dV}{dr}$ abstossende Kräfte bezeichnen; das Vorzeichen der Potentialenergie richtet sich nach dem Vorzeichen der Arbeit, welche in Folge der Wechselwirkung der Theilchen verrichtet wird, während die beiden Theilchen aus der Entfernung r in unendliche Entfernung gebracht werden. Für zwei ponderabele Theilchen m, m' ist daher das Potential $V = \frac{mm'}{r}$, die Potentialenergie $= -\frac{mm'}{r}$. Für zwei elektrische Theilchen e, e' ist das Potential $= \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right)$, die Potentialenergie $= \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2}\right)$.

Hat man z. B. ein System zweier ponderabelen Theilchen m, m', so ist das Potential

$$V = \frac{mm'}{r},$$

und die innere lebendige Kraft, oder die innere Bewegungsenergie des Systems, ist

$$W = \frac{1}{2}\frac{mm'}{m+m'} \cdot (uu + \alpha\alpha),$$

wenn $u = \frac{dr}{dt}$ die relative Geschwindigkeit der beiden Theilchen, α den Unterschied ihrer Geschwindigkeiten im Raume senkrecht gegen r bezeichnet. Es ergiebt sich aber leicht für ein solches abgesondertes System, wenn $r = r_0$ und $\alpha = \alpha_0$ für $u = 0$ gesetzt wird,

$$uu = \frac{r_0 - r}{r_0}\left(\frac{2(m+m')}{r} - \frac{r_0 + r}{r_0}\alpha\alpha\right)\,^{*)},$$

folglich die Summe

---

*) Die Kraft, mit welcher die beiden Theilchen auf einander wechselseitig wirken, nämlich $\frac{dV}{dr}$, mit m dividirt, giebt die Beschleunigung des Theilchens m, $= \frac{1}{m}\frac{dV}{dr}$; mit m' dividirt, die Beschleunigung des Theilchens m', $= \frac{1}{m'}\frac{dV}{dr}$; folglich ist der von ihrer Wechselwirkung herrührende Theil der relativen Beschleunigung beider Theilchen $= \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\frac{dV}{dr}$, während derjenige Theil der relativen Beschleunigung beider Theilchen, welcher von ihrer Drehung um einander herrührt, durch $\frac{\alpha\alpha}{r}$ ausgedrückt wird. Zieht man nun den letzteren Theil von der ganzen Beschleunigung $\frac{du}{dt}$ ab; so erhält man folgende Gleichung

$$\frac{du}{dt} - \frac{\alpha\alpha}{r} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\frac{dV}{dr}.$$

Setzt man für den Augenblick wo $u = 0$ ist, $r = r_0$ und $\alpha = \alpha_0$; so ergiebt sich für den Fall, dass auf die beiden Theilchen blos die von ihrer Wechselwirkung herrührenden Anziehungskräfte wirken,

$$\alpha r = \alpha_0 r_0.$$

Hiernach ergiebt sich durch Integration obiger Differentialgleichung, nachdem sie mit $2dr = 2udt$ multiplicirt worden,

$$uu + \alpha_0\alpha_0 r_0 r_0\left(\frac{1}{rr} - \frac{1}{r_0 r_0}\right) = 2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\left(\frac{mm'}{r} - \frac{mm'}{r_0}\right)$$

und hieraus

$$uu = \frac{r_0 - r}{r}\left(\frac{2(m+m')}{r_0} - \frac{r_0 + r}{r}\alpha_0\alpha_0\right) = \frac{r_0 - r}{r_0}\left(\frac{2(m+m')}{r} - \frac{r_0 + r}{r_0}\alpha\alpha\right).$$

$$W - V = -\frac{mm'}{r_0} + \frac{1}{2}\frac{mm'}{m+m'} \cdot \alpha_0\alpha_0 \, .$$

Diese Summe behält immer denselben Werth, solange als die Werthe von r_0 und α_0 unverändert bleiben, d. h. solange das System der beiden Theilchen weder Energie von Aussen mitgetheilt erhält, noch nach Aussen abgiebt. — Die äussere Bewegungsenergie bildet bei einem solchen abgesonderten Systeme eine constante Summe für sich. —

Dasselbe gilt nun auch ferner für zwei elektrische Theilchen e, e', deren Potential negativ genommen, zu ihrer Bewegungsenergie hinzugefügt, gleichfalls immer die nämliche Summe giebt, solange beide Theilchen ein abgesondertes System bilden.

Denn man hat für ein solches System zweier elektrischen Theilchen das Potential

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{uu}{cc} - 1\right) ,$$

ferner die innere Bewegungsenergie des Systems

$$W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}(uu + \alpha\alpha) = \frac{ee'}{\varrho cc}(uu + \alpha\alpha) ,$$

wenn $u = \frac{dr}{dt}$ die relative Geschwindigkeit der beiden Theilchen, α den Unterschied ihrer Geschwindigkeiten im Raume senkrecht gegen r bezeichnet. Es ergiebt sich aber leicht für ein solches abgesondertes System, wenn $r = r_0$ und $\alpha = \alpha_0$ für $u = 0$ gesetzt wird,

$$\alpha = \frac{r_0}{r}\alpha_0$$

$$uu = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} cc + \frac{r_0 + r}{r}\alpha_0\alpha_0\right) , \text{*)}$$

folglich die Summe

$$W - V = \frac{ee'}{r_0} + \frac{ee'}{\varrho} \cdot \frac{\alpha_0\alpha_0}{cc} = \frac{ee'}{r_0} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'} \cdot \alpha_0\alpha_0 \, .$$

Auch diese Summe behält denselben Werth, solange die Werthe von r_0 und α_0 unverändert bleiben, d. h. solange das System beider Theilchen weder Energie von Aussen mitgetheilt erhält noch nach Aussen abgiebt. **) — Für die äussere Bewegungsenergie gilt bei

*) Siehe Art. 11.

**) In der sehr lehrreichen Schrift des Herrn Tait: Sketch of thermodynamics. Edinburgh 1868, findet sich pag. 76, mit Beziehung auf die von Riemann und

einem abgesonderten Systeme für zwei elektrische Theilchen dasselbe wie für zwei ponderabele Theilchen. —

6.

Ausdehnung des Princips der Erhaltung der Energie auf zwei elektrische Theilchen, welche kein abgesondertes System bilden.

Setzt man die Potentialenergie, wie es im vorhergehenden Artikel geschehen, dem Potentiale entgegengesetzt gleich, so gilt das Princip der Erhaltung der Energie für zwei Theilchen nur so lange, als diese beiden Theilchen ein abgesondertes System bilden, d. h. so lange, als das System beider Theilchen weder Energie von Aussen mitgetheilt erhält, noch nach Aussen abgiebt.

War die ganze Energie eines solchen abgesonderten Systems zweier Theilchen $= A$, bleibt aber dieses System nicht abgesondert, sondern wird ihm von Aussen die Bewegungsenergie $= a$ mitgetheilt; so scheint zu folgen, dass, wenn darauf das System wieder abgesondert würde, die ganze Energie wieder constant werden und constant bleiben würde, so lange, als es abgesondert bliebe; dass aber die dem abgesonderten Systeme zukommende ganze Energie während seiner letzteren Absonderung den constanten Werth $A + a$ haben würde, also einen um a grösseren Werth, als während seiner früheren Absonderung. Es ist hiemit aber die Unmöglichkeit der Ausdehnung des Princips der Erhaltung der Ener-

---

Lorenz in Poggendorffs Annalen 1867 erschienenen Untersuchungen, folgende Stelle: But the investigations of these authors are entirely based on Weber's inadmissible theory of the forces exerted on each other by moving electric particles, for wich the conservation of energy is not true — while Maxwell's result is in perfect consistence with that great principle. Diese Behauptung des Herrn Tait erscheint mit Obigem in Widerspruch. Herr Tait hat pag. 56 desselben Werks angeführt, dass Helmholtz die Lehre von der Energie auf Newton's Princip und auf folgendes Postulat gegründet habe: Matter consists of ultimate particles which exert upon each other forces whose directions are those of the lines joining each pair of particles, and whose magnitudes depend solely on the distances between the particles. Es leuchtet der Widerspruch des elektrischen Grundgesetzes mit diesem Postulate wohl ein, aber keineswegs mit dem Principe der Erhaltung der Energie, was Herr Tait verwechselt zu haben scheint.

gie auf zwei elektrische Theilchen, welche kein abgesondertes System bilden, noch keineswegs vollständig bewiesen.

Denn streng genommen ist dies nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass die Potentialenergie des Systems blos von der Entfernung beider Theilchen abhänge; wenn dagegen die Potentialenergie nicht blos von der Entfernung beider Theilchen, sondern auch von ihrer gegenseitigen Bewegung abhängt; so leuchtet ein, dass das System, während es von Aussen die Bewegungsenergie $= a$ mitgetheilt erhält, dadurch mittelbar auch eine Aenderung seiner Potentialenergie erleiden muss. Es wäre dann also möglich, dass diese mittelbar von Aussen herrührende Aenderung der Potentialenergie $= -a$ wäre, so dass die ganze Energie (Bewegungsenergie und Potentialenergie zusammen) beider Theilchen, auch wenn sie kein abgesondertes System bilden, immer denselben Werth behielte.

Dies findet nun zwar für ein System zweier elektrischen Theilchen wirklich nicht statt, wenn man die Potentialenergie dem Potentiale entgegengesetzt gleich setzt, was also jene Ausdehnung des Princips unmöglich machen würde, was selbst aber keineswegs als nothwendig nachgewiesen ist. Im Allgemeinen wurde nämlich nur eine nähere Bestimmung darüber erfordert, wie die Potentialenergie vom Potentiale abhänge, wobei nur einleuchtete, dass zwischen Potential und Potentialenergie, weil sie homogene Grössen waren, ein reines Zahlenverhältniss statt finden müsse. Ob aber dieses Zahlenverhältniss immer das Verhältniss von $+1$ zu -1 sei, oder ob dieses Verhältniss anders zu bestimmen sei, kann noch im Allgemeinen als zweifelhaft betrachtet werden, womit die Möglichkeit jener Ausdehnung des Princips bleibt.

Unter Potential zweier Theilchen versteht man nämlich diejenige Arbeit, welche in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen verrichtet wird, während die beiden Theilchen auf beliebige Weise aus unendlicher Entfernung in die vorhandene Entfernung r mit der vorhandenen relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ versetzt werden.

Man sieht aber ein, dass Arbeit in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen nicht blos verrichtet werde während der Versetzung aus grösserer Entfernung in die Entfernung r, sondern

auch während der Versetzung aus kleinerer Entfernung in die Entfernung r. Und es liegt gar kein Grund vor, die dem Systeme zuzuschreibende Energie blos von jener Arbeit und nicht auch von dieser Arbeit abhängig zu machen.

Zum Beispiel könnte, wenn jene Arbeit nach Art. 4 mit V, diese Arbeit mit $\frac{\varrho - r}{\varrho} V$ bezeichnet wird, die dem Systeme zuzuschreibende Potentialenergie der Differenz beider Arbeiten gleich sein, nämlich $= \frac{\varrho - r}{\varrho} V - V = - \frac{r}{\varrho} V$. Diese Differenz beider Arbeiten ist offenbar die Arbeit, welche in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen während der Versetzung von dem Grenzwerth der kleineren Entfernung zum Grenzwerth der grösseren Entfernung verrichtet wird, d. i. der Werth, welchen $- V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{uu}{cc}\right)$ annimmt, wenn darin r dem Grenzwerthe der kleineren Entfernung gleich genommen, oder $r = \varrho$ gesetzt wird, wo ϱ den Grenzwerth der kleineren Entfernung bezeichnet. Hiernach ist also diese Differenz beider Arbeiten $= \frac{ee'}{\varrho}\left(1 - \frac{uu}{cc}\right) = - \frac{r}{\varrho} V$.

Bei solcher Bestimmung der Potentialenergie für ein System zweier elektrischen Theilchen, wo jene erstere Arbeit

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{uu}{cc} - 1\right)$$

ist, würde also zur Bestimmung der letzteren Arbeit es nur noch der Bestimmung des Werths von ϱ bedürfen, nämlich der kleineren Entfernung, für welche letztere Arbeit gelten soll.

Diese kleinere Entfernung muss nun, ebenso wie jene grössere Entfernung, für sich, unabhängig von den vorhandenen Verhältnissen der beiden Theilchen, bestimmt sein. Für die grössere Entfernung war dies dadurch erreicht, dass man ihr einen unendlich grossen Werth beilegte; für die kleinere Entfernung lässt sich dasselbe erreichen, wenn man ihr den Werth $= 2 \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{cc}$ beilegt, eine Entfernung welche durch die Theilchen e, e', durch ihre Massen ε, ε' und durch die bekannte elektrische Constante c gegeben ist.

Wird nun die kleinere Entfernung diesem Werthe von ϱ gleich gesetzt, so erhält man, da

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{uu}{cc} - 1\right)$$

$$\frac{\varrho - r}{\varrho} V = \frac{\varrho - r}{\varrho} \cdot \frac{ee'}{r}\left(\frac{uu}{cc} - 1\right)$$

war, den gesuchten Werth der Potentialenergie

$$-\frac{r}{\varrho} V = -\frac{ee'}{\varrho}\left(\frac{uu}{cc} - 1\right) = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\left(cc - uu\right).$$

Zu der hier gemachten Unterscheidung zwischen Potential und Potentialenergie zweier elektrischen Theilchen und der hiernach gegebenen Bestimmung ihres Verhältnisses, möge nun auch noch eine ähnliche Bemerkung über den zwischen lebendiger Kraft und Bewegungsenergie zweier Theilchen zu machenden Unterschied hinzugefügt werden. Denn auch die Bewegungsenergie zweier Theilchen braucht nicht nothwendig der ganzen beiden Theilchen zugehörigen lebendigen Kraft gleichgesetzt zu werden, sondern es wird im Allgemeinen nur eine nähere Bestimmung darüber erfordert, in welcher Beziehung die Bewegungsenergie zweier Theilchen zur ganzen den beiden Theilchen zugehörigen lebendigen Kraft stehe.

Die ganze den beiden Theilchen zugehörige lebendige Kraft ist nun in der Note Art. 4 als Summe zweier Theile dargestellt worden, wovon der erstere Theil, nämlich $\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\frac{dr^2}{dt^2}$, die relative lebendige Kraft der beiden Theilchen genannt wurde. Der andere Theil war derjenige, welcher beiden Theilchen zukam in Folge ihrer Drehung umeinander im Raume und in Folge der Bewegung ihres Schwerpunkts im Raume.

Geht man nun bei der Feststellung des Begriffs der Energie zweier Theilchen davon aus, dass das Princip der Erhaltung der Energie zweier Theilchen im Wesen der beiden Theilchen begründet sein soll, und zwar im Wesen der beiden Theilchen als abgesondertes System betrachtet, so leuchtet ein, dass zu diesem Zwecke der Begriff der Energie zweier Theilchen (ganz unabhängig von den Beziehungen in welche diese Theilchen zu allen andern Körpern im Raume stehen mögen) nur von den im Systeme beider Theilchen als solchem dargebotenen Verhältnissen abhängig gemacht werden dürfe.

Wendet man diesen Grundsatz nun auf die Bewegungsenergie zweier Theilchen an, wie es soeben in Beziehung auf die Potentialenergie geschehen ist; so sieht man, dass die Bewegungsenergie von dem ersten Theile der ganzen den beiden Theilchen angehörigen lebendigen Kraft, nämlich von der relativen lebendigen Kraft der beiden Theilchen abhängig gemacht werden dürfe, aber nicht von dem zweiten Theile der ganzen lebendigen Kraft, welche nämlich den beiden Theilchen nur in Folge ihrer Drehung umeinander im Raume und in Folge der Bewegung ihres Schwerpunkts im Raume zukommt, weil dieser Theil von Verhältnissen abhängt, welche von den Theilchen selbst unmittelbar nicht dargeboten sind. Denn die beiden Theilchen für sich allein betrachtet bieten in räumlicher Beziehung unmittelbar nichts dar als ihren Abstand, woraus keine Kenntniss von Drehung oder Fortbewegung des Schwerpunkts im Raume zu entnehmen ist.

Es soll daher in Folgendem unter Bewegungsenergie zweier Theilchen nicht die ganze den beiden Theilchen zugehörige lebendige Kraft, sondern nur die relative lebendige Kraft der beiden Theilchen verstanden werden.

Hiernach würde nun aber, wie man leicht ersieht, das System zweier elektrischen Theilchen e, e' während es von Aussen die Bewegungsenergie $= a$ mitgetheilt erhielte, wirklich eine Aenderung seiner Potentialenergie $= - a$ erleiden, so dass die ganze Energie des Systems beider Theilchen immer denselben Werth behielte, sowohl wenn die beiden Theilchen ein abgesondertes System, als auch wenn sie kein abgesondertes System bilden. Denn setzt man die von Aussen mitgetheilte Bewegungsenergie

$$a = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} vv ,$$

während die vor dieser Mittheilung vorhandene Bewegungsenergie der Theilchen

$$= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot u_0 u_0$$

war, so ist die nach dieser Mittheilung vorhandene Bewegungsenergie

$$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} uu = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} (u_0 u_0 + vv) ;$$

folglich ist die Potentialenergie vor jener Mittheilung

$$-\frac{r}{\varrho}V_0 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}(cc - u_0u_0) ,$$

die Potentialenergie nach jener Mittheilung dagegen

$$-\frac{r}{\varrho}V = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}(cc - uu) = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}(cc - u_0u_0) - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}vv ,$$

also ist die in Folge jener mitgetheilten Bewegungsenergie $= + a$ eingetretene Aenderung der Potentialenergie

$$= -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}vv = -a .$$

7.

Anwendbarkeit auf andere Körper.

Unterscheidet man zwischen Potential und Potentialenergie zweier elektrischen Theilchen auf die im vorigen Artikel angegebene Weise, wonach nämlich

> das Potential diejenige Arbeit ist, welche in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen verrichtet wird während die beiden Theilchen aus unendlicher Entfernung in die vorhandene Entfernung r mit der vorhandenen relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ versetzt werden;
>
> die Potentialenergie dagegen die negativ genommene Arbeit ist, welche in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen verrichtet wird während die beiden Theilchen aus der grösseren Entfernung $r = \infty$ in die kleinere $r = \varrho$, welche durch die Theilchen e, e', ihre Massen ε, ε' und durch die Constante c gegeben ist, mit der vorhandenen relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ versetzt werden;

so kann letztere, nämlich die Potentialenergie in der angegebenen Bedeutung, in zwei Theile zerlegt werden, wovon der eine dem Potential entgegengesetzt gleich, folglich diejenige Grösse ist, welche früher allein als Potentialenergie bezeichnet worden, und welche von jetzt an, nur als Theil der Potentialenergie betrachtet, die freie Potentialenergie heissen möge. Der übrig

bleibende Rest ist der zweite Theil, welcher die latente Potentialenergie heissen möge.

Es lässt sich alsdann das Princip der Erhaltung der Energie erstens im früheren weiteren Sinne folgendermassen aussprechen:

> für ein abgesondertes System zweier Theilchen ist die Summe der Bewegungsenergie und der freien Potentialenergie immer gleich.

Denn, solange keine Bewegungsenergie von Aussen mitgetheilt noch nach Aussen abgegeben wird, wird jede Aenderung der freien Potentialenergie durch eine entgegengesetzt gleiche Aenderung der Bewegungsenergie ersetzt.

Es lässt sich aber alsdann auch zweitens das Princip der Erhaltung der Energie im engeren Sinne (wenn hiebei Potentialenergie und Bewegungsenergie in der eben festgesetzten Bedeutung genommen werden) folgendermassen aussprechen:

> die relative Bewegungsenergie zweier Theilchen und die ihnen bei dieser Bewegungsenergie zukommende ganze Potentialenergie bilden zusammen eine stets gleiche Summe, das System möge abgesondert sein oder nicht.

Hieran lassen sich nun folgende Bemerkungen knüpfen:

1) einem Theilchen für sich allein betrachtet kommt blosse Bewegungsenergie zu;

2) zweien Theilchen kommt zunächst ebenfalls Bewegungsenergie zu, welche die Summe von denen ist, die ihnen einzeln betrachtet zukommen;

3) diese Summe besteht aus einem Theile A, der theils ihrem Schwerpunkte zugeschrieben werden kann, theils der Drehung der beiden Theilchen im Raume um einander, und aus einem Theile B, welcher beiden Theilchen für sich allein betrachtet relativ gegen einander zukommt. Dieser letztere Theil B heisst die relative Bewegungsenergie oder die des Systems beider Theilchen.

4) In dem Systeme beider Theilchen ist aber ausser seiner Bewegungsenergie noch Etwas vorhanden, was beiden Theilchen einzeln nicht zukommt, nämlich eine grössere oder geringere Arbeits-

fähigkeit, in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen auf einander. Das Maass dieser Arbeitsfähigkeit wird mit dem Namen Potentialenergie des Systems oder relative Potentialenergie der beiden Theilchen bezeichnet, und zwar dient zu diesem Maasse der Arbeitsfähigkeit diejenige Arbeit, welche verrichtet wird, in Folge der Wechselwirkung der beiden Theilchen, während ihrer Versetzung aus der kleineren Entfernung $r = \varrho$ in die grössere $r = \infty$, wo ϱ durch die Theilchen e, e' selbst, durch ihre Massen ε, ε' und durch die Constante c bestimmt ist.

5) Das auf die oben angegebene Weise näher bestimmte Princip der Erhaltung der Energie findet nun aber auf zwei Theilchen nur dann Anwendung, wenn das Potential der beiden Theilchen von gleicher Form ist, wie das zweier elektrischen Theilchen, nämlich

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right).$$

Das Potential zweier ponderabelen Theilchen m, m' ist dagegen

$$V = \frac{mm'}{r},$$

was (abgesehen vom Vorzeichen) unter jener Form nur subsumirt werden kann, wenn der Werth der Constanten c für ponderabele Theilchen unendlich gross ist; doch leuchtet ein, dass in der Wirklichkeit genügen wird, der Constanten c nur einen sehr grossen Werth zuzuschreiben, statt eines unendlich grossen Werthes, um in keinen nachweisbaren Widerspruch mit der Erfahrung zu gerathen. Und bei dem ausserordentlich grossen Werthe, der auch für elektrische Theilchen der Constanten c zugeschrieben werden muss, scheint es für ponderabele Körper, zur Vermeidung aller nachweisbaren Widersprüche, gar nicht nöthig einen andern Werth anzunehmen, sondern es dürfte gestattet sein, für zwei ponderabele Theilchen m, m' das Potential

$$V = \frac{mm'}{r}\left(1 - \frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2}\right)$$

zu setzen, und darin der Constanten c denselben Werth wie im Potential elektrischer Theilchen beizulegen.

Sollten aber auch künftige feinere Beobachtungsresultate ergeben, dass eine solche Gleichsetzung des Werths der Constanten c für

ponderabele Theilchen nicht gestattet sei; so würde immer übrig bleiben, für ponderabele Theilchen der Constanten c einen noch grösseren Werth beizulegen, der leicht so gross genommen werden kann, dass jeder nachweisbare Widerspruch mit der Erfahrung vollkommen verschwindet.

Ueber die Bewegungen zweier elektrischen Theilchen durch Wechselwirkung.

8.

Durch das elektrische Grundgesetz wird die Wirkung bestimmt, welche irgend ein Theilchen auf ein anderes unter beliebigen Verhältnissen ausübt. Als nächstliegende und einfachste Anwendung, welche dieses Gesetz finden kann, scheint sich die Entwickelung der Bewegungsgesetze zweier Theilchen unter wechselseitigem Einflusse darzubieten; es hat aber ein grösseres praktisches Interesse gehabt, zunächst die Vertheilungsgesetze ruhender Elektricität in Conductoren, und die Gesetze der von strömender Elektricität in einem geschlossenen Leiter, durch die in einem andern Leiter strömende Elektricität, auf diesen letzteren Leiter ausgeübten Kräfte, sowie die Gesetze der von geschlossenen Strömen (oder von Magneten) auf die Elektricität in geschlossenen Leitern ausgeübten (elektromotorischen) Kräfte zu entwickeln, weil die Resultate dieser Entwickelungen directe Prüfungen und Bestätigungen durch die Erfahrung gestatteten. Fehlt nun auch dieses wichtige praktische Interesse der Entwickelung der Bewegungsgesetze zweier Theilchen unter blossem wechselseitigen Einflusse; so dürften doch manche Resultate derselben in andern Beziehungen Aufmerksamkeit verdienen.

Das Interesse an diesen Resultaten betrifft nämlich vorzugsweise die Molecularbewegungen zweier Theilchen, welche von aller directen experimentellen Forschung ausgeschlossen sind, und für welche daher der Anwendung des aufgestellten Gesetzes, insofern

es als Erfahrungsgesetz betrachtet wird, keine Berechtigung zugeschrieben werden kann. Die Entwickelung der Molecularbewegungen zweier Theilchen nach dem aufgestellten Gesetze darf daher nur als ein Versuch betrachtet werden, für die Theorie der Molecularbewegungen, an der es noch gänzlich fehlt, einen Leitfaden zu gewinnen, der für sich allein freilich nicht genügt, sondern noch einer wesentlichen Ergänzung bedarf. Denn ohne die Kenntniss und genaue Berücksichtigung der ohne Zweifel bei den Molecularbewegungen zur Mitwirkung kommenden, auf Molecularentfernungen beschränkten Molecularkräfte kann den sich ergebenden Resultaten keine genaue quantitative, sondern nur innerhalb gewisser Schranken eine Art qualitativer Geltung zugeschrieben werden, welche nur für die erste Recognoscirung des Gebietes Bedeutung habe.

9.

Bewegungen zweier elektrischen Theilchen in Richtung der sie verbindenden Geraden.

Für zwei blos unter wechselseitigem Einfluss sich bewegende Theilchen e, e' hat man nach den Grundgesetzen Art. 4, wenn

$$\varrho = 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{cc}, \quad x = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}, \quad a = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot cc$$

gesetzt wird, und wenn daselbst die Vorzeichen von U und V negativ genommen werden, um die Potentiale damit zu bezeichnen,

$$V : U = 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{cc} : r$$

$$-U + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot cc\,;$$

folglich

$$V = \frac{2}{r}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{cc}\,.\,U = \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right).$$

Findet keine Drehungsbewegung der beiden Theilchen um einander im Raume statt; so ist $\frac{1}{\varepsilon}\frac{dV}{dr}$ die Beschleunigung des Theilchens e in Richtung von r, und $\frac{1}{\varepsilon'}\frac{dV}{dr}$ ist die Be-

schleunigung des Theilchens e' in entgegengesetzter Richtung. Man erhält hiernach die relative Beschleunigung beider Theilchen

$$\frac{ddr}{dt^2} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{dV}{dr},$$

und hieraus durch Integration von $r = r_0$ bis $r = r$, wenn der Werth von r, in dem Augenblicke wo $\frac{dr}{dt} = u = 0$ ist, mit r_0 bezeichnet wird, da $\varrho = 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{cc}$ gesetzt worden,

$$\frac{dr^2}{dt^2} = uu = \frac{r - r_0}{r - \varrho} \cdot \frac{\varrho}{r_0} \cdot cc\,.$$

$\frac{\varrho}{r_0}$ hat stets einen von Null verschiedenen positiven oder negativen Werth; denn $\varrho = 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{cc}$ hat einen gegebenen endlichen, wenn auch sehr kleinen Werth, welcher positiv oder negativ ist, jenachdem ee' positiv oder negativ ist, und $r_0 = \frac{r}{1 + \frac{uu}{cc} \cdot \frac{r - \varrho}{\varrho}}$ hat ebenfalls einen von Null verschiedenen positiven oder negativen Werth, weil die anfänglichen Werthe von r und uu, aus denen r_0 bestimmt werden soll, positive und messbare Grössen sein müssen, welche durch Beobachtung bestimmt gedacht werden.

Ist $\frac{\varrho}{r_0}$ positiv, indem Zähler und Nenner positiv sind, so sind alle Bewegungen auf die Entfernungen ausserhalb der Strecke ϱr_0 beschränkt und zerfallen in Fernbewegungen und Molecularbewegungen, die von einander durch die Strecke ϱr_0 geschieden sind.

Ist $\frac{\varrho}{r_0}$ aber positiv, indem Zähler und Nenner negativ sind; so erstrecken sich die Bewegungen über alle möglichen Entfernungen, weil die Strecke ϱr_0 ausserhalb der möglichen Entfernungen liegt.

Ist $\frac{\varrho}{r_0}$ negativ, wo die Strecke ϱr_0 theils ausserhalb, theils innerhalb der möglichen Entfernungen liegt; so sind alle Bewegungen auf den innerhalb möglicher Entfernungen liegenden Theil der Strecke ϱr_0 beschränkt, und sind, wenn ϱ positiv und r_0 negativ ist, Molecularbewegungen.

Es ergiebt sich hiernach, wenn ϱ und r_0 positiv sind, erstens, dass kein Uebergang von Fernbewegungen zu Molecularbe-

wegungen stattfindet; zweitens, dass uu immer kleiner bleibt als cc, wenn es anfangs kleiner war; drittens, dass, wenn $uu < cc$, r und r_0 (beide zugleich) entweder grösser oder kleiner als ϱ sind.

Hält man sich blos an die Erfahrung, so können einige dieser relativen Bewegungen der beiden Theilchen von der Betrachtung ganz ausgeschlossen werden; denn es leuchtet ein, dass in der Wirklichkeit unendlich grosse relative Geschwindigkeiten gar nicht vorkommen, im Gegentheil ist $\frac{1}{cc} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$ fast immer als ein sehr kleiner Bruch zu betrachten.

Diese aus der Natur entnommene Beschränkung ist auch stillschweigend zum Grunde gelegt, wenn $V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right)$ als Potential angenommen wird, welches $= 0$ sein soll für einen unendlich grossen Werth von r. Denn wäre $\frac{dr^2}{dt^2}$ unendlich gross, so könnte $\frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right)$ auch für einen unendlich grossen Werth von r einen von Null verschiedenen Werth haben.

Ist aber der Werth von $\frac{dr^2}{dt^2}$ niemals unendlich gross, so muss es einen endlichen Werth geben, den $\frac{dr^2}{dt^2}$ niemals überschreitet. Als ein solcher Werth mag cc angenommen werden.

Diese Beschränkung der relativen Geschwindigkeiten vorausgesetzt, ist r_0 immer positiv, und es giebt für jeden Werth von r_0 nur eine einzige stetig zusammenhängende Reihe zusammengehöriger Werthe von r und $\frac{dr^2}{dt^2}$, und zwar erstrecken sich

wenn ϱ positiv und $r_0 > \varrho$ ist,

die zusammengehörigen Werthe von r und $\frac{dr^2}{dt^2}$ von $r = r_0$ bis $r = \infty$ und von $\frac{dr^2}{dt^2} = 0$ bis $\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{\varrho}{r_0}$. Die betreffenden Bewegungen sind Fernbewegungen.

Ist ϱ positiv und $r_0 < \varrho$, oder ist ϱ negativ;

so erstrecken sich die zusammengehörigen Werthe von $r = r_0$ bis $r = 0$ und von $\frac{dr^2}{dt^2} = 0$ bis $\frac{dr^2}{dt^2} = cc$. Die betreffenden Bewegungen sind im erstern Falle, wenn ϱ positiv und $r_0 < \varrho$ ist, und desgleichen im zweiten Falle, wenn ϱ negativ und $r_0 < \varrho$ ist, Molecularbewegungen; wenn aber im zweiten Falle $r_0 > \varrho$ ist, sind die be-

treffenden Bewegungen theils Fernbewegungen, theils Molecularbewegungen.

Unter der angegebenen Beschränkung der Bewegungen erhält man also für zwei blos unter wechselseitigem Einfluss sich bewegende Theilchen e, e', wenn keine Drehungsbewegung der Theilchen um einander im Raume statt findet, folgende Bewegungsgleichung, nämlich wenn $\frac{dr}{dt} = u$ gesetzt wird,

$$\frac{uu}{cc} = \frac{r - r_0}{r - \varrho} \cdot \frac{\varrho}{r_0} ,$$

wo ϱ einen durch die Theilchen e, e', ihre Massen ε, ε' und durch die Constante cc gegebenen Werth hat, und r_0 eine, nach dieser Gleichung selbst, aus dem positiv und von ϱ verschiedenen, sonst beliebig anzunehmenden, Anfangswerth von r, und aus dem positiv und kleiner als cc, sonst beliebig anzunehmenden, Anfangswerth von uu zu bestimmende Constante bezeichnet.

10.

Zwei Aggregatzustände eines Systems von zwei gleichartigen Theilchen.

Für zwei gleichartige Theilchen hat ϱ einen positiven Werth. Da nun ferner für jeden Werth von r die relative Geschwindigkeit u zwei entgegengesetzt gleiche Werthe annehmen kann; so kann, obiger Gleichung $\frac{uu}{cc} = \frac{r - r_0}{r - \varrho} \cdot \frac{\varrho}{r_0}$ gemäss,

entweder r zuerst abnehmen von $r = \infty$ bis $r = r_0$, und dabei nimmt u zu von $u = - c\sqrt{\frac{\varrho}{r_0}}$ bis $u = 0$; sodann wird

r wieder zunehmen von $r = r_0$ bis $r = \infty$, und dabei nimmt u zu von $u = 0$ bis $u = + c\sqrt{\frac{\varrho}{r_0}}$;

oder es kann r zuerst abnehmen von $r = r_0$ bis $r = 0$, und dabei nimmt u ab von $u = 0$ bis $u = - c$; sodann wird

r wieder zunehmen von $r = 0$ bis $r = r_0$, und dabei nimmt u ab von $u = + c$ bis $u = 0$.

Man sieht leicht, dass die erstere Bewegung keine wiederkehrende ist; denn nachdem die Entfernung r von beliebiger Grösse

bis r_0 abgenommen hat, wächst sie wieder und zwar bis ins Unendliche, d. h. sie nimmt niemals wieder ab. Die letztere Bewegung ist dagegen eine wiederkehrende, indem die Entfernung r abwechselnd von r_0 bis 0 abnimmt und abwechselnd von 0 bis r_0 wieder zunimmt.

Im Augenblicke, wo $r = 0$ wird, scheint zwar im Werthe der Geschwindigkeit u ein Sprung einzutreten von $-c$ zu $+c$; in der That findet aber kein Sprung statt, weil $-c$ bei verschwindendem r dieselbe Geschwindigkeit bezeichnet, wie $+c$ bei dem von Null an wachsenden r.

Diese beiden Bewegungen sind ferner von einander dadurch unterschieden, dass kein Uebergang von der einen zur andern statt findet; denn ein solcher Uebergang würde nach obiger Gleichung für die Strecke ϱr_0 oder $r_0 \varrho$ nur durch imaginäre Werthe von u vermittelt werden.

Auf diese Trennung der beiden Bewegungszustände lässt sich nun die Unterscheidung zweier Aggregatzustände eines Systems von zwei gleichartigen Theilchen begründen, nämlich eines Aggregatzustandes, bei welchem die beiden Theilchen sich nur in Fernbewegung befinden können, und eines Aggregatzustandes, bei welchem die beiden Theilchen sich nur in Molecularbewegung befinden können. Einen Uebergang von dem einen Aggregatzustande zu dem andern giebt es nicht, solange beide Theilchen sich nur unter wechselseitigem Einflusse bewegen.

Zu bemerken ist nur noch der Umstand, dass hiebei vorausgesetzt worden, dass die beiden Theilchen, im Raume betrachtet, keine andere Bewegung haben, als nach der Richtung r; jedoch wird in den folgenden Artikeln auch der entgegengesetzte Fall betrachtet werden.

11.

Bewegungen zweier elektrischen Theilchen, welche im Raume, in einer Richtung senkrecht auf die sie verbindende Gerade, ungleiche Geschwindigkeiten besitzen.

Bezeichnet α den Unterschied der Geschwindigkeiten, welche zwei elektrische Theilchen e und e', bei der Entfernung r von einander, im Raume in einer Richtung senkrecht auf die sie verbindende Gerade r besitzen; so ergiebt sich $\frac{\alpha\alpha}{r}$ als der von α abhängige Theil der relativen Beschleunigung $\frac{du}{dt}$.

Bringt man diesen Theil $\frac{\alpha\alpha}{r}$ von der ganzen Beschleunigung $\frac{du}{dt}$ in Abrechnung, so giebt die Differenz $\left(\frac{du}{dt} - \frac{\alpha\alpha}{r}\right)$ denjenigen Theil der relativen Beschleunigung der beiden Theilchen, welcher von den Kräften herrührt, die sie auf einander ausüben. Nach Art. 9 war dieser letztere Theil $= \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{dV}{dr}$, wonach folgende Gleichung erhalten wird:

$$\frac{du}{dt} - \frac{\alpha\alpha}{r} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{dV}{dr} .$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $udt = dr$, so erhält man

$$udu - \alpha\alpha\frac{dr}{r} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\cdot\frac{dV}{dr}dr ,$$

und hieraus folgt durch Integration, von dem Augenblicke an gerechnet, wo $u = 0$ ist, wenn der Werth von r in diesem Augenblicke mit r_0 bezeichnet wird,

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)(V - V_0) = \frac{1}{2}uu - \int_{r_0}^{r}\frac{\alpha\alpha}{r}dr ,$$

wo $V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{uu}{cc} - 1\right)$ und $V_0 = -\frac{ee'}{r_0}$ ist, wo aber, um die letzte Integration auszuführen, $\alpha\alpha$ als Function von r dargestellt werden muss.

Nun ist $r \,.\, \alpha dt$ das von der Verbindungslinie der beiden Theilchen, welche durch Abstossungs- oder Anziehungskräfte auf einander

wirken, bei der Bewegung des einen Theilchens um das andere in dem Zeitelement dt beschriebene Flächenelement, welches für gleiche Zeitelemente dt immer gleichen Werth behält, woraus $r\alpha dt = r_0\alpha_0 dt$ folgt. Setzt man also hiernach

$$\alpha\alpha = r_0 r_0 \alpha_0 \alpha_0 \cdot \frac{1}{rr}$$

im letzten Gliede der obigen Gleichung ein, und führt dann die Integration aus; so erhält man folgende Gleichung:

$$2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{cc}\left(\frac{r - r_0}{rr_0} + \frac{1}{r} \cdot \frac{uu}{cc}\right) = \frac{uu}{cc} + \frac{\alpha_0\alpha_0}{cc} \cdot \frac{r_0 r_0 - rr}{rr} ,$$

woraus, wenn $2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{cc} = \varrho$ gesetzt wird, die Bewegungsgleichung

$$\frac{uu}{cc} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right)$$

erhalten wird. Wird dieser Werth von $\frac{uu}{cc}$ in die Gleichung

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{uu}{cc} - 1\right)$$

gesetzt, so erhält man

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right) - 1\right)$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r_0} \cdot \frac{r_0 - \varrho}{(r - \varrho)^2} - \frac{ee'}{(r - \varrho)^2}\left(1 - \left(3 - 2\frac{\varrho}{r}\right)\frac{r_0 r_0}{rr}\right)\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc} .$$

12.

Nach dem vorigen Artikel ist für zwei Theilchen, die sich unter wechselseitigem Einflusse beliebig im Raume bewegen, eine Gleichung zwischen ihrer relativen Geschwindigkeit u und ihrer relativen Entfernung r gegeben, nämlich

$$\frac{uu}{cc} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right) ,$$

worin ϱ eine für zwei gleichartige Theilchen positive, für zwei ungleichartige Theilchen negative Constante bezeichnet.

Es ergeben sich nun hieraus ganz ähnliche Folgerungen für die freien Bewegungen zweier Theilchen im Raume, welche in einer

Richtung senkrecht auf die sie verbindende Gerade ungleiche Geschwindigkeit besitzen, unter dem Einflusse ihrer eigenen Wechselwirkung, wie für die Art. 10 betrachteten Bewegungen zweier Theilchen in Richtung der geraden Linie r. Es ergiebt sich nämlich auch hier für zwei gleichartige Theilchen wieder die Unterscheidung derselben zwei Aggregatzustände, nämlich eines Aggregatzustandes, in welchem die beiden Theilchen Bewegungen machen mit periodischer Wiederkehr derselben Lage gegen einander, und eines Aggregatzustandes, in welchem die beiden Theilchen Bewegungen machen, durch welche sie von einander immer weiter entfernt werden und niemals zu derselben Lage zurückkehren. Einen Uebergang von dem einen Aggregatzustand zu dem andern giebt es nicht, so lange als beide Theilchen sich nur unter dem Einflusse ihrer eigenen Wechselwirkung bewegen.

13.

Eine Drehung der beiden Theilchen um einander fordert das Vorhandensein einer gewissen Anziehungskraft, wenn die beiden Theilchen bei dieser Drehung in gleicher Entfernung von einander bleiben sollen, und diese durch die Drehung geforderte Anziehungskraft wächst bei unveränderter Entfernung quadratisch mit der Drehungsgeschwindigkeit. Hiernach sollte man erwarten, dass es für zwei gleichartige elektrische Theilchen in einer Entfernung $r_0 < \varrho$ (wo sie einander anziehen) stets eine gewisse Drehungsgeschwindigkeit α_0 geben müsse, bei welcher die durch die Drehung geforderte Anziehungskraft der aus der Wechselwirkung der beiden Theilchen resultirenden Anziehungskraft gleich wäre, so dass die beiden um einander sich drehenden Theilchen bei dieser Drehungsgeschwindigkeit in gleicher Entfernung r_0 von einander blieben. Dies ist aber nicht der Fall, weil die aus der Wechselwirkung beider Theilchen resultirende Anziehungskraft nicht blos von der Entfernung r_0, sondern auch von der Drehungsgeschwindigkeit α_0 abhängt, und mit letzterer in solcher Weise wächst, dass sie stets grösser bleibt als die durch die Drehungsgeschwindigkeit geforderte Anziehungskraft, wonach also mit jeder solchen Drehung immer eine wechselseitige Annäherung der beiden Theilchen verbunden ist.

Es ergiebt sich nämlich leicht, dass bei zwei gleichartigen Theilchen e und e', wo ϱ einen positiven Werth hat, wenn $r = r_0$ und folglich $u = 0$ ist, es keinen Werth von α_0 giebt, für welchen $\frac{du}{dt} = 0$ wäre, was der Fall sein müsste, wenn beide Theilchen in unveränderter Entfernung r_0 bleiben sollten. Denn es ergiebt sich für $r = r_0$ aus der Gleichung am Schlusse von Art. 11

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r_0(r_0 - \varrho)}\left(1 + 2\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right),$$

und hieraus ferner, weil $\frac{du}{dt} - \frac{\alpha\alpha}{r} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{dV}{dr} = \frac{\varrho}{2}\frac{cc}{ee'} \cdot \frac{dV}{dr}$ war,

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\frac{cc}{r_0 - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + 2\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right),$$

wonach $\frac{du}{dt}$ nur dann $= 0$ sein kann, wenn

$$\alpha_0\alpha_0 = -\frac{1}{2}\frac{\varrho}{r_0}cc$$

wäre, was aber für einen positiven Werth von ϱ, d. i. wenn e und e' gleichartig sind, nicht möglich ist.

Ferner ergiebt sich, dass bei zwei gleichartigen Theilchen, wenn $r = r_0$ ist, $\frac{du}{dt}$ entweder positiv oder negativ sei, jenachdem $r_0 > \varrho$ oder $r_0 < \varrho$ ist. Die beiden Theilchen entfernen sich also stets von einander, wenn $r = r_0 > \varrho$, und sie nähern sich stets einander, wenn $r = r_0 < \varrho$ ist, welchen Werth auch α_0 haben möge.

14.

Ueber die Schwingungsdauer eines elektrischen Atomen-Paares.

Zwei gleichartige elektrische Theilchen, in einer Entfernung $r_0 < \varrho$ von einander (wo ihre relative Geschwindigkeit $= 0$ ist), bleiben nicht in dieser Entfernung, sondern nähern sich einander von $r = r_0$ bis $r = 0$ mit einer Geschwindigkeit, welche von $u = 0$ bis $u = \sqrt{\left(cc + \frac{r_0 r_0 \alpha_0\alpha_0}{\varrho} \cdot \frac{1}{r}\right)}$ wächst, d. i. ins Unendliche, wenn die Drehungsgeschwindigkeit α_0 im Augenblicke, wo $r = r_0$, von Null verschieden war. Es ergiebt sich daraus, dass der Zeitraum Θ, in welchem beide Theilchen von $r = r_0$ bis $r = 0$ sich nähern, einen

endlichen Werth hat. Dass im Augenblicke, wo $r = 0$ wird, der Werth der relativen Geschwindigkeit beider Theilchen

$$\sqrt{\left(cc + \frac{r_0 r_0 \alpha_0 \alpha_0}{\varrho} \cdot \frac{1}{r}\right)} = \pm \infty$$

wird, hat hier nur die Bedeutung, dass diese relative Geschwindigkeit von nun an als eine Entfernungsgeschwindigkeit $= + \infty$ zu setzen ist, während sie bis dahin als Näherungsgeschwindigkeit $= - \infty$ geworden war. Dies vorausgesetzt ergiebt sich leicht, dass die beiden Theilchen in einem zweiten gleich grossen Zeitraume Θ sich von $r = 0$ bis $r = r_0$ wieder von einander entfernen werden. Der Zeitraum 2Θ, in welchem die beiden Theilchen sich von der Entfernung $r = r_0$ bis $r = 0$ einander mit zunehmender Geschwindigkeit nähern und darauf von $r = 0$ bis $r = r_0$ mit abnehmender Geschwindigkeit sich von einander wieder entfernen, kann die Schwingungsdauer des von den beiden elektrischen Theilchen gebildeten Atomen-Paares genannt werden.

Es bleibt hienach noch die Aufgabe, die Schwingungsdauer 2Θ eines solchen Atomen-Paares zu bestimmen.

Diese Schwingungsdauer lässt sich aus der Gleichung

$$\frac{uu}{cc} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r_0 + r}{r} \cdot \frac{\alpha_0 \alpha_0}{cc}\right)$$

leicht ableiten, wenn man annimmt, dass r_0 darin nicht grösser als ϱ sei.

Betrachtet man nämlich zuerst den Grenzfall, wo $r_0 = \varrho$ ist, so ergiebt sich aus obiger Gleichung

$$uu = cc + \alpha_0 \alpha_0 + \varrho \alpha_0 \alpha_0 \cdot \frac{1}{r},$$

und hieraus, $u = \frac{dr}{dt}$ gesetzt,

$$dt = - dr \sqrt{\frac{r}{\varrho \alpha_0 \alpha_0 + (cc + \alpha_0 \alpha_0) r}}.$$

Durch Integration wird hieraus erhalten

$$\Theta = - \int_{\varrho}^{0} dr \sqrt{\frac{r}{\varrho \alpha_0 \alpha_0 + (cc + \alpha_0 \alpha_0) r}}.$$

Hiernach findet man

$$\Theta = \frac{\varrho}{cc + a_0 a_0} \sqrt{(cc + 2a_0 a_0)} - \frac{\varrho a_0 a_0}{(cc + a_0 a_0)^{\frac{3}{2}}} \log\left(\sqrt{\left(1 + \frac{cc}{a_0 a_0}\right)} + \sqrt{\left(2 + \frac{cc}{a_0 a_0}\right)}\right)$$

oder für kleine Werthe von $\frac{a_0}{c}$

$$\Theta = \frac{\varrho}{c}\left(1 - \frac{a_0 a_0}{cc} \log \frac{2c}{a_0}\right) .$$

Beschränkt man sich sodann auf die Betrachtung kleiner Schwingungen, d. i. solcher, wo $\frac{r_0}{\varrho}$ sehr klein ist, so ergiebt sich aus obiger Gleichung, wenn r_0 und r gegen ϱ darin als verschwindend angenommen werden,

$$uu = \frac{r_0 r_0 a_0 a_0}{\varrho} \cdot \frac{1}{r} + cc - \left(\frac{cc}{r_0} + \frac{a_0 a_0}{\varrho}\right) r ,$$

und hieraus, $u = \frac{dr}{dt}$ gesetzt,

$$cdt = -dr \sqrt{\frac{r}{\frac{r_0 r_0 a_0 a_0}{\varrho cc} + r - \left(\frac{1}{r_0} + \frac{a_0 a_0}{\varrho cc}\right) rr}} ,$$

was zu einem elliptischen Integrale führt. Für verschwindende Werthe von $\frac{a_0}{c}$ erhält man

$$cdt = -dr \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{r}{r_0}}} ,$$

woraus durch Integration folgt

$$\Theta = -\frac{1}{c} \int_{r_0}^{0} \frac{dr}{\sqrt{\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)}} = \frac{2r_0}{c} .$$

Wenn, wie vorausgesetzt worden, $r < \varrho$ ist, kann r_0 die Schwingungsamplitude genannt werden, und es ergiebt sich für kleine Werthe von $\frac{a_0}{c}$, dass bei kleinen Schwingungsamplituden die Schwingungsdauer 2Θ eines elektrischen Atomen-Paares der Schwingungsamplitude r_0 proportional ist. Der Faktor aber, womit r_0 zu multipliciren ist, um 2Θ zu erhalten, welcher für kleine Amplituden

constant $= \frac{4}{c}$ ist, nimmt bei grösseren Amplituden ab und wird $= \frac{2}{c}$ für die Amplitude $r = \varrho$.

Setzt man $c = 439450 . 10^6 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$, so ergiebt sich aus letzterer Bestimmung, dass der Werth von ϱ etwa zwischen $\frac{1}{4000}$ und $\frac{1}{8000}$ Millimeter liegen müsste, wenn diese Schwingungen den Lichtschwingungen an Schnelligkeit gleich sein sollten.

Die Verschiedenheit der elektrischen Theilchen e, e' und ihrer Massen ε, ε' hat bei kleinen Werthen von $\frac{a_0}{c}$ und bei kleinen Amplituden auf die Schwingungen gar keinen Einfluss, bei grösseren Amplituden aber nur insofern, als der Werth von ϱ davon abhängt.

15.

Anwendbarkeit auf chemische Atomengruppen.

Die Unterscheidung zweier oder mehrerer Aggregatzustände der Körper, jenachdem sie aus einfachen Atomen, oder aus Atomenpaaren, oder aus Gruppen von noch mehr als zwei Atomen bestehen, hat in der Chemie grosse Bedeutung erlangt. Es findet bald der eine, bald der andere Aggregatzustand statt, und bei vielen chemischen Processen findet ein Uebergang von dem einen zum andern statt, aber die bei solchen Uebergängen eintretenden Zwischenzustände können nicht beharren, und jene Aggregatzustände stehen daher als beharrliche Zustände von einander ganz isolirt da.

Nun leuchtet ein, dass die Beharrlichkeit einiger Atomenzustände, die als besondere Aggregatzustände unterschieden werden, sowie der Mangel der Beharrlichkeit aller andern Atomenzustände, ihren Grund nur in den Gesetzen der Wechselwirkung der Atome haben könne, d. h. in der Verschiedenheit der Kräfte, welche die Atome auf einander ausüben nach Verschiedenheit der Verhältnisse, unter denen sie sich gegen einander befinden. Der Grund der Beharrlichkeit einiger Atomenzustände und des Mangels dieser Beharrlichkeit bei andern ist in solchen Gesetzen der Wechselwirkung der Atome bisher keineswegs nachgewiesen worden, und es dürfte auch schwerlich gelingen, diesen Grund in solchen Gesetzen

der Wechselwirkung aufzufinden, wie man für ponderabele Atome aufzustellen und anzunehmen bisher versucht hat.

Es liegt daher die Frage nahe, ob der Grund von der Beharrlichkeit gewisser Atomenzustände nicht vielleicht in solchen Gesetzen der Wechselwirkung zu finden sei, wie hier für die elektrischen Theilchen aufgestellt und angenommen worden sind. Es dürften daher auch in dieser Beziehung die in den vorhergehenden Artikeln entwickelten Bewegungen zweier elektrischen Theilchen unter Einfluss der ihnen zugeschriebenen Wechselwirkung von Interesse sein, weil dadurch wirklich ein Grund, worauf die Existenz solcher beharrlicher Aggregatzustände beruhen könne, nachgewiesen worden ist. Und es dürfte hiebei insbesondere zu beachten sein, dass dieselben Kräfte, welche den von einfachen und den von Atomenpaaren gebildeten Aggregatzustand der Elektricität bedingen, möglicherweise auch zwei ebensolche Aggregatzustände ponderabeler Körper bedingen können. Denn bei der allgemeinen Verbreitung der Elektricität darf angenommen werden, dass an jedem ponderabelen Atome ein elektrisches Atom haftet. Haften aber elektrische Atome fest an ponderabelen, so wird in den Verhältnissen der elektrischen Atome nichts geändert als die Massen, welche von den auf die elektrischen Atome wirkenden Kräften zu bewegen sind. Diese Massen sind aber in obiger Entwickelung unbestimmt gelassen und blos mit ε und ε' bezeichnet worden, während die elektrischen Theilchen selbst, denen die Massen ε und ε' angehören, unabhängig von der Kenntniss der Werthe ε und ε', durch die messbaren Grössen e und e' bestimmt worden sind. Nimmt man nun die Werthe von ε und ε' so gross, dass darin die Massen der an den elektrischen Atomen haftenden ponderabelen Atome mit eingeschlossen sind; so finden alle zunächst blos für elektrische Atome gefundenen Bestimmungen auch auf die mit elektrischen verbundenen ponderabelen Atome Anwendung.

16.

Ueber Aggregatzustand und Schwingung zweier ungleichartigen elektrischen Theilchen.

Für zwei ungleichartige elektrische Theilchen gelten dieselben Gleichungen, wie für zwei gleichartige, nämlich die Art. 14 gefundenen

$$\frac{uu}{cc} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right)$$

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right) - 1\right)$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{(r - \varrho)^2}\left(\frac{r_0 - \varrho}{r_0} - \left(1 - \frac{3r - 2\varrho}{r^3} \cdot r_0 r_0\right)\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right) ,$$

worin $\varrho = 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{cc}$ ist; nur hat ϱ bei ungleichartigen Theilchen einen negativen Werth, weil das Product ee' negativ ist. Hiezu kommt noch die Gleichung $\alpha r = \alpha_0 r_0$ (weil nämlich nur solche Bewegungen betrachtet werden, welche zwei elektrische Theilchen unter blossem Einfluss ihrer eigenen Wechselwirkung machen), woraus endlich noch die Gleichung folgt

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\varrho cc}{ee'} \cdot \frac{dV}{dr} + \frac{r_0 r_0 \alpha_0\alpha_0}{r^3} .$$

Hieraus ergiebt sich ebenso wie bei zwei gleichartigen elektrischen Theilchen, dass,

$$\text{für } r = r_0,\ \frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r_0(r_0 - \varrho)}\left(1 + 2\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\frac{cc}{r_0 - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + 2\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right) ,$$

und dass, wenn zugleich $\alpha_0 = \sqrt{-\frac{\varrho cc}{2r_0}}$ (was jetzt einen reellen Werth hat, weil $-\varrho = -2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{cc}$ für ungleichartige Theilchen positiv ist), $\frac{du}{dt} = 0$ wird, wonach also beide Theilchen, wenn $r = r_0$ und $\alpha_0 = \sqrt{-\frac{\varrho cc}{2r_0}}$ ist, bei ihrer Drehung um einander in stets gleicher Entfernung r_0 bleiben, ein Fall, der bei zwei gleichartigen Theilchen gar nicht vorkommen konnte.

Es ergiebt sich aber ferner aus der Gleichung

$$\frac{uu}{cc} = \frac{r-r_0}{r-\varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r+r_0}{r}\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right),$$

oder, wenn der constante Werth $-\frac{r_0 r_0 \alpha_0 \alpha_0}{\varrho cc} = n$ gesetzt wird, aus folgender Gleichung

$$-\frac{r-\varrho}{\varrho}\cdot\frac{uu}{cc} = \left(\frac{r}{r_0} - 1\right)\cdot\left(n\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r}\right) - 1\right),$$

dass ausser dem Werthe $r = r_0$, für welchen $u = 0$ gegeben ist, im Allgemeinen noch ein anderer Werth von $r = \frac{nr_0}{r_0 - n}$ vorhanden ist, für welchen ebenfalls $u = 0$ ist.

Diese beiden Werthe von r, für welche $u = 0$ ist, sind aber, nach dem Werthe von n, bald mehr, bald weniger von einander verschieden, und fallen für $n = \frac{r_0}{2}$, d. i. für $\alpha_0 = \sqrt{-\frac{\varrho cc}{2r_0}}$, ganz zusammen, und nur dann, wenn die beiden Werthe von r, für welche $u = 0$ ist, so zusammenfallen, tritt der vorher erwähnte Fall ein, dass zugleich $u = 0$ und $\frac{du}{dt} = 0$ sind, folglich beide Theilchen bei ihrer Drehung um einander in gleicher Entfernung bleiben.

In allen übrigen Fällen, wenn z. B. für $r = 2n - x$ (wo $x < n$ sei) die Geschwindigkeit $u = 0$ ist, giebt es noch einen zweiten Werth von $r = 2n + \frac{nx}{n-x}$, für den ebenfalls die Geschwindigkeit $u = 0$ ist. $\frac{du}{dt}$ hat alsdann für $r = 2n - x$ einen positiven Werth, nimmt aber ab und wird $= 0$ zwischen $r = 2n - x$ und $r = 2n + \frac{nx}{n-x}$, so dass, für $r = 2n + \frac{nx}{n-x}$, $\frac{du}{dt}$ einen negativen Werth hat. Man ersieht hieraus, dass Abstossung der beiden Theilchen statt findet von $r = 2n - x$ bis zu demjenigen Werthe von r, für welchen $\frac{du}{dt} = 0$ ist, und Anziehung von da an bis zu $r = 2n + \frac{nx}{n-x}$, wonach beide Theilchen immer in schwingender Bewegung gegen einander innerhalb der angegebenen Grenzen bleiben müssen.

17.

Ueber Ampèresche Molecularströme.

Der eben beschriebene moleculare Aggregatzustand zweier ungleichartigen elektrischen Theilchen, bei welchem nämlich die Entfernung der beiden Theilchen abwechselnd zunimmt und wieder abnimmt, zwischen genau bestimmten Grenzen, und die Bahn, in welcher das eine Theilchen um das andere sich bewegt, an diesen beiden Grenzen in eine Kreisbahn übergeht, verdient besonders in solchen Fällen nähere Beachtung, wo das eine Theilchen als ruhend und blos das andere Theilchen als in Kreisbewegung um ersteres befindlich betrachtet werden darf.

Das Verhältniss beider Theilchen in Beziehung auf Theilnahme an der Bewegung hängt von dem Verhältniss ihrer Massen ε und ε' ab, wobei nach Art. 15 in den Werthen von ε und ε' die Massen der an den elektrischen Atomen haftenden ponderabelen Atome mit eingeschlossen werden müssen. Es sei e das positiv elektrische Theilchen; das negative sei demselben entgegengesetzt gleich und werde daher mit $-e$ (statt mit e') bezeichnet. Nur an diesem letztern hafte ein ponderabeles Atom, wodurch seine Masse so vergrössert werde, dass die Masse des positiven Theilchens dagegen als verschwindend betrachtet werden dürfe. Das Theilchen $-e$ wird dann als ruhend, und blos das Theilchen $+e$ als in Bewegung um das Theilchen $-e$ herum befindlich betrachtet werden können.

Es stellen alsdann die beiden ungleichartigen, in dem beschriebenen molecularen Aggregatzustande befindlichen Theilchen einen Ampèreschen Molecularstrom dar; denn es lässt sich zeigen, dass sie den Annahmen ganz entsprechen, welche Ampère von den Molecularströmen gemacht hat.

Um dies zu zeigen, werde der Ausdruck der Kraft entwickelt, welchen das bewegte Theilchen e auf irgend ein gegebenes Stromelement ausübt. Man bezeichne mit ds' die Länge des gegebenen Stromelements, ferner mit $+e'ds'$ die positive und mit $-e'ds'$ die negative Elektricität, die es enthält; endlich mit u' die Geschwindigkeit des positiven Theilchens $+e'ds'$ und mit $-u'$ die Geschwindigkeit des negativen Theilchens $-e'ds'$. Sodann bezeichne

r den Abstand des Stromelements vom Theilchen e, u die Geschwindigkeit des Theilchens e; x, y, z die Coordinaten des Theilchens e; x', y', z' die Coordinaten des Stromelements; Θ und Θ' die Winkel der Richtungen von u und u' mit r; ε den Winkel der Richtung von u mit der Richtung von u'.

Man transformire sodann den allgemeinen Ausdruck der Abstossungskraft zweier elektrischen Theilchen e und e' beim Abstande r, nämlich

$$\frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{cc}\frac{ddr}{dt^2}\right)$$

auf folgende Weise (siehe Beer, Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik S. 251). Man differentiire nämlich die Gleichung

$$rr = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

in Beziehung auf die Zeit t; so erhält man

$$r\frac{dr}{dt} = (x-x')\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right) + (y-y')\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt}\right) + (z-z')\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt}\right) ,$$

oder auch

$$r\frac{dr}{dt} = r(u\cos\Theta - u'\cos\Theta') .$$

Durch nochmalige Differentiirung erhält man

$$\frac{dr^2}{dt^2} + r\frac{ddr}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt}\right)^2$$
$$+ (x-x')\left(\frac{ddx}{dt^2} - \frac{ddx'}{dt^2}\right) + (y-y')\left(\frac{ddy}{dt^2} - \frac{ddy'}{dt^2}\right) + (z-z')\left(\frac{ddz}{dt^2} - \frac{ddz'}{dt^{2'}}\right)$$

worin

$$\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt}\right)^2 = u^2 + u'^2 - 2uu'\cos\varepsilon .$$

Bezeichnet man nun die Beschleunigung des einen Theilchens, deren Componenten $\frac{ddx}{dt^2}$, $\frac{ddy}{dt^2}$, $\frac{ddz}{dt^2}$ sind, mit N, und mit ν den Winkel ihrer Richtung mit r, und auf gleiche Weise die Beschleunigung des andern Theilchens, deren Componenten $\frac{ddx'}{dt^2}$, $\frac{ddy'}{dt^2}$, $\frac{ddz'}{dt^2}$ sind, mit N', und mit ν' den Winkel ihrer Richtung mit r, so ergiebt sich

$$\frac{x-x'}{r}\left(\frac{ddx}{dt^2} - \frac{ddx'}{dt^2}\right) + \frac{y-y'}{r}\left(\frac{ddy}{dt^2} - \frac{ddy'}{dt^2}\right) + \frac{z-z'}{r}\left(\frac{ddz}{dt^2} - \frac{ddz'}{dt^2}\right) = N\cos\nu - N'\cos\nu' .$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$2\frac{dr^2}{dt^2} + 2r\frac{ddr}{dt^2} = 2(u^2 + u'^2 - 2uu'\cos\varepsilon) + 2r(N\cos\nu - N'\cos\nu')$$

$$3\frac{dr^2}{dt^2} = 3(u\cos\Theta - u'\cos\Theta')^2 .$$

Die letztere Gleichung von der ersteren subtrahirt, giebt

$$-\frac{dr^2}{dt^2} + 2r\frac{ddr}{dt^2} = 2(u^2 + u'^2 - 2uu'\cos\varepsilon) - 3(u\cos\Theta - u'\cos\Theta')^2 + 2r(N\cos\nu - N'\cos\nu') ,$$

woraus der allgemeine Ausdruck der Abstossungskraft zweier elektrischen Theilchen e und e' im Abstande r, nämlich

$$\frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{cc}\frac{ddr}{dt^2}\right)$$

transformirt sich ergiebt, nämlich

$$= \frac{ee'}{ccrr}(cc + 2(u^2 + u'^2 - 2uu'\cos\varepsilon) - 3(u\cos\Theta - u'\cos\Theta')^2 + 2r(N\cos\nu - N'\cos\nu') .$$

Setzt man nun hierin für das Theilchen e' die positive Elektricität im gegebenen Stromelemente, nämlich $+e'ds'$, so erhält man die Abstossungskraft

$$\frac{ee'ds'}{ccrr}(cc + 2(u^2 + u'^2 - 2uu'\cos\varepsilon) - 3(u\cos\Theta - u'\cos\Theta')^2 + 2r(N\cos\nu - N'\cos\nu') ;$$

setzt man aber für das Theilchen e' die negative Elektricität im gegebenen Stromelemente, nämlich $-e'ds'$, so erhält man, weil alsdann $\varepsilon + \pi$, $\Theta' + \pi$ und $\nu' + \pi$ an die Stelle von ε, Θ' und ν' tritt, die Abstossungskraft

$$\frac{ee'ds'}{ccrr}(- cc - 2(u^2 + u'^2 + 2uu'\cos\varepsilon) + 3(u\cos\Theta + u'\cos\Theta')^2 - 2r(N\cos\nu + N'\cos\nu') ;$$

folglich zusammen, die Abstossungskraft des bewegten Theilchens e auf das ganze Stromelement,

$$\frac{4ee'ds'}{ccrr}(3uu'\cos\Theta\cos\Theta' - 2uu'\cos\varepsilon - rN'\cos\nu') .$$

Die Abstossungskraft des ruhenden Theilchens $-e$ auf das ganze Stromelement dagegen, wo $u = 0$ zu setzen, ist

$$= + \frac{4ee'ds'}{ccrr} \cdot rN' \cos\nu' \; ,$$

wenn r hierin den Abstand des ruhenden Theilchens $-e$ von dem gegebenen Stromelemente bezeichnet. Der Unterschied dieses letzteren Werthes von r von dem früheren (nämlich von dem Abstande des in Bewegung um $-e$ herum befindlichen Theilchens $+e$ von dem gegebenen Stromelemente) darf aber als verschwindend kleiner Bruchtheil von r betrachtet werden, und es ergiebt sich alsdann die Abstossungskraft des bewegten Theilchens $+e$ und des ruhenden $-e$ zusammen auf das Stromelement

$$= \frac{4ee'ds'}{ccrr}\,(3\cos\Theta\cos\Theta' - 2\cos\varepsilon)\,.\,uu' \; .$$

Wollte man an die Stelle des bewegten elektrischen Theilchens $+e$ ein zweites Stromelement setzen, dessen positive, mit der Geschwindigkeit $+\frac{1}{2}u$ bewegte, Elektricität mit $+eds$, und dessen negative, mit der Geschwindigkeit $-\frac{1}{2}u$ bewegte, Elektricität mit $-eds$ bezeichnet werde; so erhält man die Abstossungskraft dieser beiden Stromelemente auf einander

$$= \frac{4eds\,.\,e'ds'}{ccrr}\,(3\cos\Theta\cos\Theta' - 2\cos\varepsilon)\,.\,uu' \; ,$$

d. i die nämliche Abstossungskraft wie vorher, wenn das vorher mit $+e$ bezeichnete (mit der Geschwindigkeit u bewegte) elektrische Theilchen der im zweiten Stromelemente enthaltenen mit $+eds$ bezeichneten (mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2}u$ bewegten) positiven Elektricität gleich gesetzt wird.

Es ergiebt sich hieraus, dass die Kreisbewegung des elektrischen Theilchens $+e$ um das ruhende Theilchen $-e$ einen kreisförmigen elektrischen Doppelstrom vertritt, wenn die in letzterem enthaltene positive Elektricität $= +e$ ist und sich mit der halben Geschwindigkeit in ihrer Kreisbahn bewegt, wie jenes elektrische Theilchen $+e$, und wenn die in demselben Strome enthaltene negative Elektricität $= -e$ ist und sich mit derselben Geschwindigkeit wie die positive in entgegengesetzter Richtung bewegt.

Man ersieht hieraus, dass ein elektrisches Theilchen $+e$, wenn

es in Kreisbewegung um das elektrische Theilchen — e sich befindet, auf alle galvanischen Ströme dieselben Wirkungen ausübt, welche Ampère von seinen Molecularströmen angenommen hat.

Die von Ampère angenommenen Molecularströme unterscheiden sich aber von allen andern galvanischen Strömen wesentlich dadurch, dass sie, nach Ampères Annahme, ohne elektromotorische Kraft beharren, während alle andern galvanischen Ströme, dem Ohmschen Gesetze gemäss, der elektromotorischen Kraft proportional sind, also mit der elektromotorischen Kraft zugleich verschwinden. Es leuchtet nun aber ein, dass obiges elektrisches Theilchen + e seine Kreisbewegung um das elektrische Theilchen — e, ohne elektromotorische Kraft, von selbst immer fortsetzt, und also auch in dieser Beziehung der Ampèreschen Annahme vom Molecularstrome ganz entspricht.

Man erhält also auf diese Weise eine einfache Construction der von Ampère, ohne Beweis von ihrer Möglichkeit, angenommenen Molecularströme, begründet auf die Gesetze des molecularen Aggregatzustandes zweier ungleichartigen elektrischen Theilchen, wie sie im vorigen Artikel gefunden worden.

18.

Bewegungen zweier ungleichartigen elektrischen Theilchen im Raume, unter Einfluss einer elektrischen Scheidungskraft.

Bezeichnet $\pi + v$ den Winkel, welchen die Richtung der elektrischen Scheidungskraft mit r bildet, und bezeichnet a die Grösse der von der Scheidungskraft abhängigen relativen Beschleunigung beider Theilchen; so sind — $a \cos v$ und $a \sin v$ die Componenten von a, von denen erstere den von der Scheidungskraft abhängigen Theil der relativen Beschleunigung $\frac{du}{dt}$, letztere den von der Scheidungskraft abhängigen Theil von $\frac{d\alpha}{dt}$ ausdrückt, wenn α den Unterschied der Geschwindigkeiten bezeichnet, mit denen die beiden Theilchen in einer gegen r senkrechten Richtung sich bewegen. — Vorausgesetzt wird, dass die Richtung der Scheidungskraft in der Ebene liegt, in welcher die beiden Theilchen sich um einander drehen. —

Bringt man nun die erstere Componente, nämlich $-a\cos v$, als den von der Scheidungskraft abhängigen Theil von $\frac{du}{dt}$, und ferner $\frac{\alpha\alpha}{r}$, als den von der Geschwindigkeit α abhängigen Theil von $\frac{du}{dt}$, in Abrechnung von dem ganzen Werthe der Beschleunigung $\frac{du}{dt}$; so ergiebt die Differenz $\left(\frac{du}{dt} + a\cos v - \frac{\alpha\alpha}{r}\right)$ denjenigen Theil der relativen Beschleunigung, der von der Kraft herrührt, welche die beiden Theilchen e und e' auf einander ausüben, nämlich $\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{dV}{dr} = \frac{\varrho}{2}\frac{cc}{ee'}\cdot\frac{dV}{dr}$, wonach folgende Gleichung erhalten wird:

$$\frac{du}{dt} + a\cos v - \frac{\alpha\alpha}{r} = \frac{\varrho}{2}\frac{cc}{ee'}\cdot\frac{dV}{dr}\,.$$

Bringt man die letztere Componente, nämlich $a\sin v$, als den von der Scheidungskraft abhängigen Theil der Beschleunigung $\frac{d\alpha}{dt}$, von dem ganzen Werthe $\frac{d\alpha}{dt}$ in Abrechnung, so giebt die Differenz $\left(\frac{d\alpha}{dt} - a\sin v\right)$ denjenigen Theil von der ganzen Beschleunigung $\frac{d\alpha}{dt}$, der von der vorhandenen Bewegung unter blosser Einwirkung der von beiden Theilchen auf einander ausgeübten Kräfte herrührt. Unter blosser Einwirkung der von beiden Theilchen auf einander ausgeübten Anziehungs- oder Abstossungskräfte würde aber das in einem gegebenen Zeitelemente dt beschriebene Flächenelement $\alpha r dt$ einen constanten Werth haben oder es würde $\alpha\frac{dr}{dt} + r\frac{d\alpha}{dt} = 0$ sein; folglich der hieraus sich ergebende Theil der Beschleunigung $\frac{d\alpha}{dt}$

$$= -\frac{\alpha}{r}\frac{dr}{dt}\,.$$

Durch Gleichsetzung dieses Theiles mit obiger Differenz erhält man die Gleichung

$$\frac{d\alpha}{dt} - a\sin v = -\frac{\alpha}{r}\frac{dr}{dt}\,.$$

Hiezu kommt endlich noch, wie von selbst einleuchtet, die dritte Gleichung, nämlich

$$dv = \frac{\alpha dt}{r}\,.$$

Man hat hiernach für die 4 veränderlichen Grössen r, u, α, v folgende 3 Gleichungen:

$$a \cos v - \frac{\alpha\alpha}{r} = \frac{\varrho cc}{2ee'} \cdot \frac{dV}{dr} - \frac{du}{dt} \qquad (1)$$

$$a \sin v - \frac{\alpha dr}{r dt} = \frac{d\alpha}{dt} \qquad (2)$$

$$dv = \frac{\alpha dt}{r} \qquad (3)$$

Multiplicirt man Gleichung (1) mit $dr = udt$, und Gleichung (2) mit $rdv = \alpha dt$, so erhält man

$$a \cos v \,.\, dr - \frac{\alpha\alpha dr}{r} = \frac{\varrho cc}{2ee'} \cdot \frac{dV}{dr} dr - udu \qquad (4)$$

$$ar \sin v \,.\, dv - \frac{\alpha\alpha dr}{r} = \alpha d\alpha \,. \qquad (5)$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen giebt

$$a \,.\, d(r \cos v) = \frac{\varrho cc}{2ee'} \cdot \frac{dV}{dr} dr - \alpha d\alpha - udu \,. \qquad (6)$$

Ferner erhält man aus (2) und (3)

$$-\, 2ar^3 .\, d(\cos v) = d(\alpha^2 r^2) \,. \qquad (7)$$

Durch Integration der Differentialgleichung (6) erhält man, nachdem man mit 2 multiplicirt und $V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{uu}{cc} - 1\right)$ gesetzt hat,

$$2ar \cos v = \frac{\varrho cc}{r}\left(\frac{uu}{cc} - 1\right) - \alpha\alpha - uu + \text{Const.} \qquad (8)$$

und hieraus, weil $r = r_0$, $\alpha = \alpha_0$ und $\cos v = -1$ für $u = 0$ ist,

$$-\, 2ar_0 = -\frac{\varrho cc}{r_0} - \alpha_0\alpha_0 + \text{Const.} \qquad (9)$$

Die Differenz von (8) und (9) giebt dann

$$2ar \cos v + 2ar_0 = \left(\frac{\varrho}{r} - 1\right)uu + \varrho cc\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) - \alpha\alpha + \alpha_0\alpha_0 \,. \qquad (10)$$

Durch Integration der Differentialgleichung (7) erhält man, nachdem man mit r^3 dividirt hat,

$$-\, 2a \cos v = \frac{\alpha\alpha}{r} + 3\int \frac{\alpha\alpha dr}{rr}$$

oder mit r multiplicirt

$$-\, 2ar \cos v = \alpha\alpha + 3r\int \frac{\alpha\alpha dr}{rr} \,, \qquad (11)$$

wonach die Summe von (10 und (11)

$$2ar_0 = \left(\frac{\varrho}{r} - 1\right)uu + \varrho cc\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) + \alpha_0\alpha_0 + 3r\int\frac{\alpha\alpha dr}{rr},$$

und also

$$uu = \frac{1}{r-\varrho}\left(\varrho cc\left(\frac{r}{r_0} - 1\right) + r\alpha_0\alpha_0 + 3rr\int\frac{\alpha\alpha dr}{rr} - 2ar_0 r\right). \quad (12)$$

Aus Gleichung (3) ergiebt sich ferner, weil $dr = udt$ ist,

$$dv = \frac{\alpha}{u}\frac{dr}{r}, \quad (13)$$

und da nach Gleichung (7)

$$d(\cos v) = -\frac{d(\alpha^2 r^2)}{2ar^3}$$

und nach Gleichung (11)

$$\cos v = -\frac{1}{2a}\left(\frac{\alpha\alpha}{r} + 3\int\frac{\alpha^2 dr}{r^2}\right);$$

so ergiebt sich durch Substitution dieser Werthe in die identische Gleichung

$$dv = -\frac{d(\cos v)}{\sqrt{(1 - \cos v^2)}},$$

nach Gleichung (13)

$$\frac{\alpha}{u}\frac{dr}{r} = \frac{\frac{d(\alpha^2 r^2)}{2ar^3}}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4a^2}\left(\frac{\alpha^2}{r} + 3\int\frac{\alpha^2 dr}{r^2}\right)^2\right)}}$$

und hieraus und aus (12)

$$uu = \left(\frac{\alpha r^2 dr}{d(\alpha^2 r^2)}\right)^2 \cdot \left(4a^2 - \left(\frac{\alpha^2}{r} + 3\int\frac{\alpha^2 dr}{r^2}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{r-\varrho}\left(\frac{r-r_0}{r_0}\varrho c^2 + r(\alpha_0^2 - 2ar_0) + \varrho r^2\int\frac{\alpha^2 dr}{r^2}\right), \quad (14)$$

oder folgende Gleichung für die zwei Veränderlichen r und α:

$$4a^2 = \left(\frac{\alpha^2}{r} + 3\int\frac{\alpha^2 dr}{r^2}\right)^2 + \frac{4}{r-\varrho}\left(\frac{d(\alpha r)}{dr}\right)^2 \cdot \left(\frac{r-r_0}{r_0}\cdot\frac{\varrho c^2}{r^2} + \frac{\alpha_0^2 - 2ar_0}{r} + 3\int\frac{\alpha^2 dr}{r^2}\right) \text{*)} \quad (15)$$

*) Verschwindet die Scheidungskraft a, so soll nach Art. 11 αr einen constanten Werth annehmen. Für einen constanten Werth von αr und für $a = 0$ reducirt sich aber Gleichung (15) auf

Beschränkt man sich nun auf kleine Werthe von a, für welche αr zwar nicht, wie für $a = 0$ nach Art. 11, constant ist, aber doch nur wenig von einem constanten Werthe $\alpha_0 r_0 = n$ abweicht, so kann

$$\alpha r = n\,(1 + \varepsilon) \tag{16}$$

gesetzt werden, wo ε stets einen sehr kleinen Werth hat. Es folgt dann hieraus

$$\frac{\alpha^2}{r} = (1 + 2\varepsilon)\frac{n^2}{r^3} \tag{17}$$

$$\frac{d(\alpha r)}{dr} = n\frac{d\varepsilon}{dr}\,. \tag{18}$$

Ferner folgt aus (11) und (17)

$$\int\frac{d\varepsilon}{r^3} = -\frac{a}{n^2}\cos v$$

oder

$$d\varepsilon = \frac{a}{n^2}r^3\sin v\,dv\,, \tag{19}$$

aus (18) und (19)

$$\frac{d\,(\alpha r)}{dr} = \frac{a}{n}r^3\sin v\,.\,\frac{dv}{dr} \tag{20}$$

und aus (17) und (19)

$$\frac{\alpha^2}{r} = \frac{n^2}{r^3} + \frac{2a}{r^3}\int r^3\sin v\,dv\,. \tag{21}$$

Substituirt man nun die Werthe von $\frac{d(\alpha r)}{dr}$ und $\frac{\alpha^2}{r}$ aus (20) und (21) in folgender aus (11) und (15) sich ergebenden Gleichung, nämlich

$$a^2\sin v^2 = \frac{1}{r-\varrho}\cdot\left(\frac{d(\alpha r)}{dr}\right)^2\cdot\left(\frac{r-r_0}{r_0}\cdot\frac{\varrho c^2}{r^2} + \frac{\alpha_0^2 - 2ar_0}{r} - \frac{\alpha^2}{r} - 2a\cos v\right), \tag{22}$$

so erhält man, wenn für n wieder sein Werth $\alpha_0 r_0$ gesetzt wird, folgende Gleichung zwischen r und v, nämlich

$$0 = \frac{\alpha^2}{r} + 3\int\frac{\alpha^2 dr}{r^2}\,,$$

was mit dem constanten Werthe $\alpha^2 r^2$ dividirt die identische Gleichung

$$0 = \frac{1}{r^3} + 3\int\frac{dr}{r^4}$$

giebt, in Uebereinstimmung mit Art. 11.

$$\frac{\alpha_0^2 r_0^2}{r^4 c^2}\cdot\frac{dr^2}{dv^2}=\frac{r-r_0}{r-\varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0}+\frac{r+r_0}{r}\cdot\frac{\alpha_0^2}{c^2}\right)-\frac{2a}{(r-\varrho)c^2}\left(r_0 r+\frac{3}{r}\int r^2\cos v\,dr\right).^{*)} \quad (23)$$

Durch Differentiation dieser Gleichung, nachdem sie mit $r(r-\varrho)$ multiplicirt worden, erhält man

$$\frac{d}{dr}\left((r-\varrho)\frac{\alpha_0^2 r_0^2}{r^3 c^2}\cdot\frac{dr^2}{dv^2}\right)=\frac{\varrho r}{r_0}+(r+r_0)\frac{\alpha_0^2}{c^2}+(r-r_0)\left(\frac{\varrho}{r_0}+\frac{\alpha_0^2}{c^2}\right)$$
$$-\frac{2a}{c^2}(2r_0 r+3r^2\cos v)\ .$$

Setzt man hierin, um einen speciellen Fall zu betrachten,

$$\varrho=-\frac{2r_0}{cc}(\alpha_0^2+ar_0)\ ,$$

d. i. der Fall, in welchem für $a=0$ nach Art. 16 beide Theilchen bei ihrer Drehung um einander in gleicher Entfernung bleiben, so erhält man

$$\frac{d}{dr}\left((r-\varrho)\frac{\alpha_0^2 r_0^2}{r^3 c^2}\cdot\frac{dr^2}{dv^2}\right)=-\frac{2(r-r_0)}{cc}(\alpha_0^2+ar_0)-\frac{6ar}{cc}(r_0+r\cos v)\ ,$$

dessen Werth $=0$ ist, erstens, wenn $u=0$ und folglich $r=r_0$, $\alpha=\alpha_0$ und $\cos v=-1$ ist; zweitens, wenn $r_0-r=\frac{3ar(r_0+r\cos v)}{\alpha_0^2+ar_0}$ ist, ein Fall, welcher für kleine Werthe von a eintritt, wenn $\cos v=+1$, und alsdann näherungsweise $r=r_0-6\frac{ar_0^2}{\alpha_0^2}$ wird.

Es ergiebt sich hieraus, dass, so wie ohne Scheidungskraft nach Art. 16 von zwei ungleichartigen elektrischen Theilchen, für welche $\varrho=-2r_0\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}$ war, das eine um das andere in einer Kreisbahn sich bewegen konnte, so auch mit Scheidungskraft $(=a)$ von zwei ungleichartigen elektrischen Theilchen, für welche

---

*) Aus obiger Gleichung erhält man, da für $\frac{dr}{dv}$ auch $\frac{r}{\alpha}u$ gesetzt werden kann,

$$\frac{\alpha_0^2 r_0^2}{\alpha^2 r^2}\cdot\frac{uu}{cc}=\frac{r-r_0}{r-\varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0}+\frac{r+r_0}{r}\cdot\frac{\alpha_0^2}{c^2}\right)-\frac{2a}{(r-\varrho)c^2}\left(r_0 r+\frac{3}{r}\int r^2\cos v\,dr\right)\ ,$$

was, wenn die Scheidungskraft a verschwindet und also nach Art. 11 $\alpha r=\alpha_0 r_0$ wird, in die Gleichung

$$\frac{uu}{cc}=\frac{r-r_0}{r-\varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0}+\frac{r+r_0}{r}\cdot\frac{\alpha_0^2}{c^2}\right)$$

übergeht, d. i. dieselbe Gleichung, welche für diesen Fall Art. 11 schon gefunden worden ist.

$\varrho = -2r_0\left(\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc} + ar_0\right)$ ist, das eine um das andere in einer geschlossenen Bahn sich bewegen könne, die jedoch keine Kreisbahn ist. Der Abstand der beiden Theilchen von einander ist nämlich verschieden, jenachdem das bewegte Theilchen von dem Centraltheilchen aus gerechnet in der Richtung der Scheidungskraft vorwärts oder rückwärts liegt, nämlich in letzterem Falle $= r_0$, im ersteren $= r_0 - 6\frac{r_0 r_0}{\alpha_0\alpha_0}a$.

Man kann eine solche excentrische Lage des einen Theilchens im Flächenraume der um dieses Theilchen vom andern beschriebenen Bahn (unter Einwirkung einer Scheidungskraft) mit einer Scheidung ruhender elektrischer Fluida unter Einwirkung einer gleichen Scheidungskraft vergleichen, wobei jedoch der merkwürdige Unterschied hervortritt, dass jene Scheidung im umgekehrten Sinne statt findet wie diese.

Es geht daraus hervor, dass in allen Conductoren, welche unter Einwirkung von elektrischen Scheidungskräften auf bekannte Weise geladen werden, die Elektricität nicht blos im Aggregatzustande von Ampèreschen Molecularströmen enthalten sein kann, weil sonst die von der Scheidungskraft hervorgebrachte Scheidung im entgegengesetzten Sinne, als es wirklich der Fall ist, stattfinden müsste. Wäre auch alle Elektricität in einem solchen Conductor, ehe die Scheidungskraft zu wirken begann, im Aggregatzustande von Ampèreschen Molecularströmen vorhanden gewesen; so müssten doch unter diesen Molecularströmen solche gewesen sein, welche unter dem Einfluss der Scheidungskraft nicht fortbestehen könnten (indem die beiden Theilchen fortführen sich in geschlossener Bahn um einander zu drehen), sondern aufgelöst würden, indem die beiden Theilchen sich immer weiter von einander entfernten, bis sie zu den Grenzen des Conductors gelangten. Unter dem Einfluss der Scheidungskraft würden die positiven und negativen Theilchen der aufgelösten Molecularströme nur bei einer gewissen Vertheilung an der Oberfläche des Conductors in Ruhe verharren können; beim Aufhören der Scheidungskraft würden sie aber wieder in Bewegung gerathen, so lange, bis sie sich paarweise wieder zu Ampèreschen Molecularströmen vereinigt hätten.

19.

Elektrische Ströme in Conductoren.

Wäre in Conductoren alle Elektricität, ehe eine Scheidungskraft zu wirken beginnt, im Aggregatzustande Ampère scher Molecularströme enthalten, die aber unter dem Einfluss einer Scheidungskraft nicht fortbestehen könnten, sondern aufgelöst würden, indem die beiden um einander sich drehenden ungleichartigen elektrischen Theilchen sich von einander immer weiter entfernten, bis endlich ihre Bahnen asymptotisch der Richtung der Scheidungskraft sich näherten; so würden, bevor die sich immer weiter von einander entfernenden Theilchen zu den Grenzen des Conductors gelangten, Begegnungen stattfinden zwischen den von verschiedenen Molecularströmen kommenden ungleichartigen elektrischen Theilchen, die dann mit einander neue Molecularströme bildeten. Diese neu gebildeten Molecularströme würden sodann auch wieder aufgelöst werden und die Bahnen der sich immer weiter von einander entfernenden Theilchen würden wieder asymptotisch der Richtung der Scheidungskraft sich nähern u. s. f.

Hierdurch entstünde eine elektrische Strömung im Conductor in der Richtung der Scheidungskraft. Hätte der Conductor die Gestalt eines gleichförmigen Ringes und hätte die Scheidungskraft in jedem einzelnen Längenelemente des Ringes bei gleicher Grösse die Richtung des Elements; so würde im Ringe ein constanter Kreisstrom gebildet werden, und es würden die im vorigen Artikel entwickelten Bewegungsgesetze elektrischer Theilchen unter Einfluss einer elektrischen Scheidungskraft die Grundlage der Theorie dieser constanten elektrischen Ströme in geschlossenen Conductoren bilden.

Hiebei leuchtet ein, dass während dieser Strömung von jedem Theilchen, indem es unter Einwirkung der Scheidungskraft in Richtung der Scheidungskraft fortrückt, Arbeit verrichtet wird. Und da alle andern Kräfte, die auf ein solches Theilchen im Conductor wirken, summarisch einander das Gleichgewicht halten; so tritt jene Arbeit als äquivalente Zunahme an lebendiger Kraft des Theilchens hervor, woraus folgt, dass die lebendige Kraft aller im Conductor enthaltenen Ampère schen Molecularströme, während der

Strom durch den Conductor geht, wächst, nämlich das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher die Theilchen in den Ampèreschen Molecularströmen sich um einander drehen, proportional der Scheidungskraft (elektromotorischen Kraft) und proportional dem in der Richtung der Scheidungskraft zurückgelegten Wege (der Stromintensität). Wird das Verhältniss der elektromotorischen Kraft zur Stromintensität mit dem Namen Widerstand bezeichnet, so kann dafür gesetzt werden, die lebendige Kraft aller im Conductor enthaltenen Molecularströme wachse, während der Strom durch den Conductor geht, proportional dem Widerstande und proportional dem Quadrate der Stromintensität.

Dieses Wachsthum der Bewegungsenergie der in einem Conductor enthaltenen elektrischen Theilchen, während ein Strom durch den Conductor geht, ergiebt sich also als eine nothwendige Folge von der Einwirkung der elektromotorischen Kraft auf die Theilchen, während diese Theilchen in Folge des Stroms in der Richtung dieser Kraft fortrücken.

Diese theoretische Folgerung wird nun durch die Erfahrung zwar nicht auf directem, aber doch auf indirectem Wege bestätigt, nämlich dadurch, dass ein Wachsthum der Wärmeenergie im Conductor, während ein Strom durch den Conductor geht, beobachtet wird. Und dieses beobachtete Wachsthum der Wärmeenergie im Conductor ist jenem berechneten Wachsthum der Bewegungsenergie der elektrischen Theilchen in den Ampèreschen Molecularströmen des Conductors gleich.

Nun ist die Wärmeenergie eines Körpers eine Bewegungsenergie, welche von Bewegungen im Innern des Körpers herrührt, die sich der directen Beobachtung entziehen. Ebenso ist die den elektrischen Theilchen der Ampèreschen Molecularströme in einem Conductor angehörige Bewegungsenergie eine Bewegungsenergie, welche von Bewegungen im Innern des Conductors herrührt, die sich der directen Beobachtung entziehen.

Trotz dieser Uebereinstimmung wäre es möglich, dass jene Wärmeenergie eines Körpers und diese Bewegungsenergie der elektrischen Theilchen der in demselben Körper enthaltenen Ampèreschen Molecularströme ihrem Wesen nach ganz verschieden wären. Denn es wäre möglich, dass jene Wärmeenergie eine Bewegungs-

energie wäre, welche von Bewegungen ganz anderer Theilchen als elektrischen herrührte, und die Bewegungen dieser andern Theilchen könnten ganz anderer Art sein wie die in den *Ampèreschen* Strömen.

Zur Erklärung der Identität des oben bestimmten Wachsthums der Energie in den *Ampèreschen* Molecularströmen mit dem aus der Beobachtung gefundenen Wachsthum der Wärmeenergie würde dann *nach dem Principe der Erhaltung der Energie* schlechterdings nothwendig sein, dass eine *Uebertragung* der Bewegungsenergie von den elektrischen Theilchen in den *Ampèreschen* Strömen auf die andern Theilchen, deren Bewegung das Wesen der Wärmeenergie mache, statt fände. Und zwar müsste *alle* durch den Strom in den elektrischen Theilchen der *Ampèreschen* Ströme erzeugte Bewegungsenergie auf diese andern Theilchen in jedem Augenblicke *total* übertragen werden.

Abgesehen davon, dass von einer solchen *totalen* Uebertragung Rechenschaft zu geben nicht möglich ist, leuchtet von selbst ein, dass eine jede auch nur partielle Uebertragung von Bewegungsenergie *Ampèrescher* Molecularströme auf andere Theilchen in Widerspruch stehen würde mit der allen *Ampèreschen* Strömen ihrem Wesen nach zukommenden *Beharrlichkeit*. Fände zwischen elektrischen Theilchen in Molecularströmen eine solche Uebertragung von Bewegungsenergie auf andere Theilchen wirklich statt, so würde daraus einfach blos folgen, dass die von jenen Theilchen gebildeten Molecularströme *keine Ampèreschen Molecularströme* wären, weil ihnen keine *Beharrlichkeit* zukäme, worin das Wesen der *Ampèreschen* Molecularströme besteht.

Es ergiebt sich hieraus also die Folgerung, dass, wenn in den Conductoren alle elektrischen Theilchen im Aggregatzustande *Ampèrescher* Molecularströme sich befinden, das beobachtete Wachsthum der *Wärmeenergie* eines Conductors, während ein Strom durch ihn hindurchgeht, *unmittelbar* von dem Wachsthume der *Bewegungsenergie* der elektrischen Theilchen, welche die *Ampèreschen* Ströme bilden, herrührt, d. h. dass die dem Conductor durch den Strom ertheilte *Wärmeenergie* eine *Bewegungsenergie* ist, welche von Bewegungen im Innern des Conductors herrührt, und zwar von Bewegungen, die *in einer Verstärkung der von den*

elektrischen Theilchen im Conductor gebildeten Ampèreschen Molecularströme besteht.

Man sehe über diese Identität von Wärmeenergie und Bewegungsenergie Ampèrescher Molecularströme, was »Ueber die Umsetzung der Stromarbeit in Wärme« im 10. Bande der Abhandlungen der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen (1862) im 33. Artikel der Abhandlung »Zur Galvanometrie« gesagt worden ist.

20.

Ueber Thermomagnetismus.

An die Voraussetzung der vorhergehenden Artikel, dass die Elektricität in Conductoren im Aggregatzustande Ampèrescher Molecularströme sich befinde, und an die daraus folgende Identität der Wärmeenergie des Conductors mit der Bewegungsenergie der Ampèreschen Ströme im Conductor, knüpft sich leicht noch die Bemerkung an, dass Temperaturgleichheit zweier Conductoren hiernach zwar auf gewissen Verhältnissen in Stärke und Beschaffenheit der Ampèreschen Ströme in beiden Conductoren beruhen müsse; dass aber bei diesen zur Temperaturgleichheit erforderlichen Verhältnissen in den Strömen beider Conductoren noch folgende Verschiedenheit statt finden könne. Es kann nämlich in den Ampèreschen Strömen des einen Conductors grössere Masse von Elektricität mit geringerer Geschwindigkeit, in denen des andern Conductors kleinere Masse von Elektricität mit grösserer Geschwindigkeit sich bewegen.

Denkt man sich nun einen Ring aus zwei solchen verschiedenartigen Conductoren gebildet, durch welchen ein constanter Strom geht, so dass durch alle Querschnitte des Rings in gleicher Zeit gleich viel Elektricität strömt; so leuchtet ein, dass auch durch die beiden Querschnitte, welche die erste Schicht des zweiten Conductors begrenzen, gleich viel Elektricität gehen müsse. Die durch den ersten Querschnitt gehende Elektricität kommt aber aus dem ersten Conductor, wo in den Molecularströmen grössere Masse von Elektricität mit geringerer Geschwindigkeit sich bewegt. Wegen dieser geringeren Geschwindigkeit kommt also dieser in die

erste Schicht des zweiten Conductors eindringenden Elektricität eine geringere lebendige Kraft zu. — Die durch den zweiten Querschnitt gehende Elektricität kommt aus der betrachteten ersten Schicht des zweiten Conductors selbst, wo in den Ampèreschen Strömen kleinere Masse von Elektricität sich mit grösserer Geschwindigkeit bewegt, und es kommt ihr also wegen dieser grösseren Geschwindigkeit eine grössere lebendige Kraft zu. Es ergiebt sich hieraus, dass in Folge des Stroms diese erste Schicht des zweiten Conductors mehr lebendige Kraft an die folgende Schicht des zweiten Conductors abgiebt als sie von der letzten Schicht des ersten Conductors empfängt, dass also eine Abnahme an Bewegungsenergie in den Ampèreschen Strömen dieser Schicht statt findet, d. h. eine Abnahme der Wärmeenergie oder Temperatur.

Das Umgekehrte findet man, wenn man die beiden Querschnitte betrachtet, welche die erste Schicht des ersten Conductors begrenzen. Die durch den ersten Querschnitt in diese Schicht eintretende Elektricität kommt aus dem Ende des zweiten Conductors mit grösserer Geschwindigkeit; die durch den zweiten Querschnitt aus dieser Schicht austretende Elektricität verlässt diese Schicht mit geringerer Geschwindigkeit, woraus sich ergiebt, dass in Folge des Stroms die erste Schicht des ersten Conductors an die folgende Schicht desselben Conductors weniger lebendige Kraft abgiebt als sie von der letzten Schicht des zweiten Conductors empfängt, wonach also eine Zunahme an Bewegungsenergie in den Ampèreschen Strömen dieser Schicht statt findet, d. h. eine Zunahme der Wärmeenergie oder Temperatur.

Man sieht, dass hiedurch eine Grundlage für die Lehre vom Thermomagnetismus, insbesondere für den Peltierschen Fundamentalversuch, dargeboten wird, deren weitere Verfolgung hier jedoch zu weit führen würde.

Es genüge, hier nur noch eine ähnliche Bemerkung in Beziehung auf den Seebeckschen Fundamentalversuch des Thermomagnetismus beizufügen. In einem Körper, der in allen seinen Theilchen gleiche Temperatur besitzt, wird der Wärme ein mobiles Gleichgewicht zugeschrieben, oder man spricht, nach Fourier, von einer wechselseitigen Strahlung der Körpertheilchen, vermöge deren jedes

Theilchen an die umgebenden Theilchen ebensoviel Wärme verliert, als es von ihnen empfängt. Besteht nun die Wärme in Ampèreschen Molecularströmen, die sich aber auflösen, indem das positive und negative Theilchen sich von einander entfernen, bis sie andern Theilchen begegnen, mit denen sie neue Molecularströme bilden; so würde die Temperaturgleichheit darin bestehen, dass die lebendige Kraft der aus einem Körpertheile austretenden elektrischen Theilchen gleich der lebendigen Kraft der in diesen Körpertheil eintretenden elektrischen Theilchen wäre.

Betrachtet man nun die Berührungsfläche zweier Conductoren, welche sich blos dadurch unterscheiden, dass in den Ampèreschen Strömen des einen grössere Massen von Elektricität mit geringerer Geschwindigkeit, in denen des andern kleinere Massen mit grösserer Geschwindigkeit sich bewegen; so würde bei gleicher Temperatur der beiden Conductoren zwar die lebendige Kraft der aus dem ersten Conductor in den zweiten übergehenden elektrischen Theilchen gleich sein der lebendigen Kraft der aus dem zweiten Conductor in den ersten übergehenden Theilchen; aber die Masse der elektrischen Theilchen, welche aus dem ersten Conductor in den zweiten übergeht, würde grösser sein als die Masse der elektrischen Theilchen, welche aus dem zweiten Conductor in den ersten übergeht, woraus sich (wenn es immer positive Elektricität ist, welche übergeht, während die negative Elektricität im Conductor, an dessen Theilchen sie haftet, zurückbleibt) eine Differenz der elektrischen Ladung zu beiden Seiten der Contactfläche ergäbe, d. h. es ergäbe sich das Vorhandensein einer elektromotorischen Kraft an dieser Contactfläche; denn die elektromotorische Kraft einer Contactfläche ist eine Kraft, von welcher eine Differenz der elektrischen Ladung zu beiden Seiten der Contactfläche hervorgebracht wird.

Sind nun die beiden Conductoren so beschaffen, dass jene Differenz der Ladung zu beiden Seiten ihrer Contactfläche nicht immer die nämliche ist, sondern nach Verschiedenheit der Temperatur grösser oder kleiner, so ergiebt sich daraus die Stromerregung in einem aus diesen beiden Conductoren gebildeten Ringe, wenn an den beiden Contactflächen der Conductoren verschiedene Temperaturen statt finden.

21.

Helmholtz, über den Widerspruch zwischen dem Gesetze der elektrischen Kraft und dem Gesetze der Erhaltung der Kraft.

Helmholtz hat in der Abhandlung: »Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper« im Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 72, Seite 7 und 8 aus dem Gesetze der elektrischen Kraft die Bewegungsgleichung zweier elektrischen Theilchen, für Bewegungen in Richtung der Entfernung r beider Theilchen, abgeleitet, nämlich

$$\frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{C - \frac{ee'}{r}}{\frac{1}{2}mcc - \frac{ee'}{r}},$$

oder, $C = \frac{ee'}{r_0}$ und $\frac{2ee'}{mcc} = \varrho$ gesetzt, die Gleichung

$$\frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\cdot\frac{\varrho}{r_0},$$

d. i. dieselbe Gleichung, welche Art. 9 gefunden worden ist.

Ist $\frac{ee'}{r} > \frac{1}{2}mcc > C$, d. i. $\frac{\varrho}{r} > 1 > \frac{\varrho}{r_0}$, so ist $\frac{dr^2}{dt^2}$ positiv und grösser als cc, also $\frac{dr}{dt}$ reell. Ist letzteres selbst positiv, so wird r wachsen, bis $\frac{ee'}{r} = \frac{1}{2}mcc$, d. i. $r = \varrho$, dann wird $\frac{dr}{dt}$ unendlich gross.

Dasselbe wird geschehen, wenn im Anfange $C > \frac{1}{2}mcc > \frac{ee'}{r}$, d. i. $\frac{\varrho}{r_0} > 1 > \frac{\varrho}{r}$, und $\frac{dr}{dt}$ negativ ist.

Diese Folgerungen stehen nach Helmholtz in Widerspruch mit dem Gesetze der Erhaltung der Kraft.

Es ist dabei nun erstens zu bemerken, dass hier zwei elektrische Theilchen angenommen werden, die sich zwar mit endlicher Geschwindigkeit zu bewegen beginnen, die aber grösser ist als die Geschwindigkeit c, d. i. grösser als $439450 . 10^6 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$. Der Fall, dass zwei Körper mit solcher Geschwindigkeit sich gegen einander bewegen, ist nirgends in der Natur nachzuweisen; bei allen praktischen Anwendungen des Gesetzes pflegt man vielmehr $\frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}$ immer als einen sehr kleinen Bruch anzunehmen, was Beachtung verdient.

Denn nach *Helmholtz*, a. a. O. Seite 7, widerspricht ein Gesetz dem Gesetze von der *Erhaltung der Kraft*, wenn zwei Theilchen, die sich demselben gemäss bewegen und mit *endlicher* Geschwindigkeit beginnen, in endlicher Entfernung von einander unendliche *lebendige Kraft* erreichen und also eine unendlich grosse Arbeit leisten können.

Es scheint hierin der Satz ausgesprochen zu sein, dass nach dem Gesetz der Erhaltung der Kraft zwei Theilchen überhaupt niemals unendliche lebendige Kraft besitzen können.

Denn man würde offenbar obigen Ausspruch auch umkehren und sagen können:

Ein Gesetz widerspricht dem Gesetze der Erhaltung der Kraft, wenn zwei Theilchen, die sich demselben gemäss bewegen und mit *unendlicher* Geschwindigkeit beginnen, in endlicher Entfernung von einander *endliche* lebendige Kraft erreichen und also einen unendlich grossen Verlust an Arbeit, die sie leisten können, erleiden.

Die beiden Theilchen müssten also immer unendliche Geschwindigkeit behalten, denn haben sie dieselbe in keiner noch so grossen endlichen Entfernung verloren, so werden sie dieselbe, nach der Natur der Potentiale, auch darüber hinaus niemals verlieren. Körper aber, die sich immer mit unendlicher Geschwindigkeit gegen einander bewegen, sind vom Bereich unserer Forschungen ausgeschlossen.

Besitzen aber zwei Theilchen immer nur endliche lebendige Kraft; so muss es einen endlichen Grenzwerth der lebendigen Kraft geben, den sie niemals überschreiten. Es ist dann möglich, dass dieser Grenzwerth für zwei elektrische Theilchen e und $e' = \frac{ee'}{\varrho}$ ist, d. h. dass das Quadrat der Geschwindigkeit, mit der sich beide Theilchen gegeneinander bewegen, nicht grösser als cc sein könne.

Der von *Helmholtz* gerügte Widerspruch würde hiernach nicht in dem Gesetze liegen, sondern in seiner Annahme, wonach die beiden Theilchen mit einer Geschwindigkeit begönnen, deren Quadrat $\frac{dr^2}{dt^2} > cc$ wäre.

Wird eine solche Grenzbestimmung der lebendigen Kräfte im *Gesetze der Erhaltung der Kraft* nach *Helmholtz* mit aufgenommen; so kann sie in dem *Grundgesetze der elektrischen Wirkung* Art. 4 ebensogut mit aufgenommen werden, indem man

die dort mit U bezeichnete Arbeit, ebenso wie die mit x bezeichnete lebendige Kraft (im Gesetze $U + x = \frac{ee'}{\varrho}$), beide als ihrer Natur nach positive Grössen betrachtet.

Zweitens ist zu bemerken, dass jene beiden elektrischen Theilchen zwar in endlicher Entfernung von einander unendliche lebendige Kraft erreichen; diese endliche Entfernung ist aber $\varrho = \frac{2ee'}{cc}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)$, eine nach unsern Maassen unangebbar kleine Entfernung, aus gleichen Gründen, aus denen die elektrischen Massen ε und ε' selbst nach unsern Maassen unangebbar sind. Diese Entfernung ist daher Art. 9 als eine Molecularentfernung bezeichnet worden.

Die Theorie der Molecularbewegungen bedarf jedenfalls einer besonderen Entwickelung, an der es überall noch fehlt; solange aber als eine solche Theorie von den mechanischen Untersuchungen noch ausgeschlossen bleibt, haben alle Zweifel an physischer Zulässigkeit, die sich auf das Bereich der Molecularbewegungen beziehen, keine Berechtigung.

Drittens möge bemerkt werden, dass derselbe Einwand, dass nämlich zwei Theilchen, die mit endlicher Geschwindigkeit beginnen, in endlicher Entfernung von einander unendliche lebendige Kraft erreichen, auch das Gravitationsgesetz trifft, wenn man die Massen ponderabeler Theilchen in Punkten concentrirt annimmt. Beseitigt man aber diesen Einwand beim Gravitationsgesetze dadurch, dass man die Massen auch der kleinsten Theilchen als einen Raum erfüllend sich vorstellt; so wird man dasselbe auch bei elektrischen Theilchen thun müssen, wo sich dann auch ergiebt, dass nur ein verschwindend kleiner Theil eines solchen Theilchens in einem bestimmten Augenblicke zur Entfernung ϱ gelangt; ein anderer verschwindend kleiner Theil, der schon im Augenblicke vorher zur Entfernung ϱ gelangt war, würde die unendlich grosse Näherungsgeschwindigkeit mit unendlich grosser Entfernungsgeschwindigkeit vertauscht haben. Sind aber diese verschwindenden Theile kleinster Theilchen fest an einander gekettet, so dürfte von solchen unendlichen Geschwindigkeiten gar keine Rede sein.

Auch Weltkörper können ihre Bewegung unter physisch zulässigen Verhältnissen beginnen und können, indem sie sich nach dem Gravitationsgesetze weiter bewegen, in physisch unzulässige Ver-

hältnisse gerathen, die nur durch Mitwirkung der auf Molecularentfernungen beschränkten Molecularkräfte beseitigt werden. Ein Absehen von dieser Mitwirkung ist streng genommen nur temporär gestattet, solange nämlich die Verhältnisse so beschaffen sind, dass ihr Einfluss entweder Null ist oder als verschwindend klein betrachtet werden darf. Ebensowenig aber wie daraus ein Einwand gegen das Gravitationsgesetz entnommen wird, dürfte aus den physisch unzulässigen Verhältnissen, zu denen das Grundgesetz der elektrischen Wirkung nach Helmholtz führt, ein Einwand gegen dieses Gesetz sich ergeben, wenn man beachtet, dass diese unzulässigen Verhältnisse nur an gewisse Molecularentfernungen gebunden sind.

INHALT.

